

Adam Olejnik

kmdr dr inż. Adam Olejnik
Akademia Marynarki Wojennej im. Bohaterów Westerplatte
81 – 103 Gdynia 3 ul. Śmidowicza 69
Zakład Technologii Prac Podwodnych
tel. +58 626 27 46, fax. +58 625 38 82
e-mail: aolej@wp.pl

**METODA OKREŚLANIA ODLEGŁOŚCI OBRAZOWEJ KAMERY
FOTOGRAMETRYCZNEJ**

W Zakładzie Technologii Prac Podwodnych Akademii Marynarki Wojennej w Gdyni (ZTPP) od pewnego czasu prowadzone są badania w zakresie fotogrametrii podwodnej. Obecnie opracowywana jest metoda oceny wymiarów i uszkodzeń obiektów podwodnych za pomocą wzorca świetlnego, naświetlanego na badany obiekt. W niniejszym artykule przedstawiono podstawy teoretyczne metody wyznaczania odległości obrazowej kamery fotogrametrycznej. Wielkość ta ma wpływ na skalę zdjęcia fotogrametrycznego i wykorzystywana jest przy określaniu wymiarów obfotografowanych obiektów podwodnych.

Słowa kluczowe: *technologia prac podwodnych, fotogrametria podwodna.*

**METHOD OF DETERMINING FOCAL LENGTH
IN A PHOTOGRAMMETRIC CAMERA**

Research on underwater photogrammetry has started some time ago in the Department of Underwater Work Technology of the Naval Academy in Gdynia (ZTPP). Currently, a method of assessing the size and damage of underwater objects using the pattern of light irradiated to the tested object is being developed. This article presents the theoretical basis of the methods of determining focal distances in a photogrammetric camera. This distance influences the scale of a photogrammetric image and is used in determining the dimensions of the photographed underwater objects.

Keywords: *underwater technology, underwater photogrammetry.*

WSTĘP

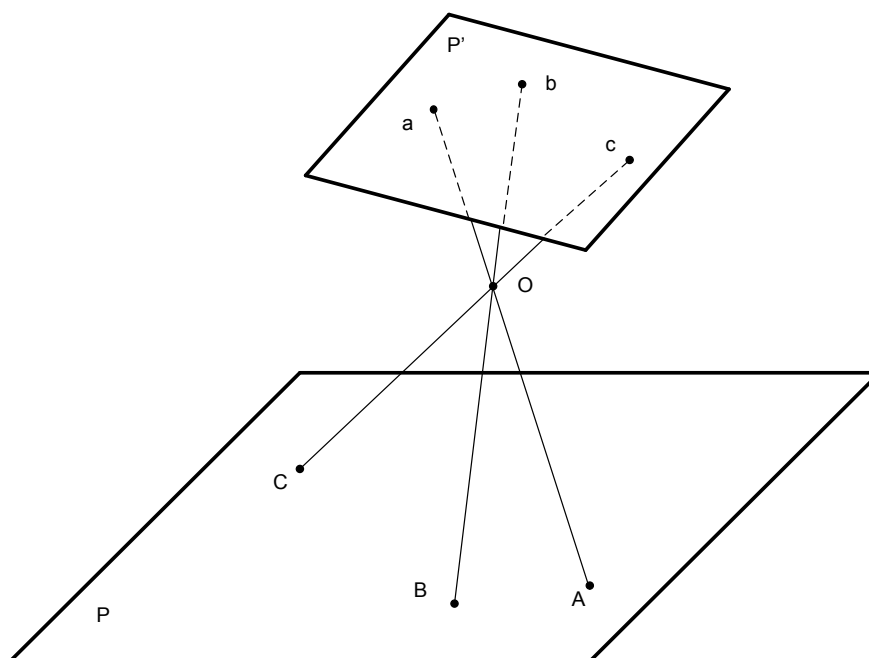
W fotogrametrii rozróżnia się cztery rodzaje orientacji: orientację wewnętrzną (odległość obrazową kamery), orientację zewnętrzną kamery pomiarowej oraz orientację wzajemną (względną) stereogramu i orientację bezwzględną (absolutną) modelu przestrzennego [2,3].

Geometrycznie orientacja wewnętrzna kamery pomiarowej to położenie środka rzutów w stosunku do płaszczyzny tłowej w chwili fotografowania, a dokładnie jest to odległość obrazowa czyli ogniskowa układu optycznego (tzw. stała kamery). Jest to wielkość wykorzystywana w określaniu skali zdjęcia fotogrametrycznego. Zakładając, że układ optyczny jest wolny od wad fizycznych i tworzy obraz zgodnie z regułami optyki geometrycznej obraz jest rzutem środkowym (rys. 1) a wzór na skalę zdjęcia przyjmuje postać:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{l}{L} = \frac{f}{D} \quad (1)$$

gdzie:

- λ - skala zdjęcia,
- l - odległość odcinka na płaszczyźnie obrazowej (np. ab na Rys. 1),
- L - rzeczywista odległość odcinka w terenie (np. AB na Rys. 1),
- f - odległość obrazowa (ogniskowa układu optycznego – stała kamery),
- D - odległość pomiędzy płaszczyzną przedmiotową a środkiem rzutów O .



Rys. 1. Rzut środkowy.

S – środek rzutu, P – płaszczyzna przedmiotowa, P' – płaszczyzna obrazowa.

INTRODUCTION

In photogrammetry, four types of orientation are distinguished: the interior orientation (focal length), the exterior orientation of the measuring camera, the relative orientation of the stereogram and the absolute orientation of the spatial model [2,3].

Geometrically speaking, the interior orientation of the camera is the centre of projections in relation to the plane at the time of the shooting; this is exactly the focal length or distance of the optical system (known as the 'camera constant'). This is the unit used in determining the scale of photogrammetric images. Assuming that the optical system is free from physical defects and creates an image according to the rules of geometrical optics, such an image is the central projection (Fig. 1) and the formula for the image scale takes the following form:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{l}{L} = \frac{f}{D} \tag{1}$$

where:

- λ - image scale,
- l - distance of the line segment on image plane (e.g. ab on Fig. 1),
- L - actual distance of the line segment (e.g. AB on Fig. 1),
- f - focal length (camera constant),
- D - distance between the object plane and the centre of projections O.

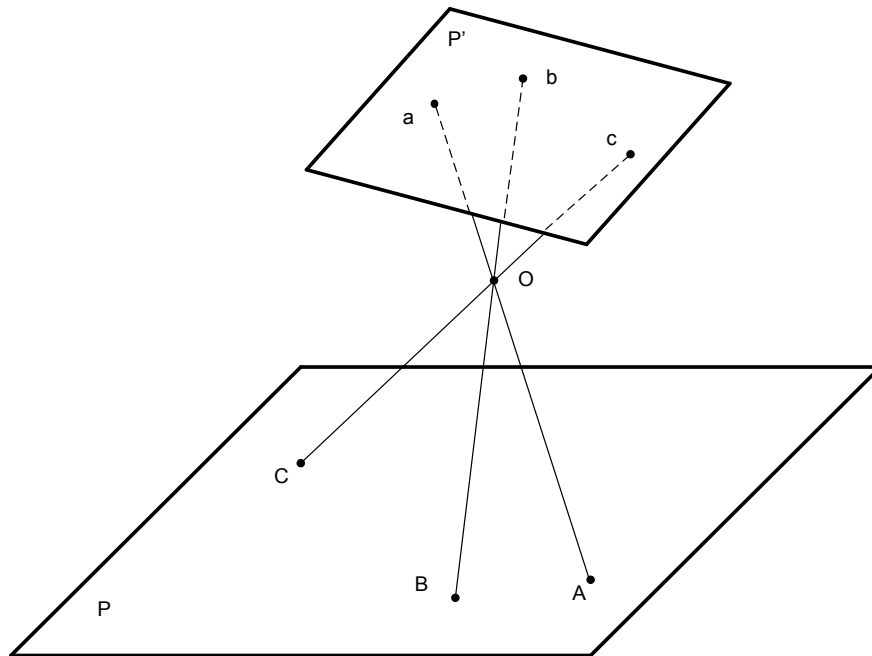
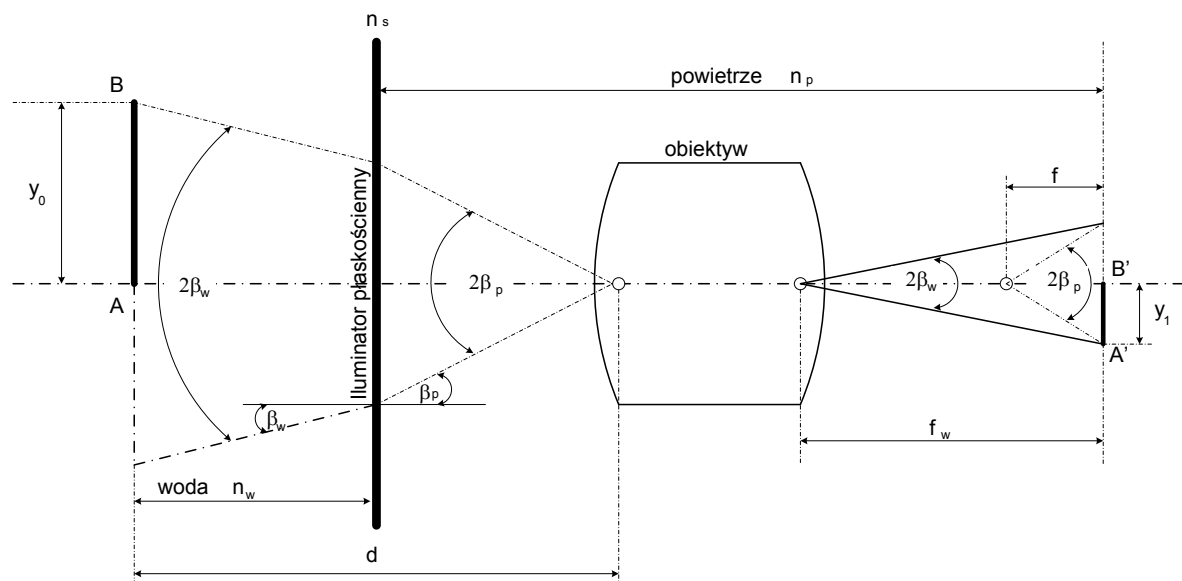


Fig. 1. Central projection.
S – środek rzutu, P – object plane, P' – image plane.

Odległość obrazowa kamery ma również wpływ na wielkość obrazu obiektu obfotografowanego za pomocą układu optycznego woda – iluminator płaskościenny – powietrze, wykonanego za pomocą podwodnej kamery fotogrametrycznej (rys. 2).



Rys. 2. Przebieg promieni świetlnych w układzie optycznym iluminator płaskościenny – obiektyw w wodzie [na podst. 1].

gdzie: AB – obserwowany za pomocą układu odcinek, $A'B'$ – obraz obserwowanego odcinka, n_w – współczynnik załamania światła w wodzie, n_s – współczynnik załamania światła w szkłe, n_p – współczynnik załamania światła w powietrzu, β_w – kąt padania promienia świetlnego na iluminator płaskościenny, β_p – kąt padania promienia świetlnego na obiektyw, f – odległość obrazowa kamery w powietrzu, f_w – odległość obrazowa kamery w wodzie, y_0 – odległość obserwowanego odcinka AB , y_1 – długość obrazu obserwowanego odcinka AB .

Promienie biegnące od przedmiotu reprezentowanego na rysunku przez odcinek AB biegną w środowisku wodnym od przedmiotu do obiektywu O po drodze padając na krawędź płaszczyzny rozgraniczającej ośrodek wodny i powietrzny, czyli iluminator płaskościenny, pod kątem $2\beta_w$. Na krawędzi iluminatora następuje ich załamanie w kierunku normalnej i w ten sposób docierają do obiektywu pod kątem $2\beta_p$. Co oznacza, że obiektyw „widzi” obiekt o innej wielkości kątowej niż rzeczywista.

Po przejściu promieni przez obiektyw, w płaszczyźnie tłowej π' powstaje obraz $A'B' = y_1$ obiektu rzeczywistego $AB = y_0$. Gdy punkt A znajduje się na osi optycznej układu to punkt B' jest końcem promienia radialnego y_1 w płaszczyźnie tłowej, wtedy:

$$y_1 = f \cdot \operatorname{tg} \beta_p \quad (2)$$

$$y_1 = f_w \cdot \operatorname{tg} \beta_w \quad (3)$$

gdzie:

- y_1 - długość odcinka $A'B'$ (obrazu odcinka AB),
- f - odległość ogniskowa układu optycznego w powietrzu,
- f_w - odległość ogniskowa układu optycznego w wodzie,
- β_p - kąt padania światła na obiektyw,
- β_w - kąt padania światła na iluminator.

Focal distance of the camera has also some influence on the size of the object photographed with the 'water - illuminator – air' optical system, taken by an underwater photogrammetric camera (Fig. 2).

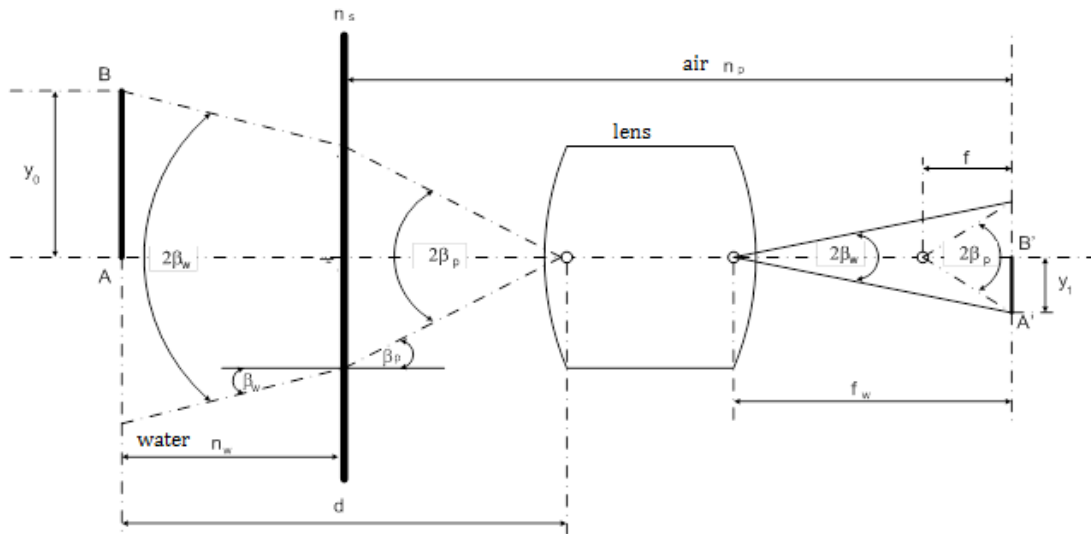


Figure 2. The course of light rays in the 'illuminator – lens in water' optical system [on the basis of 1].

where: AB – the line segment observed by the system, $A'B'$ – image of the observed line segment, n_w – refractive index of water, n_s – refractive index of glass, n_p – index of refraction in the air, β_w – angle of incidence of the light on the illuminator, β_p – angle of incidence of the light on the lens, f – focal distance of the cameras in the air, f_w – focal distance of the camera in water, y_0 – the distance of the observed line segment AB , y_1 – the length of the observed image of the line segment AB .

Rays travelling from the object represented in the picture as line segment \overline{AB} , travel in the aquatic environment from the object to the lens O falling on the edge of the plane dividing the water and air environment, that is the illuminator, at the angle of $2\beta_w$. They refract on the edge of the illuminator and thus reach the lens at the angle of $2\beta_w$. It means that the lens "see" an object at a different angle than the actual size. After the rays have passed through the lens, an image $A'B' = y_1$ of the real object $\overline{AB} = y_0$ is created in the background plane π' . When the point A is located on the optical axis, then the point B' is the end of the radius y_1 in the background plane, then:

$$y_1 = f \cdot \operatorname{tg} \beta_p \quad (2)$$

$$y_1 = f_w \cdot \operatorname{tg} \beta_w \quad (3)$$

where:

- y_1 – length of the line segment $\overline{A'B'}$ (the image of the segment \overline{AB}),
- f – focal length of the optical system in the air,
- f_w – focal length of the optical system in water,
- β_p – angle of incidence of light on the lens,
- β_w – angle of incidence of light on the illuminator.

Co oznacza, że zachodzi następujący układ równań:

$$y_1 = f \cdot \operatorname{tg}\beta_p \rightarrow f = \frac{y_1}{\operatorname{tg}\beta_p} \quad (4)$$

$$y_1 = f_w \cdot \operatorname{tg}\beta_w$$

wtedy:

$$f = \frac{f_w \cdot \operatorname{tg}\beta_w}{\operatorname{tg}\beta_p} = f_w \cdot \frac{\operatorname{tg}\beta_w}{\operatorname{tg}\beta_p} \quad (5)$$

Z zależności trygonometrycznych oraz z prawa załamania światła Sneliusa wiemy, że mają miejsce następujące związki:

$$\operatorname{tg}\beta_p = \frac{\sin\beta_p}{\cos\beta_p} \quad (6)$$

oraz

$$\frac{\sin\beta_w}{\sin\beta_p} = \frac{n_p}{n_w} \quad (7)$$

gdzie:

- n_p - współczynnik załamania światła w powietrzu,
- n_w - współczynnik załamania światła w wodzie

Z równania (7) wynika, że:

$$n_w \cdot \sin\beta_w = n_p \cdot \sin\beta_p \quad (8)$$

$$\sin\beta_p = \frac{n_w \cdot \sin\beta_w}{n_p} \quad (9)$$

$$\sin\beta_p = \frac{n_w}{n_p} \cdot \sin\beta_w \quad (10)$$

Ponieważ:

$$\cos^2\beta_p + \sin^2\beta_p = 1 \rightarrow \cos^2\beta_p = 1 - \sin^2\beta_p \quad (11)$$

$$\cos\beta_p = (1 - \sin^2\beta_p)^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

Biorąc pod uwagę równanie (10) można zapisać, że:

$$\sin^2\beta_p = \left(\frac{n_w}{n_p} \cdot \sin\beta_w \right)^2 \quad (13)$$

Which results in the following system of equations:

$$y_1 = f \cdot \operatorname{tg}\beta_p \rightarrow f = \frac{y_1}{\operatorname{tg}\beta_p} \quad (4)$$

$$y_1 = f_w \cdot \operatorname{tg}\beta_w$$

then:

$$f = \frac{f_w \cdot \operatorname{tg}\beta_w}{\operatorname{tg}\beta_p} = f_w \cdot \frac{\operatorname{tg}\beta_w}{\operatorname{tg}\beta_p} \quad (5)$$

From trigonometry and Snell's Law of Refraction, we know that:

$$\operatorname{tg}\beta_p = \frac{\sin\beta_p}{\cos\beta_p} \quad (6)$$

and

$$\frac{\sin\beta_w}{\sin\beta_p} = \frac{n_p}{n_w} \quad (7)$$

where:

n_p - index of refraction in the air

n_w - index of refraction in water

It results from equation (7) that:

$$n_w \cdot \sin\beta_w = n_p \cdot \sin\beta_p \quad (8)$$

$$\sin\beta_p = \frac{n_w \cdot \sin\beta_w}{n_p} \quad (9)$$

$$\sin\beta_p = \frac{n_w}{n_p} \cdot \sin\beta_w \quad (10)$$

Because:

$$\cos^2\beta_p + \sin^2\beta_p = 1 \rightarrow \cos^2\beta_p = 1 - \sin^2\beta_p \quad (11)$$

$$\cos\beta_p = (1 - \sin^2\beta_p)^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

Taking into account equation (10), we can write that:

$$\sin^2\beta_p = \left(\frac{n_w}{n_p} \cdot \sin\beta_w \right)^2 \quad (13)$$

Oraz

$$\sin^2 \beta_p = \left(\frac{n_w}{n_p} \right)^2 \cdot \sin^2 \beta_w \quad (14)$$

Wtedy równanie (12) można zapisać następująco:

$$\cos \beta_p = \left[1 - \left(\frac{n_w}{n_p} \right)^2 \sin^2 \beta_w \right]^{\frac{1}{2}} \quad (15)$$

Uwzględniając równania (10) i (15) w równaniu (6) otrzymujemy:

$$\operatorname{tg} \beta_p = \frac{\frac{n_w}{n_p} \cdot \sin \beta_w}{\left[1 - \left(\frac{n_w}{n_p} \right)^2 \sin^2 \beta_w \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (16)$$

$$\operatorname{tg} \beta_p = \frac{n_w}{n_p} \cdot \sin \beta_w \left[1 - \left(\frac{n_w}{n_p} \right)^2 \sin^2 \beta_w \right]^{\frac{1}{2}} \quad (17)$$

Ponieważ:

$$n_p = 1 \rightarrow \frac{n_w}{n_p} = n_w = n \quad (18)$$

Równanie (16) można zapisać w postaci:

$$\operatorname{tg} \beta_p = n \cdot \sin \beta_w [1 - n^2 \sin^2 \beta_w]^{-\frac{1}{2}} \quad (19)$$

Uwzględniając równanie (19) w równaniu (2) otrzymujemy ostatecznie:

$$y_1 = f \cdot \operatorname{tg} \beta_p = f \cdot n \cdot \sin \beta_w [1 - n^2 \sin^2 \beta_w]^{-\frac{1}{2}} \quad (20)$$

$$y_1 = f \cdot n \cdot \sin \beta_w [1 - n^2 \sin^2 \beta_w]^{-\frac{1}{2}} \quad (21)$$

Co oznacza, że:

$$y_1 = f(f; n_w; \beta_w) \quad (22)$$

Z równania (22) wynika, że wielkość obrazu obiektu obfotografowanego za pomocą układu optycznego woda – iluminator płaskościenny – powietrze jest zależna od odległości ogniskowej kamery (f) w powietrzu oraz od współczynnika załamania światła w wodzie (n_w) i wielkości kątowej obiektu (β_w). Odległość ogniskowa kamery jest wielkością stałą wynikającą z jej konstrukcji. Bardzo często jest parametrem podawanym w danych technicznych kamery. Jeśli jednak dane te nie zawierają tej informacji można ją wyznaczyć wykorzystując metodę podaną w niniejszym artykule.

$$\sin^2 \beta_p = \left(\frac{n_w}{n_p}\right)^2 \cdot \sin^2 \beta_w \quad (14)$$

Then equation (12) can be written in the following form:

$$\cos \beta_p = \left[1 - \left(\frac{n_w}{n_p}\right)^2 \sin^2 \beta_w\right]^{\frac{1}{2}} \quad (15)$$

Taking into account equation (10) and (15) in equation (6), we get:

$$tg \beta_p = \frac{\frac{n_w}{n_p} \cdot \sin \beta_w}{\left[1 - \left(\frac{n_w}{n_p}\right)^2 \sin^2 \beta_w\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (16)$$

$$tg \beta_p = \frac{n_w}{n_p} \cdot \sin \beta_w \left[1 - \left(\frac{n_w}{n_p}\right)^2 \sin^2 \beta_w\right]^{\frac{1}{2}} \quad (17)$$

Because:

$$n_p = 1 \rightarrow \frac{n_w}{n_p} = n_w = n \quad (18)$$

Equation (16) can be written as:

$$tg \beta_p = n \cdot \sin \beta_w [1 - n^2 \sin^2 \beta_w]^{\frac{1}{2}} \quad (19)$$

Taking into account equation (19) in equation (2), we finally get:

$$y_1 = f \cdot tg \beta_p = f \cdot n \cdot \sin \beta_w [1 - n^2 \sin^2 \beta_w]^{\frac{1}{2}} \quad (20)$$

$$y_1 = f \cdot n \cdot \sin \beta_w [1 - n^2 \sin^2 \beta_w]^{-\frac{1}{2}} \quad (21)$$

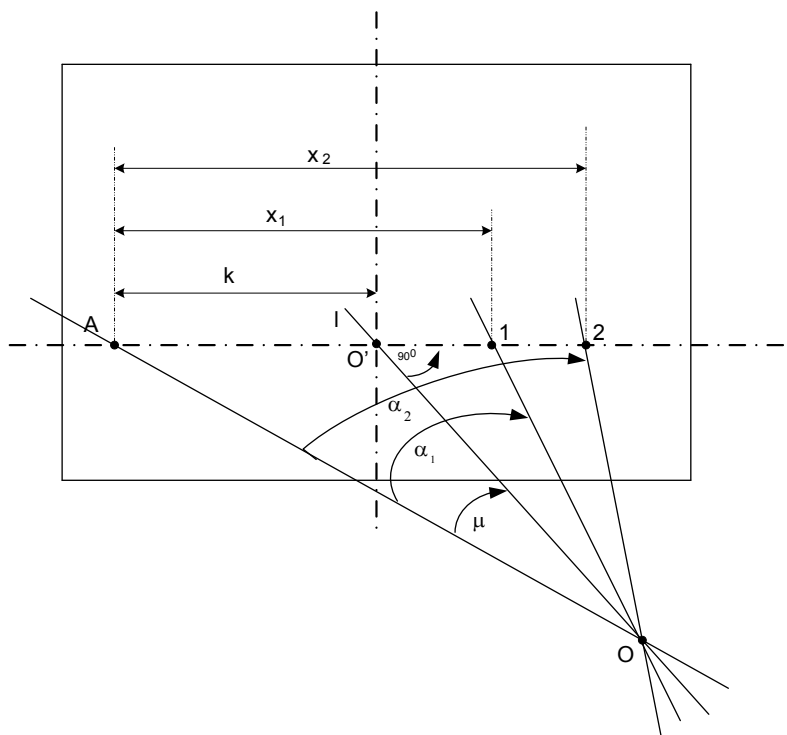
Which means that:

$$y_1 = f(f; n_w; \beta_w) \quad (22)$$

It results from equation (22) that the size of the image of the object photographed using the 'water – illuminator – air' optical system is dependent on the camera focal length (f) in the air, the refractive index in water (n_w), and angular size of the object (β_w). The focal length is a constant resulting from its construction. Very often, it is a parameter given in the list of a camera's specifications. If, however, these data do not contain this information, it can be determined using the method given in this article.

1. METODA OKREŚLANIA ODLEGŁOŚCI OBRAZOWEJ KAMERY FOTOGRAMETRYCZNEJ

Metoda polega na obliczeniu stałej kamery i długości odcinka k tj. odległości od punktu wyjściowego (A) do punktu głównego zdjęcia (O') – patrz rys. 3. Wielkość odległości obrazowej (f) i długość odcinka k wyznacza się za pomocą kątów α_1 i α_2 pomierzonych bezpośrednio w terenie oraz odciętych x_1 i x_2 pomierzonych na zdjęciu. Punkty oznaczone jako A , 1 i 2 muszą być rozmieszczone na linii horyzontu, a zdjęcie musi być wykonane przy poziomym położeniu kamery z tego samego stanowiska z którego przeprowadzono pomiar kątów α_1 i α_2 . Czyli musi być zachowany warunek prostopadłości osi optycznej kamery l do płaszczyzny terenowej P ($l \perp P$).



Rys. 3. Metoda wyznaczania parametrów orientacji wewnętrznej kamery [na podst. 4].

W układzie jak na rysunku 3, można zaobserwować trzy trójkąty. $\triangle OO'A$ związany z punktem głównym zdjęcia (O'), środkiem rzutów (O) i punktem wyjściowym (A) – Rys. 4. Kąt ostry pomiędzy prostą OA i prostą OO' ($\sphericalangle AOO'$) to kąt patrzenia na punkt wyjściowy A z punktu O (tu oznaczony jako $\sphericalangle \mu$). Odcinek oznaczony jako k to długość odcinka \overline{AO} . Natomiast f – odległość obrazowa to długość odcinka $\overline{OO'}$. Drugi trójkąt to $\triangle O1A$ związany ze środkiem rzutów, punktem wyjściowym oraz pierwszym punktem kontrolnym 1 – Rys. 5. Kąt ostry $\sphericalangle A01$ oznaczony jako $\sphericalangle \alpha_1$ należy zmierzyć podczas eksperymentu w terenie. Odcinek oznaczony jako x_1 to długość odcinka $\overline{A1}$. Trzeci trójkąt to $\triangle OA2$ związany z punktem wyjściowym, środkiem rzutów i drugim punktem kontrolnym 2 – Rys. 6. Kąt ostry $\sphericalangle A02$ oznaczony jako $\sphericalangle \alpha_2$ również należy zmierzyć podczas eksperymentu w terenie. Odcinek oznaczony jako x_2 to długość odcinka $\overline{A2}$. Przyjmując oznaczenia jak powyżej można zapisać:

1. METHOD OF DETERMINING FOCAL LENGTH IN A PHOTOGRAMMETRIC CAMERA

The aim of this method is to calculate the camera constant and the length of segment k , i.e. the distance from the starting point (A) to the main point of the photo (O') - see Figure 3. The size of focal distance (f) and the length of segment k is determined by the angles α_1 and α_2 measured directly on the ground and x_1 and x_2 measured on the image. Points labeled A , 1 and 2 must be arranged on the horizon, and the photo must be taken at a horizontal position of the camera with the same camera position from which the angles were measured. The perpendicular relation of the optical axis of the camera l to the field plane P ($l \perp P$) is a necessary condition.

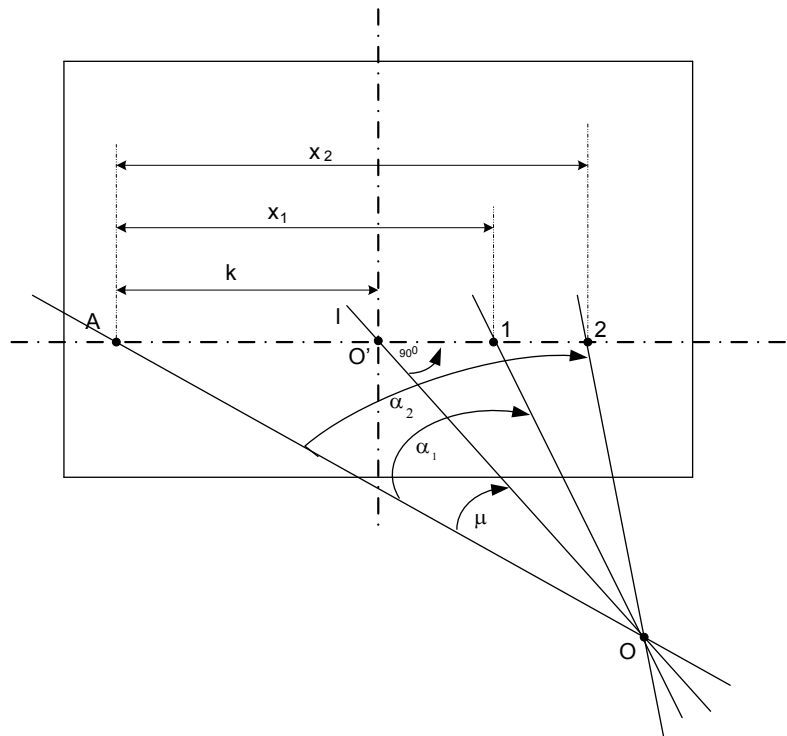
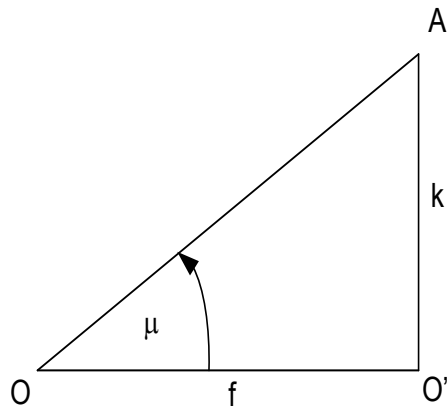


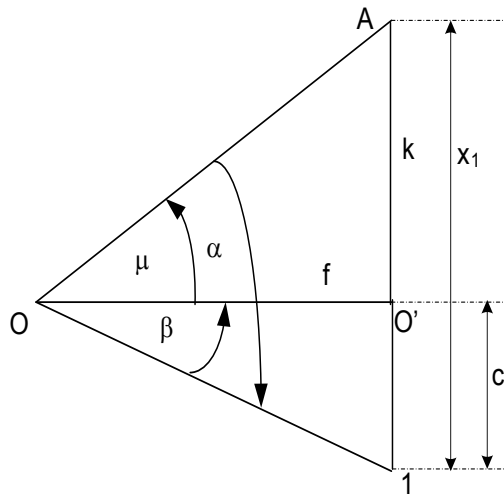
Fig. 3. Method of determining the parameters of the interior orientation of the camera [on the basis of 4].

In the system shown in Figure 3 we can see three triangles. $\triangle OO'A$ related to the main point of the image (O'), the centre of projections (O) and starting point (A) - Figure 4. The acute angle between the straight line OA and the straight line OO' ($\sphericalangle AOO'$) is the angle of looking at the starting point A from the point O (here labelled as $\sphericalangle \mu$). The line segment labelled k is the length of the segment \overline{AO} ; f - focal distance - is the length of the segment $\overline{OO'}$. The second triangle $\triangle O1A$ is related to the centre of projections, the starting point and the first control point 1 - Figure 5. The acute angle $\sphericalangle A O 1$ marked as $\sphericalangle \alpha_1$ should be measured during an experiment in the field. The segment marked as x_1 is the length of the segment $\overline{A1}$. The third triangle $\triangle O A 2$ is related to the starting point, the centre of projections, and the second control point 2 - Figure 6. The acute angle $\sphericalangle A O 2$ marked as $\sphericalangle \alpha_2$ should also be measured during an experiment in the field. This segment marked as x_2 is the length of the segment $\overline{A2}$. We can write:



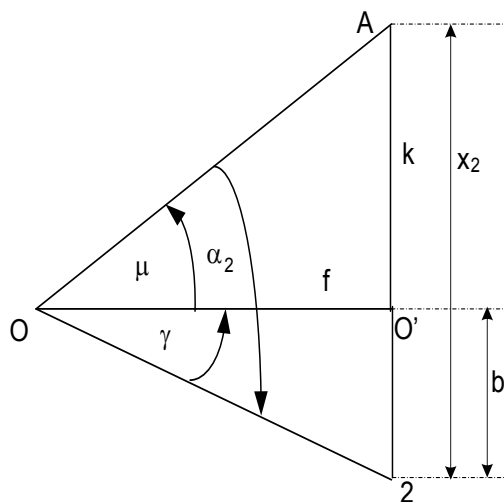
$$\tan \mu = \frac{k}{f} \quad (23)$$

Rys. 4.



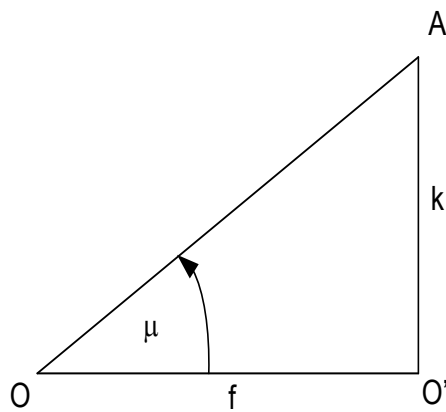
$$\begin{aligned} \beta &= \alpha_1 - \mu \\ c &= x_1 - k \\ \tan \beta &= \tan(\alpha_1 - \mu) \\ \tan(\alpha_1 - \mu) &= \frac{c}{f} = \frac{x_1 - k}{f} \\ \tan(\alpha_1 - \mu) &= \frac{x_1 - k}{f} \end{aligned} \quad (24)$$

Rys. 5.



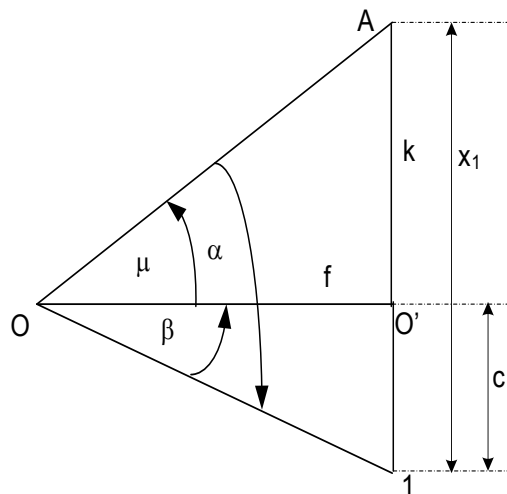
$$\begin{aligned} \gamma &= \alpha_2 - \mu \\ b &= x_2 - kb \\ \tan \gamma &= \frac{b}{f} \\ \tan \gamma &= \tan(\alpha_2 - \mu) \\ \tan(\alpha_2 - \mu) &= \frac{b}{f} = \frac{x_2 - k}{f} \\ \tan(\alpha_2 - \mu) &= \frac{x_2 - k}{f} \end{aligned} \quad (25)$$

Rys. 6.



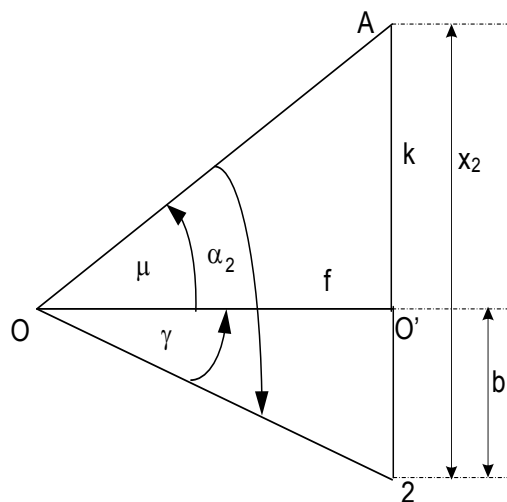
$$\tan \mu = \frac{k}{f} \quad (23)$$

Fig. 4.



$$\begin{aligned} \beta &= \alpha_1 - \mu \\ c &= x_1 - k \\ \tan \beta &= \tan(\alpha_1 - \mu) \\ \tan(\alpha_1 - \mu) &= \frac{c}{f} = \frac{x_1 - k}{f} \\ \tan(\alpha_1 - \mu) &= \frac{x_1 - k}{f} \end{aligned} \quad (24)$$

Fig. 5.



$$\begin{aligned} \gamma &= \alpha_2 - \mu \\ b &= x_2 - kb \\ \tan \gamma &= \frac{b}{f} \\ \tan \gamma &= \tan(\alpha_2 - \mu) \\ \tan(\alpha_2 - \mu) &= \frac{b}{f} = \frac{x_2 - k}{f} \\ \tan(\alpha_2 - \mu) &= \frac{x_2 - k}{f} \end{aligned} \quad (25)$$

Fig. 6.

Wyrażenie $\tan(\alpha_1 - \mu)$ można zapisać jako:

$$\tan(\alpha_1 - \mu) = \tan[\alpha_1 + (-\mu)] \quad (25)$$

Ponieważ:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (26)$$

To:

$$\tan[\alpha_1 + (-\mu)] = \frac{\sin[\alpha_1 + (-\mu)]}{\cos[\alpha_1 + (-\mu)]} \quad (27)$$

$$\sin[\alpha_1 + (-\mu)] = \sin \alpha_1 \cos(-\mu) + \cos \alpha_1 \sin(-\mu) \quad (28)$$

i

$$\cos[\alpha_1 + (-\mu)] = \cos \alpha_1 \cos(-\mu) - \sin \alpha_1 \sin(-\mu) \quad (29)$$

To równanie (27) przyjmuje postać:

$$\tan[\alpha_1 + (-\mu)] = \frac{\sin \alpha_1 \cos(-\mu) + \cos \alpha_1 \sin(-\mu)}{\cos \alpha_1 \cos(-\mu) - \sin \alpha_1 \sin(-\mu)} \quad (30)$$

Dzieląc licznik i mianownik przez wyrażenie otrzymujemy:

$$\tan[\alpha_1 + (-\mu)] = \frac{\frac{\sin \alpha_1 \cos(-\mu) + \cos \alpha_1 \sin(-\mu)}{\cos \alpha_1 \cos(-\mu)}}{\frac{\cos \alpha_1 \cos(-\mu) - \sin \alpha_1 \sin(-\mu)}{\cos \alpha_1 \cos(-\mu)}} \quad (31)$$

Co można zapisać jako:

$$\tan[\alpha_1 + (-\mu)] = \frac{\frac{\sin \alpha_1 \cdot \cos(-\mu)}{\cos \alpha_1 \cdot \cos(-\mu)} + \frac{\cos \alpha_1 \cdot \sin(-\mu)}{\cos \alpha_1 \cdot \cos(-\mu)}}{\frac{\cos \alpha_1 \cdot \cos(-\mu)}{\cos \alpha_1 \cdot \cos(-\mu)} - \frac{\sin \alpha_1 \cdot \sin(-\mu)}{\cos \alpha_1 \cdot \cos(-\mu)}} \quad (32)$$

Ponieważ:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1} &= \tan \alpha_1 & \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_1} &= 1 \\ \frac{\sin(-\mu)}{\cos(-\mu)} &= \tan(-\mu) & \frac{\cos(-\mu)}{\cos(-\mu)} &= 1 \end{aligned} \quad (33)$$

The expression $\tan(\alpha_1 - \mu)$ can be written as:

$$\tan(\alpha_1 - \mu) = \tan[\alpha_1 + (-\mu)] \quad (25)$$

Because:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (26)$$

Then:

$$\tan[\alpha_1 + (-\mu)] = \frac{\sin[\alpha_1 + (-\mu)]}{\cos[\alpha_1 + (-\mu)]} \quad (27)$$

$$\sin[\alpha_1 + (-\mu)] = \sin \alpha_1 \cos(-\mu) + \cos \alpha_1 \sin(-\mu) \quad (28)$$

and

$$\cos[\alpha_1 + (-\mu)] = \cos \alpha_1 \cos(-\mu) - \sin \alpha_1 \sin(-\mu) \quad (29)$$

This equation (27) takes the following form:

$$\tan[\alpha_1 + (-\mu)] = \frac{\sin \alpha_1 \cos(-\mu) + \cos \alpha_1 \sin(-\mu)}{\cos \alpha_1 \cos(-\mu) - \sin \alpha_1 \sin(-\mu)} \quad (30)$$

After dividing the numerator and denominator by the expression $\cos \alpha_1 \cos(-\mu)$, we get:

$$\tan[\alpha_1 + (-\mu)] = \frac{\frac{\sin \alpha_1 \cos(-\mu) + \cos \alpha_1 \sin(-\mu)}{\cos \alpha_1 \cos(-\mu)}}{\frac{\cos \alpha_1 \cos(-\mu) - \sin \alpha_1 \sin(-\mu)}{\cos \alpha_1 \cos(-\mu)}} \quad (31)$$

Which can be written as:

$$\tan[\alpha_1 + (-\mu)] = \frac{\frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1} \cdot \frac{\cos(-\mu)}{\cos(-\mu)} + \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_1} \cdot \frac{\sin(-\mu)}{\cos(-\mu)}}{\frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_1} \cdot \frac{\cos(-\mu)}{\cos(-\mu)} - \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1} \cdot \frac{\sin(-\mu)}{\cos(-\mu)}} \quad (32)$$

Because:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1} &= \tan \alpha_1 & \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_1} &= 1 \\ \frac{\sin(-\mu)}{\cos(-\mu)} &= \tan(-\mu) & \frac{\cos(-\mu)}{\cos(-\mu)} &= 1 \end{aligned} \quad (33)$$

Równanie (32) można zapisać jako:

$$\tan[\alpha_1 + (-\mu)] = \frac{\tan \alpha_1 \cdot 1 + 1 \cdot \tan(-\mu)}{1 \cdot 1 - \tan \alpha_1 \tan(-\mu)} \quad (34)$$

$$\tan[\alpha_1 + (-\mu)] = \frac{\tan \alpha_1 + \tan(-\mu)}{1 - \tan \alpha_1 \tan(-\mu)} \quad (35)$$

$$\tan[\alpha_1 + (-\mu)] = \frac{\tan \alpha_1 - \tan \mu}{1 + \tan \alpha_1 \tan \mu} \quad (36)$$

Co ostatecznie można zapisać jako:

$$\tan(\alpha_1 - \mu) = \frac{\tan \alpha_1 - \tan \mu}{1 + \tan \alpha_1 \tan \mu} \quad (37)$$

Podstawiając równanie (37) do równania (24) otrzymujemy:

$$\frac{\tan \alpha_1 - \tan \mu}{1 + \tan \alpha_1 \tan \mu} = \frac{x_1 - k}{f} \quad (38)$$

Biorąc pod uwagę równanie (32) można zapisać:

$$\frac{x_1 - k}{f} = \frac{x_1 - f \cdot \tan \mu}{f} \quad (39)$$

$$\frac{x_1 - k}{f} = \frac{x_1}{f} - \frac{\tan \mu \cdot f}{f} = \frac{x_1}{f} - \tan \mu \quad (40)$$

Co pozwala równanie (38) napisać w następującej postaci:

$$\frac{\tan \alpha_1 - \tan \mu}{1 + \tan \alpha_1 \tan \mu} = \frac{x_1}{f} - \tan \mu \quad (41)$$

Mnożąc równanie (41) przez mianownik lewej strony otrzymamy:

$$\frac{\tan \alpha_1 - \tan \mu}{1 + \tan \alpha_1 \tan \mu} \cdot (1 + \tan \alpha_1 \tan \mu) = \left(\frac{x_1}{f} - \tan \mu \right) (1 + \tan \alpha_1 \tan \mu) \quad (42)$$

$$\tan \alpha_1 - \tan \mu = \frac{x_1}{f} (1 + \tan \alpha_1 \tan \mu) - \tan \mu (1 + \tan \alpha_1 \tan \mu) \quad (43)$$

$$\tan \alpha_1 - \tan \mu = \frac{x_1 + x_1 \tan \alpha_1 \tan \mu}{f} - \tan \mu - \tan \alpha_1 \tan^2 \mu \quad (44)$$

$$\tan \alpha_1 - \tan \mu + \tan \mu + \tan \alpha_1 \tan^2 \mu = \frac{x_1}{f} + \frac{x_1 \tan \alpha_1 \tan \mu}{f} \quad (45)$$

$$\tan \alpha_1 + \tan \alpha_1 \tan^2 \mu - \frac{x_1 \tan \alpha_1 \tan \mu}{f} = \frac{x_1}{f} \quad (46)$$

The equation (32) can be written as:

$$\tan[\alpha_1 + (-\mu)] = \frac{\tan \alpha_1 \cdot 1 + 1 \cdot \tan(-\mu)}{1 \cdot 1 - \tan \alpha_1 \tan(-\mu)} \quad (34)$$

$$\tan[\alpha_1 + (-\mu)] = \frac{\tan \alpha_1 + \tan(-\mu)}{1 - \tan \alpha_1 \tan(-\mu)} \quad (35)$$

$$\tan[\alpha_1 + (-\mu)] = \frac{\tan \alpha_1 - \tan \mu}{1 + \tan \alpha_1 \tan \mu} \quad (36)$$

What finally may be written as:

$$\tan(\alpha_1 - \mu) = \frac{\tan \alpha_1 - \tan \mu}{1 + \tan \alpha_1 \tan \mu} \quad (37)$$

After substituting equation (37) with equation (24) we get:

$$\frac{\tan \alpha_1 - \tan \mu}{1 + \tan \alpha_1 \tan \mu} = \frac{x_1 - k}{f} \quad (38)$$

Taking into account equation (32), we can write:

$$\frac{x_1 - k}{f} = \frac{x_1 - f \cdot \tan \mu}{f} \quad (39)$$

$$\frac{x_1 - k}{f} = \frac{x_1}{f} - \frac{\tan \mu \cdot f}{f} = \frac{x_1}{f} - \tan \mu \quad (40)$$

Which allows us to write equation (38) in the following form:

$$\frac{\tan \alpha_1 - \tan \mu}{1 + \tan \alpha_1 \tan \mu} = \frac{x_1}{f} - \tan \mu \quad (41)$$

After multiplying equation (41) by the denominator of the left side, we get:

$$\frac{\tan \alpha_1 - \tan \mu}{1 + \tan \alpha_1 \tan \mu} \cdot (1 + \tan \alpha_1 \tan \mu) = \left(\frac{x_1}{f} - \tan \mu\right) (1 + \tan \alpha_1 \tan \mu) \quad (42)$$

$$\tan \alpha_1 - \tan \mu = \frac{x_1}{f} (1 + \tan \alpha_1 \tan \mu) - \tan \mu (1 + \tan \alpha_1 \tan \mu) \quad (43)$$

$$\tan \alpha_1 - \tan \mu = \frac{x_1 + x_1 \tan \alpha_1 \tan \mu}{f} - \tan \mu - \tan \alpha_1 \tan^2 \mu \quad (44)$$

$$\tan \alpha_1 - \tan \mu + \tan \mu + \tan \alpha_1 \tan^2 \mu = \frac{x_1}{f} + \frac{x_1 \tan \alpha_1 \tan \mu}{f} \quad (45)$$

$$\tan \alpha_1 + \tan \alpha_1 \tan^2 \mu - \frac{x_1 \tan \alpha_1 \tan \mu}{f} = \frac{x_1}{f} \quad (46)$$

Mnożąc obustronnie równanie (46) przez wyrażenie $\cot \alpha_1$ otrzymujemy:

$$\cot \alpha_1 \left[\tan \alpha_1 + \tan \alpha_1 \tan^2 \mu - \frac{x_1 \tan \alpha_1 \tan \mu}{f} \right] = \frac{x_1}{f} \cot \alpha_1 \quad (47)$$

$$\cot \alpha_1 \tan \alpha_1 + \cot \alpha_1 \tan \alpha_1 \tan^2 \mu - \frac{x_1 \cot \alpha_1 \tan \alpha_1 \tan \mu}{f} = \frac{x_1}{f} \cot \alpha_1 \quad (48)$$

Ponieważ:

$$\cot \alpha_1 \tan \alpha_1 = 1 \quad (49)$$

To:

$$1 + \tan^2 \mu - \frac{x_1}{f} \tan \mu = \frac{x_1}{f} \cot \alpha_1 \quad (50)$$

W podobny sposób równanie (25) można przekształcić do postaci:

$$1 + \tan^2 \mu - \frac{x_2}{f} \tan \mu = \frac{x_2}{f} \cot \alpha_2 \quad (51)$$

Odejmując równania (50) i (51) od siebie można otrzymać:

$$\left[1 + \tan^2 \mu - \frac{x_1}{f} \tan \mu \right] - \left[1 + \tan^2 \mu - \frac{x_2}{f} \tan \mu \right] = \left[\frac{x_1}{f} \cot \alpha_1 \right] - \left[\frac{x_2}{f} \cot \alpha_2 \right] \quad (52)$$

$$1 + \tan^2 \mu - \frac{x_1}{f} \tan \mu - 1 - \tan^2 \mu + \frac{x_2}{f} \tan \mu = \frac{x_1}{f} \cot \alpha_1 - \frac{x_2}{f} \cot \alpha_2 \quad (53)$$

$$\frac{x_2}{f} \tan \mu - \frac{x_1}{f} \tan \mu = \frac{x_1}{f} \cot \alpha_1 - \frac{x_2}{f} \cot \alpha_2 \quad (54)$$

$$\tan \mu \left(\frac{x_2}{f} - \frac{x_1}{f} \right) = \frac{x_1}{f} \cot \alpha_1 - \frac{x_2}{f} \cot \alpha_2 \quad (55)$$

Dzieląc obydwie strony równania przez wyrażenie w nawiasie otrzymamy:

$$\tan \mu = \frac{\frac{x_1}{f} \cot \alpha_1 - \frac{x_2}{f} \cot \alpha_2}{\frac{1}{f}(x_2 - x_1)} = \frac{\frac{x_1}{f} \cot \alpha_1 - \frac{x_2}{f} \cot \alpha_2}{\frac{1}{f}(x_2 - x_1)} \quad (56)$$

$$\tan \mu = \frac{x_1 \cot \alpha_1 - x_2 \cot \alpha_2}{x_2 - x_1} \quad (57)$$

Co wykorzystując równanie (23) można zapisać:

$$\frac{k}{f} = \frac{x_1 \cot \alpha_1 - x_2 \cot \alpha_2}{x_2 - x_1} \quad (58)$$

After multiplying both sides of equation (46) by the expression $\cot \alpha_1$, we get:

$$\cot \alpha_1 \left[\tan \alpha_1 + \tan \alpha_1 \tan^2 \mu - \frac{x_1 \tan \alpha_1 \tan \mu}{f} \right] = \frac{x_1}{f} \cot \alpha_1 \quad (47)$$

$$\cot \alpha_1 \tan \alpha_1 + \cot \alpha_1 \tan \alpha_1 \tan^2 \mu - \frac{x_1 \cot \alpha_1 \tan \alpha_1 \tan \mu}{f} = \frac{x_1}{f} \cot \alpha_1 \quad (48)$$

Because:

$$\cot \alpha_1 \tan \alpha_1 = 1 \quad (49)$$

then

$$1 + \tan^2 \mu - \frac{x_1}{f} \tan \mu = \frac{x_1}{f} \cot \alpha_1 \quad (50)$$

In a similar way, equation (25) can be transformed to the following form:

$$1 + \tan^2 \mu - \frac{x_2}{f} \tan \mu = \frac{x_2}{f} \cot \alpha_2 \quad (51)$$

After subtracting equation (51) from equation (50), we get:

$$\left[1 + \tan^2 \mu - \frac{x_1}{f} \tan \mu \right] - \left[1 + \tan^2 \mu - \frac{x_2}{f} \tan \mu \right] = \left[\frac{x_1}{f} \cot \alpha_1 \right] - \left[\frac{x_2}{f} \cot \alpha_2 \right] \quad (52)$$

$$1 + \tan^2 \mu - \frac{x_1}{f} \tan \mu - 1 - \tan^2 \mu + \frac{x_2}{f} \tan \mu = \frac{x_1}{f} \cot \alpha_1 - \frac{x_2}{f} \cot \alpha_2 \quad (53)$$

$$\frac{x_2}{f} \tan \mu - \frac{x_1}{f} \tan \mu = \frac{x_1}{f} \cot \alpha_1 - \frac{x_2}{f} \cot \alpha_2 \quad (54)$$

$$\tan \mu \left(\frac{x_2}{f} - \frac{x_1}{f} \right) = \frac{x_1}{f} \cot \alpha_1 - \frac{x_2}{f} \cot \alpha_2 \quad (55)$$

After dividing both sides of the equation by the expression in brackets, we get:

$$\tan \mu = \frac{\frac{x_1}{f} \cot \alpha_1 - \frac{x_2}{f} \cot \alpha_2}{\frac{1}{f}(x_2 - x_1)} = \frac{\frac{x_1}{f} \cot \alpha_1 - \frac{x_2}{f} \cot \alpha_2}{\frac{1}{f}(x_2 - x_1)} \quad (56)$$

$$\tan \mu = \frac{x_1 \cot \alpha_1 - x_2 \cot \alpha_2}{x_2 - x_1} \quad (57)$$

Which, using equation (23), can be written as:

$$\frac{k}{f} = \frac{x_1 \cot \alpha_1 - x_2 \cot \alpha_2}{x_2 - x_1} \quad (58)$$

Wtedy:

$$\frac{k(x_2 - x_1)}{f} = x_1 \cot \alpha_1 - x_2 \cot \alpha_2 \quad (59)$$

$$k(x_2 - x_1) = (x_1 \cot \alpha_1 - x_2 \cot \alpha_2) f \quad (60)$$

Wówczas równanie na odległość obrazową kamery – głębokość tławą przyjmuje następującą postać:

$$f = \frac{k(x_2 - x_1)}{x_1 \cot \alpha_1 - x_2 \cot \alpha_2} \quad (61)$$

gdzie:

- f - odległość obrazowa,
- x_1 - odległość pomiędzy punktem wyjściowym A i punktem 1 zmierzona na zdjęciu (Rys. 3),
- x_2 - odległość pomiędzy punktem A i punktem 2 zmierzona na zdjęciu,
- α_1 - kąt pomiędzy prostą SA i S1,
- α_2 - kąt pomiędzy prostą SA i S2

Równanie (61) pozwala na doświadczalne wyznaczenie odległości obrazowej kamery. Opis powyższego doświadczenia i jego wyniki będzie przedmiotem kolejnej publikacji.

Then:

$$\frac{k(x_2 - x_1)}{f} = x_1 \cot \alpha_1 - x_2 \cot \alpha_2 \quad (59)$$

$$k(x_2 - x_1) = (x_1 \cot \alpha_1 - x_2 \cot \alpha_2)f \quad (60)$$

Then the equation for the focal length of the camera (background depth) takes the following form:

$$f = \frac{k(x_2 - x_1)}{x_1 \cot \alpha_1 - x_2 \cot \alpha_2} \quad (61)$$

gdzie:

- f - focal length,
- x_1 - distance between the starting point A and point 1 measured on the photograph (Fig. 3),
- x_2 - distance between point A and point 2 measured on the photograph,
- α_1 - angle between straight lines SA and S1,
- α_2 - angle between straight lines SA and S2

Equation (61) allows an experimental determination of the focal length of the camera. The description of this experiment and its results will be the subject of another publication.

LITERATURA/BIBLIOGRAPHY:

1. Beker L., Kaczyński R.: „Fotografia i fotogrametria podwodna”; Wyd. Naukowo-Techniczne, 1985 rok, ISBN 83-204-0669-2,
2. Dorozhynski O., Wrona T.: „Podstawy fotogrametrii”; Wyd. Politechniki Lwowskiej, 2003 rok, ISBN 966-553-333-9,
3. Kurczyński Zd., Preuss R.: „Podstawy fotogrametrii”; Wyd. Politechnik Warszawskiej, 2000 rok, ISBN 83-7207-164-0,
4. Sitek Zb.: „Fotogrametria z fotografią techniczną”; Wyd. AGH Kraków 1972 rok.