

## Ryszard Kłos

kmdr rez. dr hab. inż. Ryszard Kłos, prof. nadzw. AMW  
Akademia Marynarki Wojennej im. Bohaterów Westerplatte  
Zakład Technologii Prac Podwodnych  
81 – 103 Gdynia 3, ul. Śmidowicza 69  
tel.: +58 626 27 46, fax.: +58 626 27 61

### JEDNOTKANKOWY MODEL DEKOMPRESJI OGRANICZONEJ PROCESEM DYFUZJI

*Artykuł jest kontynuacją przeglądu teorii deterministycznych i statystycznych dotyczących problematyki dekompresyjnej publikowanych na łamach Polish Hyperbaric Research.*

*Pomimo doniosłości teorii opracowanej przez H.V. Hempelmana jej podstawy teoretyczne nie były szeroko publikowane. W artykule podano wyprowadzenie algebraicznych modeli matematycznych stanowiących podstawę metody Hempelmana służącej do kalkulacji dekompresji.*

**Słowa kluczowe:** dekompresja, teoria H.V Hempelmana, algebraiczne modele matematyczne.

### SINGLE-TISSUE MODEL OF DIFFUSION LIMITED DECOMPRESSION

*The paper is the continuation of the review of deterministic and statistical theories of decompression published in the pages of Polish Hyperbaric Research. Despite the importance of the theory developed by H.V. Hempelman, its theoretical foundations have not been widely published. The article describes the steps to derive algebraic mathematical models underlying Hempelman's method used to calculate decompression.*

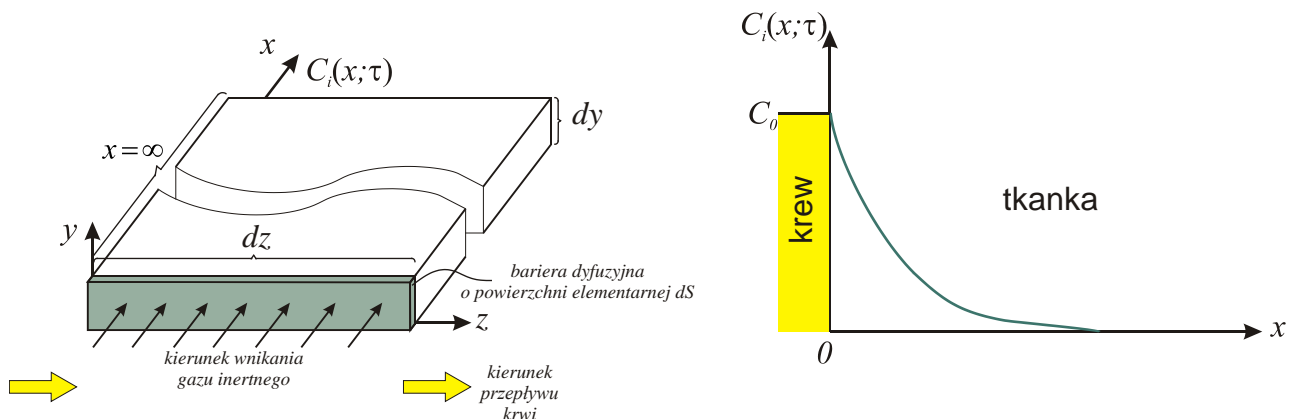
**Key words:** decompression, H.V Hempelman theory, algebraic mathematical model.

## WSTĘP

Model z ograniczoną perfuzją, zakładający doskonałą dyfuzję<sup>1</sup> wewnątrz tkanki teoretycznej i uwzględniający jedynie opór związany z wnikaniem gazu inertnego do naczyń krwionośnych jest adekwatny pod warunkiem osiągnięcia stanu równowagi<sup>2</sup>. Procesem dyfuzji gazu inertnego zajmował się *H. V. Hempelman*. Przyjął on, że najczęstszymi objawami *DCS* są bóle stawowe<sup>3</sup> lokalizowane w obrębie tkanki łącznej. Groźniejsze objawy *DCS* są najczęściej poprzedzane objawami *bends* lub występują łącznie z nimi. Wynikałoby stąd, że ten rodzaj tkanki jest najbardziej wrażliwy na obciążenia dekompresyjne. Przyjmując tkankę łączną, jako tkankę wiodącą dla całego procesu dekompresji można modelowanie uprościć w stosunku do modeli neo-haldanowskich, gdzie kolejność tkanek pod względem przesyceń ulega zmianie<sup>4</sup>. Stąd w różnych fazach dekompresji należy znaleźć tkankę wiodącą i dla niej obliczać szybkość bezpiecznej dekompresji.

W modelu *Hempelmana* występuje jedna tkanka wiodąca dla całego procesu dekompresji – tkanka łączna. Zatem według teorii *Hempelmana* ustalenie warunków bezpiecznej dekompresji dla tkanki łącznej pozwoliłoby na ochronę nurków przed skutkami *DCS* w ogóle (*Hempelmana H. V.*, 1975).

Tkanka łączna podobnie jak tłuszczowa jest stosunkowo słabo ukrwiona. Na podstawie małej perfuzji tkanki tłuszczowej wnioskowano o jej negatywnym wpływie<sup>5</sup> na proces dekompresji na gruncie teorii neo-haldanowskich.



Rys. 1. Model geometryczny elementarnego wycinka tkanki chrzęstnej, jako limitującej dekompresję procesami dyfuzji gazów inertnych

<sup>1</sup>obrazowo doskonałą dyfuzję ujmuje się jako jednolitość stężenia gazu w tkance, przypisując uproszczony model doskonałego mieszania

<sup>2</sup>stanu stacjonarnego

<sup>3</sup>bends

<sup>4</sup>rozumie się przez to zmianę tkanki wiodącej dla procesu dekompresji

<sup>5</sup>negatywny wpływ tkanki tłuszczowej na gruncie teorii neo-haldanowskich wynika z dwóch przesłanek: działania tkanki, jako swoistego akumulatora gazu inertnego w organizmie z powodu znacznie lepszej rozpuszczalności azotu w tkance tłuszczowej niż innych tkankach miękkich oraz słabego jej ukrwienia, które powoduje opory w jego eliminacji z całej masy tkanki tłuszczowej przez wymywanie azotu przez krew tętniczą

## INTRODUCTION

A model with a limited perfusion, assuming a perfect diffusion<sup>1</sup> inside the theoretical tissue and taking into account only the resistance connected with the process of inert gas permeating blood vessels, is adequate providing there is an equilibrium<sup>2</sup> achieved.

H.V. Hempelman dealt with inert gas diffusion. He accepted that the most common symptoms of *DCS* are joint pains<sup>3</sup> localized within the connective tissue. The more dangerous symptoms of *DCS* are usually preceded by, or appear simultaneously to the symptoms called *bends*. What results from this fact is that this type of tissue is most sensitive to the decompression load. Accepting the connective tissue as the leading tissue in the decompression, we can simplify the modelling in relation to neo-Haldane models, where the sequence of tissues in terms of supersaturation change<sup>4</sup>. Thus, in various stages of decompression, the leading tissue must be found and the time of safe decompression for it must be calculated.

In Hempelman's model, there is a leading tissue for the whole process of decompression – the connective tissue. Thus, according to Hempelman's theory, establishing the conditions for safe decompression of the connective tissue would allow divers to protect themselves against the effects of *DCS* in general (Hempelman H. V., 1975).

The connective tissue, like the fatty tissue, is relatively poorly supplied with blood. On the basis of a small fatty tissue perfusion, it was concluded that it has a negative impact<sup>5</sup> on the process of decompression seen from the neo-Haldane perspective. Using the same argument, Hempelman drew another conclusion looking for the reason for limited gas exchanges in diffusion processes<sup>6</sup>.

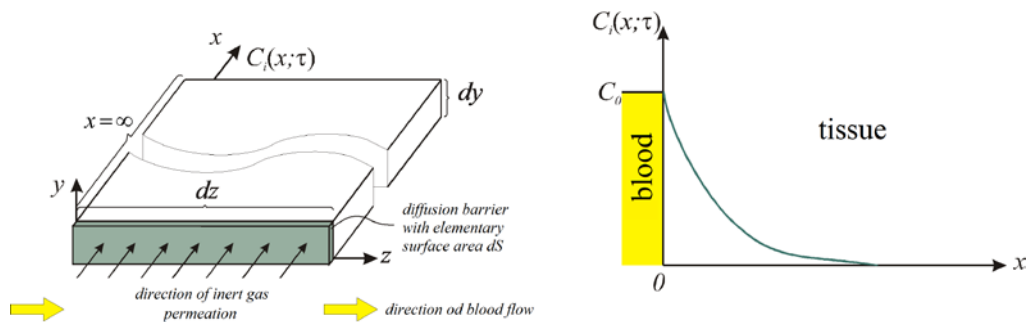


Fig.1 Geometric model of an elementary segment of the cartilaginous tissue limiting decompression through inert gas diffusion

<sup>1</sup> perfect diffusion is defined as the uniformity of gas concentration in the tissue, with a simplified model of perfect mixing

<sup>2</sup> of stationary state

<sup>3</sup> bends

<sup>4</sup> it is understood as a change of the leading tissue in the process decompression

<sup>5</sup> the negative effect of the fatty tissue, according to the neo-Haldane theory, results from two factors: tissue actions, as a kind of inert gas battery in the body due to a much greater solubility of nitrogen in fat than other soft tissues, and its low blood supply, which causes resistance in its elimination from the whole fatty tissue mass by leaching nitrogen by the arterial blood

<sup>6</sup> if diffusion was very fast, then perfusion would be of secondary importance, since inert gas would spread fast enough to reach the perivascular space as soon as its party from this region permeates the bloodstream

Na podstawie tej samej przesłanki, mówiącej o złym ukrwieniu tkanki łącznej, *Hempelmann* wysnuł inny wniosek, upatrujący przyczyny ograniczonej wymiany gazowej w procesach dyfuzyjnych<sup>6</sup>. Stąd takie podejście nazwano jednostkankowym modelem dekompresji przy ograniczonej dyfuzji gazu inertejnego<sup>7</sup>.

Podejście *Hempelmana* ograniczało się do wybrania tylko jednej tkanki wiódącej oraz modelu zakładającego ograniczoną dyfuzję gazów inertejnych na granicy tej tkanki i krwi, jako przyczynę powstawania przesycen prowadzących do *DCS*. Jako wartość obciążenia dekompresyjnego przyjął on objętość/stężenie gazu inertejnego w tkance w stosunku do wyznaczonej doświadczalnie objętości/stężenia krytycznej.

Model z ograniczoną dyfuzją dla tkanki łącznej nie uwzględniał skomplikowanej jej geometrii. Modelem geometrycznym, który posłużył do rozważań natury fizycznej zjawiska, był rozciągający się prawie nieskończenie płaski, nieperfundowany wycinek elementarny tkanki łącznej ograniczony z jednej strony prostopadłą ścianą przyległego naczynia krwionośnego<sup>8</sup> – rys.1.

Zakładając, że prężność gazów inertejnych w naczyniach tętnicznych i żylnych jest powiązana funkcyjnie z ich ciśnieniem cząstkowym w pęcherzykach płucnych oraz zakładając dodatkowo, że istnieje tylko jedna, opisana wyżej tkanka teoretyczna limitująca proces dekompresji, to strumień eliminowanego gazu inertejnego odniesiony do płaszczyzny prostopadłej do naczynia krwionośnego będzie ograniczany, przede wszystkim, przez proces dyfuzji.

#### METODA

Kiedy prężności/stężenia gazów inertejnych po stronie tętnicznej spadają, to zawarte w tkance gazy inertejne<sup>9</sup> usuwane są poprzez krew żylną z części tkanki przyległej do naczyń krwionośnych. Gazy te ulegają także redystrybucji w głąb tkanki<sup>10</sup> w przypadku niższych poziomów wysycenia<sup>11</sup> przyległych do tego wycinka regionów – rys.1.

Innymi słowy, gazy inertejne z miejsc, w których występuje ich większa koncentracja przemieszczają się do otaczających je naczyń krwionośnych jak również do innych regionów, w których ich koncentracja jest mniejsza. Ruch ten opisywany jest poprzez mechanizm dyfuzyjny<sup>12</sup>, który modelowany jest matematycznie przez dwa prawa *Ficka*.

<sup>6</sup> gdyby dyfuzja była bardzo szybka to perfuzja miałaby znaczenie drugorzędne, gdyż gaz inertejny rozprzestrzeniałby się na tyle szybko, aby dotrzeć do przestrzeni okołonaczyniowej zaraz po tym jak jego partia z tego rejonu przeniknie do krwioobiegu

<sup>7</sup>single tissue, diffusion limited model

<sup>8</sup>z fizjologicznego punktu widzenia, granicą styku jest błona naczyniowa torebki stawowej

<sup>9</sup>np. azot

<sup>10</sup>zamiast przepływać jedynie w kierunku naczynia krwionośnego celem ich eliminacji z organizmu

<sup>11</sup>saturacji

<sup>12</sup>pod pojęciem dyfuzji rozumie się tutaj proces samorzutnego rozprzestrzeniania się cząsteczek w danym ośrodku, będący konsekwencją chaotycznych zderzeń cząsteczek dyfundującej substancji między sobą jak i z cząsteczkami otaczającego ją ośrodka, prowadzący do wyrównywania stężenia każdej z dyfundujących substancji w całym układzie

Such an approach is hence called a single-tissue decompression model, with limited diffusion of inert gas. Hempelman's approach was limited to selecting only one leading tissue and a model assuming limited diffusion of inert gases on the border of the tissue and blood as the cause of supersaturations leading to DCS. As the load value, Hempelman chose the volume / concentration of the inert gas in the tissue in relation to the experimentally determined critical volume / concentration.

The model with limited diffusion of the connective tissue did not take into account the complexity of its geometry. The geometrical model that was used to study the physical phenomena, was an almost infinitely extending, flat, and unperfused elementary section of the connective tissue, limited from one side by a perpendicular wall of the adjacent blood vessel<sup>7</sup> - Figure 1.

If we assume that the pressure of inert gases in arterial and venous vessels is related functionally to their partial pressure in alveoli, and that there is only one, described above, theoretical tissue limiting decompression, then the flux of the inert gas which is eliminated, related to a surface perpendicular to the blood vessel, will be reduced primarily through the process of diffusion.

## METHOD

When the pressure / concentration of inert gases on the arterial side fall, the inert gases<sup>8</sup> from tissues are removed through the venous blood from the tissues adjacent to blood vessels. These gases are also subject to redistribution into the tissue<sup>9</sup> at lower saturation levels of regions adjacent to this segment – Figure 1. In other words, the inert gases from places where there is a greater concentration move to the surrounding blood vessels, as well as to other regions where their concentration is lower. This movement is described by the diffusion mechanism<sup>10</sup>, which is modelled mathematically by *two Fick's laws*.

## DIFFUSION

On the basis of observing diffusion processes, it can be concluded that a diffusive mass flow, expressed as a spatial molar flux  $\bar{J}_i$  through an elementary, perpendicular to the direction of the flux,  $dS$  surface, and tending to level out the concentration  $\bar{C}_i$  of the inert gas  $i$  in the tissue, is directly proportional to the concentration gradient  $\nabla \bar{C}_i$ <sup>11</sup>:  $\bar{J}_i(\tau) = -\bar{D}_i \times \nabla \bar{C}_i(\tau)$ , where:  $\bar{D}_i$  is a diffusion coefficient<sup>12</sup>. Concentration gradient  $\nabla$  is formally a vector denoted in the field theory as  $\nabla \bar{C}_i \equiv \text{grad } \bar{C}_i$ . The minus sign results from the fact that the direction of the flow from larger to smaller concentrations was taken into account.

<sup>7</sup> from a physiological point of view, vascular membrane of joint capsule is the point of contact

<sup>8</sup> e.g. nitrogen

<sup>9</sup> instead of only flowing in the direction of the blood vessel, in order to eliminate them from the body

<sup>10</sup> the notion of diffusion process is understood here as a spontaneous spread of molecules in a given medium, which is a consequence of chaotic collisions of molecules of a diffusing substance between each other as

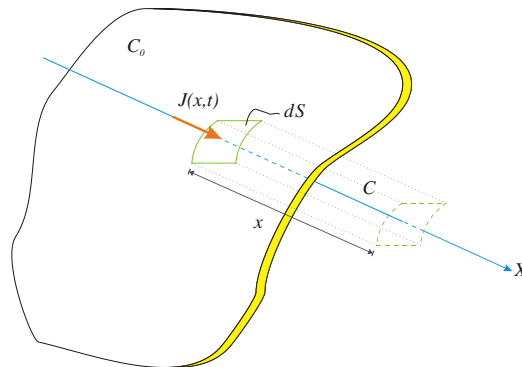
well as molecules of the surrounding medium, leading to the equalization of concentrations of each diffusible substance in the whole system

<sup>11</sup> nabla is the gradient operator;  $\nabla \equiv \bar{\nabla} \equiv \text{grad} = \bar{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \bar{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z}$

<sup>12</sup> diffusion coefficient is a function of the type of gas  $i$ , temperature  $T$ , viscosity  $\eta$  and the type of the following relation  $\Omega$ :  $D = f(i, T, \eta, \Omega)$

## DYFUZJA

Na podstawie obserwacji procesów dyfuzyjnych można postulować, że dyfuzyjny przepływ masy wyrażony przestrzennym strumieniem molowym  $\bar{J}_i$  przez elementarną, prostopadłą do kierunku strumienia powierzchnię  $dS$ , zmierzający do wyrównania stężenia  $\bar{C}_i$  gazu inertnego  $i$  w tkance, jest wprost proporcjonalny do gradientu stężeń  $\nabla \bar{C}_i$ <sup>13</sup>:  $\bar{J}_i(\tau) = -\bar{D}_i \times \nabla \bar{C}_i(\tau)$ , gdzie:  $\bar{D}_i$  jest współczynnikiem dyfuzji<sup>14</sup>. Gradient stężeń  $\nabla$ <sup>15</sup> formalnie jest wektorem<sup>16</sup> oznaczanym w teorii pola jako:  $\nabla \bar{C}_i \equiv \text{grad } \bar{C}_i$ . Znak minus wiąże się z tym, że uwzględniono kierunek przepływu od stężenia większego do mniejszego. Iloczyn  $\nabla \bar{C}_i$  dla stężenia jednorodnego jest skalar, formalnie nazywanym w teorii pola dywergencją<sup>17</sup> i oznaczanym, jako:  $\text{div } \bar{C}_i$ . Stąd można w sposób uproszczony dla wyróżnionego kierunku  $x$  zapisać zależność nazywaną *pierwszym prawem Ficka* (Pigoń K., Ruziewicz Z., 2007):



Rys.2. Strumień  $J_i$  jako liczba moli  $\partial n_i$  przepływająca w jednostce czasu  $\partial \tau$  przez elementarną, prostopadłą do kierunku  $x$  powierzchnię  $dS$ :  $J_i = \frac{1}{dS} \cdot \frac{\partial n_i}{\partial \tau}$

$$J_i(x, \tau) = -D_i \cdot \frac{\partial C_i(x, \tau)}{\partial x} \quad \left| \quad T = \text{idem} \wedge \eta = \text{idem} \right. \quad (1)$$

- gdzie:  $J_i$  – strumień dyfundującego gazu  $i$  [ $\text{mol} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ ]  
 $D_i$  – współczynnik dyfuzji gazu  $i$ <sup>18</sup> [ $\text{mol} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s} \cdot \frac{\text{m}^3 \cdot \text{mol}}{\text{mol}} = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ]  
 $C_i$  – stężenie gazu  $i$  [ $\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$ ]  
 $x$  – kierunek wzdłuż osi  $x$  [m]  
 $T$  – Temperatura [K]  
 $\eta$  – lepkość<sup>19</sup> [ $\text{Pa} \cdot \text{s}$ ]

<sup>13</sup> nabla  $\nabla$  jest operatorem gradientu;  $\nabla \equiv \bar{\nabla} \equiv \text{grad} = \bar{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \bar{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z}$

<sup>14</sup> współczynnik dyfuzji jest funkcją rodzaju gazu  $i$ , temperatury  $T$ , lepkości  $\eta$  oraz rodzaju układu  $\Omega$ :  $D = f(i, T, \eta, \Omega)$

<sup>15</sup> operator Hamiltona

<sup>16</sup> więc można utworzyć z jego udziałem iloczyn skalarny bądź wektorowy

<sup>17</sup> dywergencja to operator różniczkowy, który danemu polu wektorowemu przypisuje pole skalarne; jeśli operator gradientu tworzy iloczyn wektorowy to produkt tej operacji nazywany jest rotacją lub wirowością i oznaczany, jako **rot** (Karaśkiewicz E., 1976)

<sup>18</sup> współczynnik dyfuzji  $D_i$  równy jest liczbowo liczbie moli  $n$  składnika dyfundującego  $i$  przez jednostkową powierzchnię  $S$  w jednostce czasu  $\tau$ , przy jednostkowym gradientie stężenia  $C$  powodującym dyfuzję

<sup>19</sup> lepkość dynamiczna wyraża stosunek naprężeń ścinających do szybkości ścinania [ $\text{Pa} \cdot \text{s}$ ], lepkość kinematyczna, nazywana też kinetyczną, jest stosunkiem lepkości dynamicznej do gęstości płynu [ $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ]

The product  $\nabla C_i$  for a homogeneous concentration is a scalar, formally called divergence<sup>13</sup> in the field theory and marked as  $\text{div } C_i$ . Thus we can, in a simplified way and for a particular direction  $x$ , formulate a relation called *Fick's First Law* (Pigoń K., Ruziewicz Z., 2007):

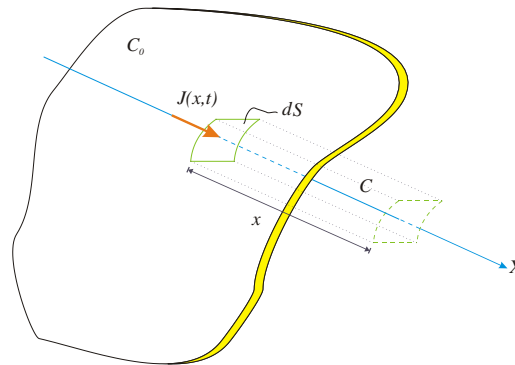


Fig.2  $J_i$  flux as the number of moles  $\partial n_i$  flowing in a unit time  $\partial \tau$  through an elementary  $dS$  surface perpendicular to direction  $x$ :  $J_i = \frac{1}{dS} \cdot \frac{\partial n_i}{\partial \tau}$

$$J_i(x, \tau) = -D_i \cdot \frac{\partial C_i(x, \tau)}{\partial x} \quad \left| \quad T = \text{idem} \wedge \eta = \text{idem} \right. \quad (1)$$

- where:
- $J_i$  – diffusion flux  $i$  [ $\text{mol} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ ]
  - $D_i$  – diffusion coefficient (diffusivity)  $i$ <sup>14</sup> [ $\text{mol} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s} \cdot \frac{\text{m}^3 \text{mol}}{\text{mol}} = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ]
  - $C_i$  – gas concentration  $i$  [ $\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$ ]
  - $x$  – direction along the  $x$  axis [ $\text{m}$ ]
  - $T$  – temperature [K]
  - $\eta$  – viscosity<sup>15</sup> [ $\text{Pa} \cdot \text{s}$ ]

Diffusion coefficient  $D_i$  refers to the ability to diffuse gas particles  $i$  under the influence of the concentration gradient  $\nabla C_i$ .

$J_i$  flux can be expressed as the number of moles<sup>16</sup>  $\partial n_i$  flowing in a time unit  $\partial \tau$  through an elementary  $dS$  surface, perpendicular to direction  $x$ :  $J_i = \frac{1}{dS} \cdot \frac{\partial n_i}{\partial \tau}$  (Figure 2). Generally, this equation can be written as a scalar product:  $\vec{J}_i = \frac{1}{V} \cdot \frac{\partial n_i}{\partial \tau}$ .

<sup>13</sup>divergence is a differential operator, which assigns scalar field to each vector field; if the gradient operator creates a vector product, then the product of this operation is called rotation or vorticity and denoted as *rot* (Karaśkiewicz E., 1976)

<sup>14</sup>diffusion coefficient  $D_i$  is numerically equal to the number of moles  $n$  of a component  $i$  diffusing through an elementary surface  $S$  in time unit  $\tau$ , with an elementary concentration gradient  $C$  causing diffusion

<sup>15</sup>dynamic viscosity is the ratio of shear stress to shear rate [ $\text{Pa} \cdot \text{s}$ ], kinematic viscosity, also known as kinetic, is the ratio of dynamic viscosity to the density of fluid [ $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ]

<sup>16</sup>it can also be expressed by the mass or volume in conjunction with the units in which  $C_i$  was expressed

Współczynnik dyfuzji  $D_i$  oznacza zdolność dyfundowania cząstek gazu  $i$  pod wpływem gradientu stężenia  $\nabla C_i$ .

Strumień  $J_i$  można wyrazić poprzez liczbę moli<sup>20</sup>  $\partial n_i$  przepływającą w jednostce czasu  $\partial \tau$  przez elementarną, prostopadłą do kierunku  $x$  powierzchnię  $dS$ :  $J_i = \frac{1}{dS} \cdot \frac{\partial n_i}{\partial \tau}$  – rys.2. Uogólniając, równanie to można zapisać, jako iloczyn skalarny:  $\bar{J}_i = \frac{1}{V} \cdot \frac{\partial n_i}{\partial \tau}$ . Łącząc je z ogólną postacią *pierwszego prawa Ficka* w formie iloczynu skalarnego:  $\bar{J}_i = -\bar{D}_i \cdot \nabla C_i(\tau)$ , można zapisać iloczyn skalarny:  $\frac{1}{V} \cdot \frac{\partial \bar{C}}{\partial \tau} = (\bar{D} \cdot \nabla) \cdot \bar{C}$ . Przekształcając go do postaci:  $\frac{\partial \bar{C}}{\partial \tau} = \nabla(\bar{D} \cdot \nabla) \cdot \bar{C}$  oraz upraszczając poprzez założenie izotropii<sup>21</sup> współczynnika dyfuzji dla jednorodnej tkanki  $\bar{D} \equiv D$ , można uprościć tę zależność do postaci:  $\frac{\partial \bar{C}}{\partial \tau} = D \cdot (\nabla \cdot \nabla) \cdot \bar{C} = D \cdot \nabla^2 \cdot \bar{C}$ . Przyjmując izotropię rozkładu stężenia można zapisać *drugie prawo Ficka* pod najczęściej spotykaną postacią:

$$\frac{\partial C_i}{\partial \tau} = D_i \cdot \frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2} \quad | \quad T = idem \wedge \eta = idem \quad (2)$$

gdzie:

$\tau$  – czas [s]  
 $C_i \equiv C_i(x, \tau)$  – stężenie gazu inertnego  $i$  po czasie  $\tau$  i w odległości  $x$  od granicy faz pomiędzy naczyniem krwionośnym i tkanką

Modułem napędowym procesu dyfuzji gazu inertnego w tkankach w warunkach hiperbarycznych najczęściej jest zmiana prężności<sup>22</sup>  $\Pi$ . Ogólnie ujmując model matematyczny dla takiego procesu można przyjąć, że zmiana ta jest różnicą prężności gazu w tkance  $\pi$  odniesioną do ciśnienia referencyjnego, jakim najczęściej jest ciśnienie otoczenia  $p_\alpha$ :  $\Pi = \pi - p_\alpha$ . Stąd drugie prawo Ficka dla modułu napędowego, jakim jest różnica ciśnień cząstkowych/prężności  $\Pi$  można zapisać analogicznie do (2), jako (Wienke B.R., 1989):  $\frac{\partial \Pi}{\partial \tau} = D \cdot \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}$ .

### MODEL MATEMATYCZNY PROCESU DYFUZJI

Omawiając sytuację problemową związaną z jednotkankowym modelem dekompresji ograniczonej procesem dyfuzji najczęściej przyjmuje się rozwiązanie podobnie modelowanego problemu dla transportu ciepła. Opisane w postaci równania różniczkowego rozwiązanie zwane jest pod nazwą *równania Carslawa i Jaegera*<sup>23</sup> (Carslaw H.S., Jaeger J.C., reprint 2008). Dla warunków brzegowych  $C_i(x, \tau = 0) = 0 \wedge C_i(x = 0, \tau) = C_0$  dla stężenia  $C_i$  gazu inertnego  $i$  w funkcji odległości  $x$  i czasu  $\tau$  dla modelu wiodącej tkanki teoretycznej przedstawionej na rys.1 rozwiązanie równania różniczkowego dla *drugiego prawa Ficka* (2) przyjęło się także nazywać *równaniem Carslawa i Jaegera* (Gernhardt M. L., 1991).

Model fizyczny sytuacji problemowej polegającej na zobrazowaniu dyfuzji gazu  $B$  rozpuszczonego w wolno przepływającej przez cylinder cieczy  $A$ , uwalniany do przestrzeni ponad swobodnym jej lustrem, wypełnionym jej parą nasyconą pokazano na rys.3 (Kembłowski Z., Michałowski S., Strumiłło Cz. Zarzyski R., 1985).

<sup>20</sup> można wyrazić też przez masę lub objętość w powiązaniu z jednostkami, w jakich wyrażono  $C_i$

<sup>21</sup> izotropowość (izotropia) to niezależność od kierunku; przeciwieństwem tego pojęcia jest anizotropia

<sup>22</sup> różnica stężeń jest podstawowym modułem napędowym procesu dyfuzji przy dekompresji izobarycznej

<sup>23</sup> choć powołali się oni na obliczenia wykonane przez Graya (Gray M.C., 1925)



Combining them with the general form of *Fick's First Law* in the form of a scalar product:  $\bar{J}_i = -\bar{D}_i \cdot \nabla C_i(\tau)$ , we can write the scalar product:  $\frac{\partial \bar{C}}{\partial \tau} = (\bar{D} \cdot \nabla) \cdot \bar{C}$ . Having transformed it into the following form:  $\frac{\partial \bar{C}}{\partial \tau} = \nabla(\bar{D} \cdot \nabla) \cdot \bar{C}$  and simplified it by assuming isotropy<sup>17</sup> of the diffusion coefficient for a homogeneous tissue  $\bar{D} \equiv D$ , we can simplify this relation to the following form:  $\frac{\partial \bar{C}}{\partial \tau} = D \cdot (\nabla \cdot \nabla) \cdot \bar{C} = D \cdot \nabla^2 \cdot \bar{C}$ . When we assume the isotropy of the concentration distribution, *Fick's Second Law*, in its most common form, can be written down:

$$\frac{\partial C_i}{\partial \tau} = D_i \cdot \frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2} \quad | \quad T = idem \wedge \eta = idem \quad (2)$$

where:  $\tau$  – time [s]  
 $C_i \equiv C_i(x, \tau)$  – inert gas concentration  $i$  after time  $\tau$   $i$  and in distance  $x$  from the border between a blood vessel and tissue

Pressure change<sup>18</sup>  $\Pi$  is most frequently the drive module of inert gas diffusion in the tissues under hyperbaric conditions. If we accept a mathematical model for such a process, it can be assumed that this change is the difference in gas pressure in tissue  $\pi$  related to the reference pressure, which is usually the pressure of the environment  $p_\alpha$ :  $\Pi = \pi - p_\alpha$ . Hence, *Fick's Second Law* for the drive module, i.e. the difference in (partial) pressure  $\Pi$  can be written down analogously to (2), as (Wienke B.R., 1989):  $\frac{\partial \Pi}{\partial \tau} = D \cdot \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2}$ .

#### MATHEMATICAL MODEL OF DIFFUSION

While discussing the problematic situation related to the single-tissue decompression model limited by a diffusion process, a similarly modeled solution to the problem with conduction of heat is taken. The solution is described in the form of differential equation and is called *Carslaw and Jaeger equation*<sup>19</sup> (Carslaw H.S., Jaeger J.C., reprint 2008). For the boundary conditions  $C_i(x, \tau = 0) = 0 \wedge C_i(x = 0, \tau) = C_0$  and for the concentration  $C_i$  of inert gas  $i$  in distance  $x$  and time  $\tau$  of a model of theoretical leading tissue presented in Figure 1, the solution of the differential equation for *Fick's Second Law* is also called *Carslaw and Jaeger equation* (Gernhardt M. L., 1991).

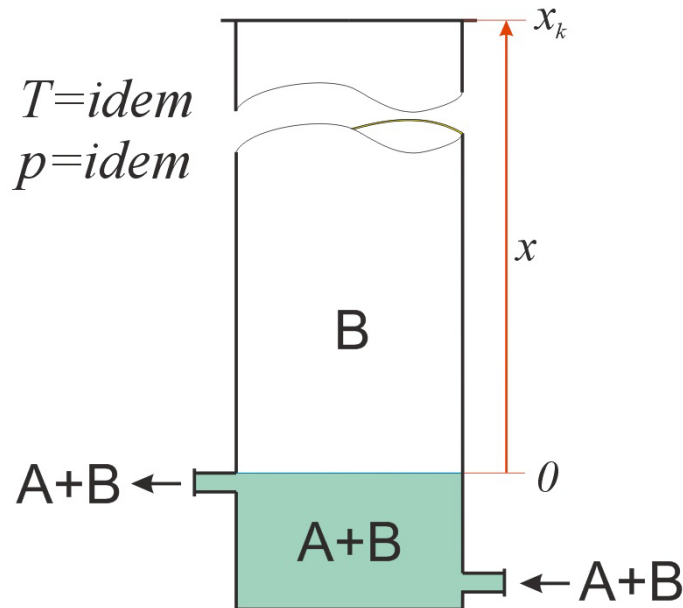
The physical model of the problematic situation consisting in illustrating the diffusion of gas  $B$  dissolved in liquid  $A$  flowing slowly through a cylinder, released into free space above water level, which is filled with its saturated steam is shown in Figure 3 (Kembłowski Z., Michałowski S., Strumiłło Cz. Zarzycki R., 1985). In the adopted physical model, it is assumed that at time  $\tau$ , gas  $B$  will not reach the top of the cylinder  $x_k$  at constant temperature  $T = idem$  and pressure  $p = idem$ .

<sup>17</sup>isotropy is uniformity in all orientations; anisotropy is the opposite

<sup>18</sup> concentration difference is the basic drive module of diffusion in isobaric decompression

<sup>19</sup> though they relied on calculations made by Gray (Gray M.C., 1925)

W przyjętym modelu fizycznym założono, że w rozpatrywanym czasie  $\tau$ , gaz B nie osiągnie górnej części cylindra  $x_k$  przy stałej temperaturze  $T = idem$



Rys.3. Model fizyczny dla procesu dyfuzji gazu rozpuszczonego z cieczy

i ciśnieniu  $p = idem$ . Warunki nakładane na zawartość  $C_B$  gazu B w przestrzeni ponad cieczą dla opisaney sytuacji problemowej można określić, jako:  $\lim_{\tau \rightarrow 0} C_B = 0 \wedge \lim_{x \rightarrow 0} C_B = C_0 \wedge \lim_{x \rightarrow x_k} C_B = 0$ . Pierwszy z nich będący warunkiem początkowym oznacza, że gaz B nie jest obecny  $C_B = 0$  w przestrzeni gazowej cylindra na początku procesu  $\tau = 0$ . Dwa pozostałe tworzą warunki brzegowe, z których pierwszy stanowi, że ustala się stan równowagi fizykochemicznej  $C_B = C_0$  na granicy faz  $x = 0$ . Ostatni z warunków ustala, że gaz B nie dociera do końca cylindra  $C_B(x_k) = 0$  - rys.3.

Podczas poszukiwania funkcji<sup>24</sup> będącej rozwiązaniem drugiego prawa Ficka (2) wygodnie będzie ustalić względną, bezwymiarową odległość  $y = \frac{x}{\sqrt{4D\tau}}$  oraz bezwymiarowe, względne stężenie  $C = \frac{C_B}{C_0}$ . Zakładając, że względne stężenie  $C$  jest funkcją  $C = f(y)$  względnej odległości  $y$ , można podzielić stronami zależność (2) przez  $C_0$  i wprowadzając bezwymiarowe, względne stężenie  $C$  zapisać (2) w postaci:  $\frac{\partial C}{\partial \tau} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$ . Skoro względne stężenie  $C$  jest funkcją  $y$ , to można zastosować następujące przekształcenie:  $\nabla_{C=f(y)} \frac{\partial C}{\partial \tau} = \frac{\partial C}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \tau}$ , dla którego wyliczając:  $\nabla_{y=\frac{x}{\sqrt{4D\tau}}} \frac{\partial y}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{4D}} \cdot \frac{1}{\tau^{3/2}} \cdot \frac{\partial C}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{y}{\tau} \cdot \frac{\partial C}{\partial y}$  można ostatecznie zapisać, że:

$$\nabla_{C=f(y)} \frac{\partial C}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{y}{\tau} \cdot \frac{\partial C}{\partial y} \quad (3)$$

Dla drugiego członu równania (2) można zapisać:  $\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial C}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial C}{\partial y} \cdot \frac{1}{\sqrt{4D\tau}} \right) = \frac{1}{\sqrt{4D\tau}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial C}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{4D\tau}} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial C}{\partial y} \cdot \frac{1}{\sqrt{4D\tau}} \right) = \frac{1}{4D\tau} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = \frac{y^2}{x^2} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}$ :

<sup>24</sup> algebraicznej funkcji analitycznej

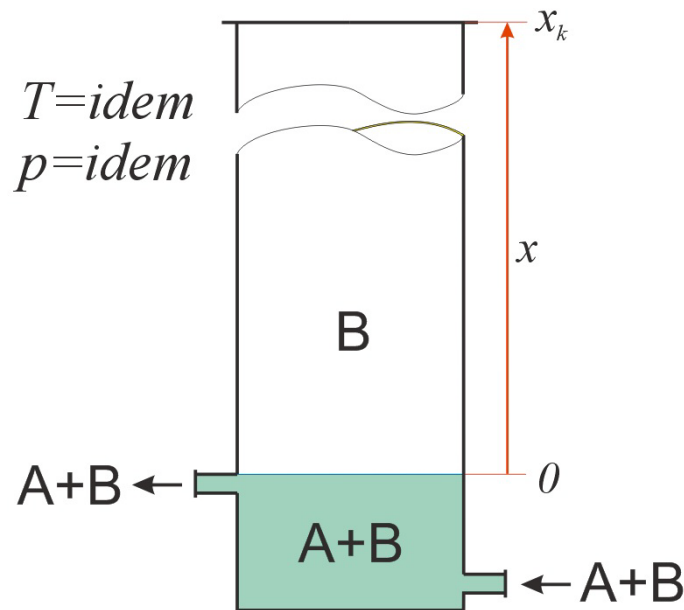


Fig.3 Physical model for the diffusion of gas dissolved in liquid

In the problematic situation described, the conditions imposed on the content  $C_B$  of gas  $B$  in the space above the liquid can be represented as  $\lim_{\tau \rightarrow 0} C_B = 0 \wedge \lim_{x \rightarrow 0} C_B = C_0 \wedge \lim_{x \rightarrow x_k} C_B = 0$ . The first of them, being the initial condition, means that gas  $B$  is not present  $C_B = 0$  in the gas space of the cylinder at the beginning of the process  $\tau = 0$ . The other two form boundary conditions; the former states that physicochemical equilibrium  $C_B = C_0$  is fixed on the boundary of phases  $x = 0$ . The latter states that gas  $B$  does not reach the end of the cylinder  $C_B(x_k) = 0$  – Figure 3.

When searching for a function<sup>20</sup> which is the solution to *Fick's second law* (2), it is convenient to determine a relative, dimensionless distance  $y = \frac{x}{\sqrt{4Dt}}$  and a dimensionless, relative concentration  $C = \frac{C_B}{C_0}$ . Assuming that the relative concentration  $C$  is a function  $C = f(y)$  of the relative distance  $y$ , the relation (2) can be divided by  $C_0$  and, introducing a dimensionless, relative concentration  $C$ , we can write it (2) as  $\frac{\partial C}{\partial \tau} = D \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$ . Since the relative concentration  $C$  is a function of  $y$ , we can apply the following transformation:  $\forall C=f(y) \frac{\partial C}{\partial \tau} = \frac{\partial C}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \tau}$ . After the following calculation:  $\forall y = \frac{x}{\sqrt{4Dt}} \frac{\partial y}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{4Dt}} \cdot \frac{1}{\tau^{3/2}} \cdot \frac{\partial C}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{y}{\tau} \cdot \frac{\partial C}{\partial y}$ , we can eventually write it as:

$$\forall C=f(y) \frac{\partial C}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{y}{\tau} \cdot \frac{\partial C}{\partial y} \tag{3}$$

For the second part of equation (2), we can write:  $\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial C}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial C}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial C}{\partial y} \cdot \frac{1}{\sqrt{4Dt}} \right) = \frac{1}{\sqrt{4Dt}} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial C}{\partial y} \cdot \frac{1}{\sqrt{4Dt}} \right) = \frac{1}{4Dt} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = \frac{y^2}{x^2} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}$ :

<sup>20</sup> algebraic analytic function

$$\forall_{C=f(y)} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{y^2}{x^2} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad (4)$$

Podstawiając rozwiązania (3)-(4):  $\frac{\partial C}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{y}{\tau} \cdot \frac{\partial C}{\partial y} \wedge \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{y^2}{x^2} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}$  do *drugiego prawa Ficka* (2)  $\frac{\partial C_i}{\partial \tau} = D \cdot \frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2}$  można zapisać:  $\frac{y^2}{x^2} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \cdot D + \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{\tau} \cdot \frac{\partial C}{\partial y} = 0$ . Można dalej przekształcić  $y^2 \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \cdot y \cdot \frac{x^2}{4 \cdot D \cdot \tau} \cdot \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \Rightarrow y^2 \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + 2 \cdot y \cdot y^2 \cdot \frac{\partial C}{\partial y} = 0$ , i skrócić:  $\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + 2 \cdot y \cdot \frac{\partial C}{\partial y} = 0$ , przy warunkach brzegowych:  $\lim_{y \rightarrow 0} C(y) = 0 \wedge \lim_{y \rightarrow \infty} C(y) = 0$ . Wprowadzając oznaczenie  $C' = \frac{\partial C}{\partial y}$ , można zapisać:  $\frac{\partial C'}{\partial y} + 2 \cdot y \cdot C' = 0 \Rightarrow \frac{1}{C'} \cdot \partial C' = -2 \cdot y \cdot \partial y$  co po scałkowaniu daje:  $C' = a_1 \cdot e^{-y^2} \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial y} = a_1 \cdot e^{-y^2}$ . Po powtórnym scałkowaniu, funkcję  $C(y)$  można zapisać w postaci:  $C = a_1 \cdot \int_0^y e^{-y^2} dy + a_2$  i korzystając z pierwszego warunku brzegowego  $\lim_{y \rightarrow 0} C(y) = 0$  obliczyć wartość stałej  $a_2$ , która wynosi  $a_2 = 1$ , oraz zapisać obliczoną funkcję  $C(y)$  w postaci:  $C = a_1 \cdot \int_0^y e^{-y^2} dy + 1$ . Zgodnie z drugim warunkiem brzegowym  $\lim_{y \rightarrow \infty} C(y) = 0$  można obliczyć wartość stałej  $a_1$ , która wynosi  $a_1 = (\int_0^{\infty} e^{-y^2} dy)^{-1}$ , co wraz z definicją funkcji  $C(y)$  jako  $C = \frac{C_B}{C_0}$  daje zależność:

$$\frac{C_B}{C_0} = 1 - \frac{\int_0^y e^{-y^2} dy}{\int_0^{\infty} e^{-y^2} dy} \quad (5)$$

Zależność  $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^y \exp(-y^2) dy$  nazywana jest funkcją błędu i oznaczana jako  $erf(y) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^y \exp(-y^2) dy$ . Korzystając z tego, że funkcja ta dla argumentu dążącego do nieskończoności jest jednością  $\lim_{y \rightarrow \infty} erf(y) = 1$ , można zależność (5) uprościć do postaci:

$$C_B = C_0 \cdot [1 - erf(y)] \quad \Big| \quad y = \frac{x}{\sqrt{4 \cdot D \cdot \tau}} \quad (6)$$

Można wykreślić uniwersalną zależność dla rozkładu względnego stężenia  $C = \frac{C_B}{C_0}$  od względnej odległości od powierzchni międzyfazowej<sup>25</sup>  $y = \frac{x}{\sqrt{4 \cdot D \cdot \tau}}$  - rys.4.

<sup>25</sup> będącej także funkcją czasu  $\tau$

$$\forall_{C=f(y)} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{y^2}{x^2} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad (4)$$

When we substitute solutions (3)-(4):  $\frac{\partial C}{\partial \tau} = -\frac{x}{z} \cdot \frac{y}{\tau} \cdot \frac{\partial C}{\partial y} \wedge \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{y^2}{x^2} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}$  to Fick's Second Law (2)  $\frac{\partial C_i}{\partial \tau} = D \cdot \frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2}$  we can write:  $\frac{y^2}{x^2} \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \cdot D + \frac{x}{z} \cdot \frac{y}{\tau} \cdot \frac{\partial C}{\partial y} = 0$ . You can transform it further  $y^2 \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{x}{z} \cdot y \cdot \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \Rightarrow y^2 \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + 2 \cdot y \cdot y^2 \cdot \frac{\partial C}{\partial y} = 0$ , and reduce:  $\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + 2 \cdot y \cdot \frac{\partial C}{\partial y} = 0$ , with the boundary conditions:  $\lim_{y \rightarrow 0} C(y) = 0 \wedge \lim_{y \rightarrow \infty} C(y) = 0$ . When we introducing the symbol  $C' = \frac{\partial C}{\partial y}$ , we can write:  $\frac{\partial C'}{\partial y} + 2 \cdot y \cdot C' = 0 \Rightarrow \frac{1}{C'} \cdot \partial C' = -2 \cdot y \cdot \partial y$  which after integration gives:  $C' = a_1 \cdot e^{-y^2} \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial y} = a_1 \cdot e^{-y^2}$ . After another integration, we can write the function  $C(y)$  as:  $C = a_1 \cdot \int_0^y e^{-y^2} dy + a_2$  and, using the first boundary condition  $\lim_{y \rightarrow 0} C(y) = 0$ , we can calculate the value of constant  $a_2$ , which is  $a_2 = 1$ , and write the calculated function  $C(y)$  in the following form:  $C = a_1 \cdot \int_0^y e^{-y^2} dy + 1$ . According to the second boundary condition  $\lim_{y \rightarrow \infty} C(y) = 0$ , we can calculate the value of the constant  $a_1$ , which is  $a_1 = (\int_0^\infty e^{-y^2} dy)^{-1}$ , which together with the definition of the function  $C(y)$  as  $C = \frac{c_B}{c_0}$  gives the following relation:

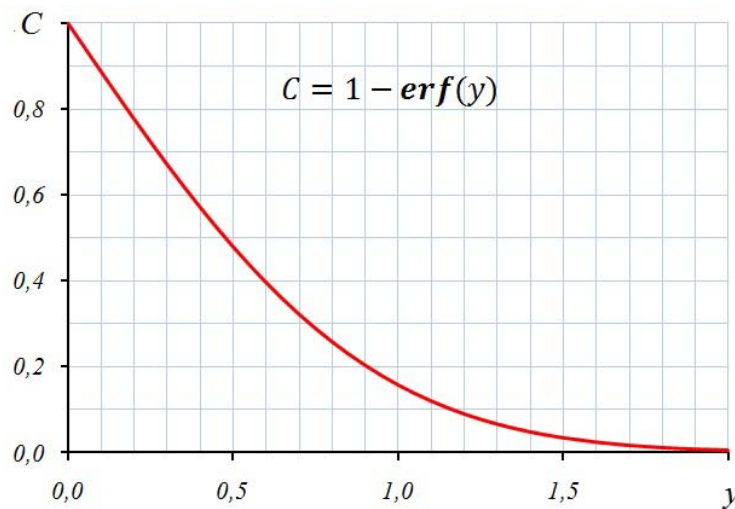
$$\frac{c_B}{c_0} = 1 - \frac{\int_0^y e^{-y^2} dy}{\int_0^\infty e^{-y^2} dy} \quad (5)$$

The relation  $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^y \exp(-y^2) dy$  is called an error function and represented by  $erf(y) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^y \exp(-y^2) dy$ . Knowing the fact that the function for an argument approaching infinity is a unity of  $\lim_{y \rightarrow \infty} erf(y) = 1$ , we can simplify the relation (5) to the following form:

$$C_B = C_0 \cdot [1 - erf(y)] \quad \Big| \quad y = \frac{x}{z \cdot \sqrt{4 \cdot D \cdot \tau}} \quad (6)$$

We can present a universal relation between the distribution of the relative concentration  $C = \frac{c_B}{c_0}$  and the relative distance from the interphase surface<sup>21</sup>  $y = \frac{x}{z \cdot \sqrt{4 \cdot D \cdot \tau}}$  - Figure 4.

<sup>21</sup> being also a time  $\tau$  function



Rys.4. Uniwersalna zależność dla rozkładu względnego stężenia  $C = \frac{c_i}{c_0}$  od względnej odległości od powierzchni międzyfazowej  $y = \frac{x}{2\sqrt{D_i\tau}}$

Dysponując zależnością ciśnień cząstkowych/prężności  $p_i$  w funkcji odległości  $x$  od ściany naczynia krwionośnego można obliczyć gradient  $\frac{dp_i}{dx}$  dla gazu  $i$  oraz dowolnej chwili  $\tau$ , w kierunku  $x$  prostopadłym do naczynia – rys.1. Aby uprościć obliczenia można początkowo obliczyć pochodną  $\frac{dp_i}{dy} \Big|_{y = \frac{x}{2\sqrt{D_i\tau}}}$ , która wyniesie:  $\frac{dp_i}{dy} = \frac{d}{dy} \cdot p_0 \cdot [1 - \text{erf}(y)] = \frac{d}{dy} \cdot p_0 - \frac{d}{dy} \cdot p_0 \cdot \text{erf}(y) = p_0 \cdot \frac{d}{dy} \text{erf}(y)$ . Po zróżniczkowaniu można zapisać:  $\frac{dp_i}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = p_0 \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \exp(-y^2)$ . Ponieważ,  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{D_i\tau}}$ , to można ostatecznie gradient prężności  $\frac{dp_i}{dx}$  dla dowolnej chwili  $\tau$  zapisać, jako:

$$\frac{dp_i}{dx} = \frac{p_0}{\sqrt{\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4D_i\tau}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{D_i\tau}} \quad (7)$$

Przyjmując zgodnie z modelem geometrycznym przedstawionym na rys.1, że dla  $x = 0$  ciśnienie cząstkowe gazu inertnego  $i$  jest takie samo jak dla przepływającej krwi  $p_0$ , stąd i z zależności (7), jednowymiarowy gradient ciśnienia cząstkowego  $\frac{dp_i}{dx}$  gazu inertnego  $i$  w kierunku  $x$  dla wybranej tkanki teoretycznej o współczynniku dyfuzji  $D_i$  jest odwrotnie proporcjonalny do pierwiastka czasu trwania procesu dyfuzji  $\tau$ :

$$\frac{dp_i}{dx} = -\frac{k_i^*}{\sqrt{\tau}} \quad \Big| \quad k_i^* = -\frac{p_0}{\sqrt{\pi D_i}} \quad \wedge \quad x = 0 \quad (8)$$

Dla stanu równowagi procesu dyfuzji  $J_i = \text{idem}$ , liczba moli cząstek gazu inertnego  $i$  dyfundującą w jednostce czasu  $\dot{n}_i \equiv \frac{dn_i}{dt}$  będzie iloczynem wartości strumienia dyfundującego gazu  $J_i$  w kierunku prostopadłym do powierzchni elementarnej  $dS$ . Zgodnie z *pierwszym prawem Ficka* (1) zależność tę można zapisać, jako:  $\dot{n}_i \equiv \frac{dn_i}{dt} \equiv J_i \cdot dS = -D_i \cdot dS \cdot \nabla p_i$ . Wykorzystując zależność (6) można obliczyć dla stanu stacjonarnego procesu dyfuzji  $J_i = \text{idem}$  elementarną liczbę moli  $dn$  dyfundującego gazu  $i$  w elementarnej jednostce czasu  $dt$ :

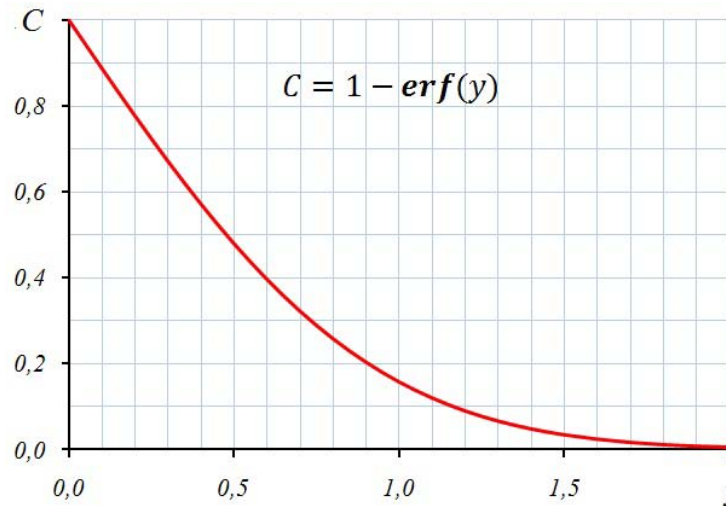


Fig.4 Universal relation between the distribution of the relative concentration  $C = \frac{p_i}{p_0}$  and the relative distance from the interphase surface  $y = \frac{x}{2\sqrt{D_i\tau}}$

With the (partial) pressure  $p_i$  relation in the function of distance  $x$  from the blood vessel wall we can calculate gradient  $\frac{dp_i}{dx}$  for gas  $i$  and any time  $\tau$ , in the  $x$  direction perpendicular to the vessel – Figure 1. To simplify the calculations, you can initially calculate the derivative  $\frac{dp_i}{dy} \Big|_{y = \frac{x}{2\sqrt{D_i\tau}}}$  which is:  $\frac{dp_i}{dy} = \frac{d}{dy} \cdot p_0 \cdot [1 - \text{erf}(y)] = \frac{d}{dy} \cdot p_0 - \frac{d}{dy} \cdot p_0 \cdot \text{erf}(y) = p_0 \cdot \frac{d}{dy} \text{erf}(y)$ .

After differentiating, you can write:  $\frac{dp_i}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = p_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \exp(-y^2)$ . Because  $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{D_i\tau}}$ , we can finally write the pressure gradient  $\frac{dp_i}{dx}$  for any time  $\tau$  as:

$$\frac{dp_i}{dx} = \frac{p_0}{\sqrt{\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4D_i\tau}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{D_i\tau}} \quad (7)$$

When we assuming, in accordance with the geometrical model shown in Figure 1, that for  $x = 0$ , the partial pressure of inert gas  $i$  is the same as for blood flow  $p_0$ , from this and (7) we can assume that one-dimensional partial pressure  $\frac{dp_i}{dx}$  gradient of inert gas in direction  $x$ , for a selected theoretical tissue with diffusion coefficient  $D_i$  is inversely proportional to the square root of diffusion process time  $\tau$ :

$$\frac{dp_i}{dx} = -\frac{k_i^*}{\sqrt{\tau}} \quad \Big| \quad k_i^* = -\frac{p_0}{\sqrt{\pi D_i}} \quad \wedge \quad x = 0 \quad (8)$$

For the equilibrium state of diffusion process  $J_i = \text{idem}$ , the number of moles of inert gas  $i$  particles, diffusing in time unit  $\dot{n}_i \equiv \frac{dn_i}{dt}$ , is the product of the value of the flux of diffusing gas  $J_i$  in the direction perpendicular to the elementary  $dS$  surface. According to Fick's First Law (1), this relation can be written as:  $\dot{n}_i \equiv \frac{dn_i}{dt} \equiv J_i \cdot dS = -D_i \cdot dS \cdot \nabla p_i$ . Using relation (6), the elementary number of moles  $dn$  of diffusing gas in an elementary unit of time  $dt$  can be calculated for the stationary state of the diffusion process  $J_i = \text{idem}$ :

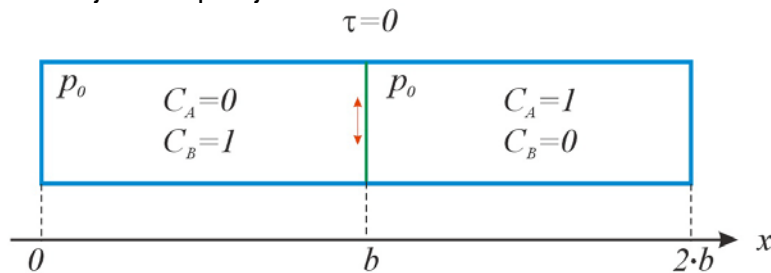
$$\dot{n}_i(x=0) \equiv \frac{dn_i}{d\tau} = -D_i \cdot dS \cdot \frac{k_i^s}{\sqrt{\tau}} \quad \Bigg| \quad J_i \equiv \frac{1}{dS} \cdot \frac{\partial n_i}{\partial \tau} = \text{idem} \quad (9)$$

gdzie:  $\dot{n}_i$  – strumień moli dyfundującego gazu  $i$  na granicy tkanka-krew  
 $n_i$  – liczba moli dyfundującego gazu  $i$   
 $S$  – powierzchnia jednostkowa prostopadła do kierunku osi  $x$   
 $k_i^s$  – współczynnik  $k_i^s = -\frac{p_0}{\sqrt{\pi D_i}}$

Korzystając z zależności (9) można obliczyć całkowitą liczbę moli  $n_i$  dyfundującego gazu inertnego  $i$  przez powierzchnię jednostkową bariery dyfuzyjnej<sup>26</sup>  $S$ , jako całkę różniczkowego strumienia dyfuzyjnego  $n_i = \int_0^\tau \dot{n}_i d\tau = \int_0^S \int_0^\tau -\frac{D_i \cdot k_i^s}{\sqrt{\tau}} d\tau dS$ , której rozwiązanie można zapisać, jako<sup>27</sup>:

$$n_i = k \cdot \sqrt{\tau} \quad \Bigg| \quad k_i = -D_i \cdot S \cdot k_i^s \quad \wedge \quad x = 0 \quad (10)$$

Z równania (10) wynika, że liczba moli  $n_i$  gazu  $i$ , przenikająca w czasie  $\tau$  przez jednostkową powierzchnię  $S$  jest proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego czasu  $\tau$  trwania stanu równowagi procesu dyfuzji  $n_i = \sqrt{\tau}$ . Stąd, iloczyn ciśnienia całkowitego  $p$  i pierwiastka kwadratowego czasu trwania ekspozycji  $\sqrt{\tau}$ , może być warunkiem bezpiecznej dekompresji:



Rys.5. Model fizyczny dla procesu wzajemnej dyfuzji dwóch gazów

<sup>26</sup> barierą jest błona naczyniowa torebki stawowej

<sup>27</sup> Dla powierzchni jednostkowej  $S = 1$  zależność (9) można zapisać, jako:  $n_i = C_0 \cdot \sqrt{\frac{D_i}{\pi}} \cdot \sqrt{\tau}$ , które to rozwiązanie można uzyskać także w inny sposób, wstawiając do *pierwszego prawa Ficka* (1) rozwiązanie równania różniczkowego dla *drugiego prawa Ficka* (2). Stąd, strumień mowy  $J(x, \tau)$  dyfundującego gazu  $i$  przez jednostkową powierzchnię  $S$  w kierunku do niej prostopadłym  $x$  w jednostce czasu  $\tau$  można zapisać, jako:

$$J(x, \tau) = -D_i \cdot \frac{\partial C_i(x, \tau)}{\partial x} = -D_i \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[ C_0 - C_0 \cdot \frac{x}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{dx}{2\sqrt{D_i \tau}}} \exp\left(-\frac{dx}{2\sqrt{D_i \tau}}\right)^2 \frac{dx}{2\sqrt{D_i \tau}} \right] = -\frac{D_i}{2\sqrt{D_i \tau}} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left[ C_0 - C_0 \cdot \frac{x}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^y \exp(-y^2) dy \right] \Bigg|_{\frac{dx}{2\sqrt{D_i \tau}}} = \frac{C_0 \sqrt{D_i}}{2\sqrt{\tau}} \cdot \frac{x}{\sqrt{\pi}} \cdot \exp(-y^2)$$

Stąd wynika, że:  $J(x, \tau) = C_0 \cdot \sqrt{\frac{D_i}{\pi}} \cdot \exp\left[-\left(\frac{dx}{2\sqrt{D_i \tau}}\right)^2\right]$ . Całkując ostatnią zależność można obliczyć liczbę moli  $n_i$  dyfundującego gazu  $i$  przez jednostkową powierzchnię  $S$  prostopadłą do kierunku  $x$  w czasie  $\tau$ :  $n_i = \int_0^\tau J(x=0, \tau) d\tau = \int_0^\tau C_0 \cdot \sqrt{\frac{D_i}{\pi}} d\tau = C_0 \cdot \sqrt{\frac{D_i}{\pi}} \int_0^\tau \frac{1}{\sqrt{\tau}} d\tau = C_0 \cdot \sqrt{\frac{D_i}{\pi}} \cdot \sqrt{\tau}$ . Widać stąd, że ostateczne rozwiązanie  $n_i = C_0 \cdot \sqrt{\frac{D_i}{\pi}} \cdot \sqrt{\tau}$  jest identyczne z zależnością (10) (Ashida H., Ikeda T., Tikuisis P., Nishi R. Y., 2005).



Using the formula (9), we can calculate the total number of moles  $n_i$  of diffusing inert gas  $i$  through the elementary area of diffusion barrier<sup>22</sup>  $S$  as the integral of the differential diffusion flux

$$n_i = \int_0^\tau \dot{n}_i d\tau = \int_0^S \int_0^\tau -\frac{D_i \cdot k_i}{\sqrt{\tau}} d\tau dS, \text{ whose solution can be written as}^{23}:$$

$$n_i = k \cdot \sqrt{\tau} \quad | \quad k_i = -D_i \cdot S \cdot k_i^0 \wedge x = 0 \quad (10)$$

Equation (10) shows that the number of moles  $n_i$  of gas  $i$ , permeating in time  $\tau$  through elementary surface area  $S$  is proportional to the square root of time  $\tau$  of equilibrium state of diffusion process  $n_i = \sqrt{\tau}$ . Hence, the product of total pressure  $p$  and the square root of exposure duration  $\sqrt{\tau}$ , may constitute the condition of safe decompression:

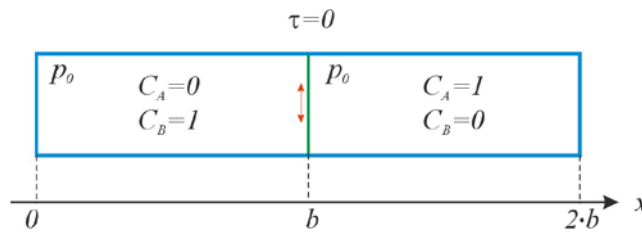


Fig.5 Physical model of mutual diffusion of two gases

$$p \cdot \sqrt{\tau} = \text{const} \quad (11)$$

The initial evidence proving the truth of postulate<sup>24</sup> (11) was a surprisingly good correlation with given direct decompression profiles<sup>25</sup> selected empirically by the U.S. Navy - Table 1 (Direction of Commander, Naval Sea Systems Command, 2008).

<sup>22</sup> vascular membrane of joint capsule is the barrier

<sup>23</sup> For an elementary surface  $S = 1$ , relation (9) can be written as  $n_i = C_0 \cdot \sqrt{\frac{D_i}{\pi}} \cdot \sqrt{\tau}$ , which can be obtained in other ways, inserting in *Fick's First Law* (1) the solution of the differential equation for *Fick's Second Law* (2). Hence, the molar flux  $J(x, \tau)$  of diffusing gas  $i$  through an elementary area  $S$  in the perpendicular direction  $x$  and time unit  $\tau$  can be written as

$$J(x, \tau) = -D_i \cdot \frac{\partial C_i(x, \tau)}{\partial x} = -D_i \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[ C_0 - C_0 \cdot \frac{x}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{dx}{2\sqrt{D_i \tau}}} \exp\left(-\frac{dx}{2\sqrt{D_i \tau}}\right)^2 \frac{dx}{2\sqrt{D_i \tau}} \right] = -\frac{D_i}{2\sqrt{D_i \tau}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} [C_0 - C_0 \cdot \frac{x}{\pi} \cdot \int_0^y \exp(-y^2) dy] \Big|_{dy = \frac{dx}{2\sqrt{D_i \tau}}} = \frac{C_0 \sqrt{D_i}}{2\sqrt{\tau}} \cdot \frac{x}{\sqrt{\pi}} \cdot \exp(-y^2)$$

. It can be concluded that  $J(x, \tau) = C_0 \cdot \sqrt{\frac{D_i}{\pi}} \cdot \exp\left[-\left(\frac{dx}{2\sqrt{D_i \tau}}\right)^2\right]$ . If we integrate the last relation,

we can calculate the number of moles  $n_i$  of diffusing gas  $i$  through an elementary area  $S$  in the perpendicular direction  $x$  and time unit  $\tau$ :

$$n_i = \int_0^\tau J(x = 0, \tau) d\tau = \int_0^\tau C_0 \cdot \sqrt{\frac{D_i}{\pi}} d\tau = C_0 \cdot \sqrt{\frac{D_i}{\pi}} \int_0^\tau \frac{1}{\sqrt{\tau}} d\tau = C_0 \cdot \sqrt{\frac{D_i}{\pi}} \cdot \sqrt{\tau}. \text{ This shows that the final solution } n_i = C_0 \cdot \sqrt{\frac{D_i}{\pi}} \cdot \sqrt{\tau} \text{ is identical to equation (10) (Ashida H., Ikeda T., Tikuisis P., Nishi R. Y., 2005).}$$

<sup>24</sup> here - the thesis is accepted without proof as an axiom, which is the starting point for further considerations

<sup>25</sup> profiles with zero decompression, i.e. such times spent at maximum depth of exposure that a diver can tolerate surfacing without decompression stops - only the speed of surfacing is limited

$$p \cdot \sqrt{\tau} = \text{const} \quad (11)$$

Wstępnym dowodem na prawdziwość postulatu<sup>28</sup> (11) była zadziwiająco dobra korelacja z wybranymi profilami dekompresji bezpośredniej<sup>29</sup> wyznaczonymi empirycznie przez *US Navy* – tab.1 (Direction of Commander, Naval Sea Systems Command, 2008).

### PODEJŚCIE HEMPELMANA

Jako model fizyczny wybrano cylinder podzielony w odległości  $b$  na połowy cienką ścianką, po stronach której zgromadzone są dwa rodzaje gazów czystych  $A$  oraz  $B$  – rys.5. Gazy te znajdują się pod tym samym ciśnieniem  $p_0$ . Po usunięciu bariery zacznie się proces dyfuzji, który spowoduje zmianę stężenia gazu  $i$ . Masa gazu  $A$  zawartego w jednej połowie kuwety będzie się zmieniać od wartości  $m_A = m_0$  do  $m_A = \frac{m_0}{2}$ :  $m_A = m_0 \rightarrow m_A = \frac{m_0}{2} \mid \tau = 0 \rightarrow \tau = \infty$ . Chcąc rozwiązać dla tego modelu drugie prawo Ficka (2) dogodnie jest zastąpić wielkość  $m_A$  zmienną  $M = 2 \cdot \left(\frac{m_A}{m_0} - \frac{1}{2}\right)$ , która w czasie biegnącym od zera do nieskończoności zmienia się od jedności do zera:  $M = 1 \rightarrow M = 0 \mid \tau = 0 \rightarrow \tau = \infty$ . Po podstawieniu zmiennej  $m_A = \frac{m_0}{2} \cdot (M + 1)$  do równania (2), można zapisać  $\frac{\partial M}{\partial \tau} = D \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$ , gdyż  $X = f(\tau, x)$ . Dla przyjętego modelu fizycznego stężenia dyfundujących gazów będą symetryczne względem środka cylindra, stąd wystarczy rozwiązać sytuację problemową jedynie dla jego połowy ustalając początek osi 0 na jednym końcu cylindra oraz długość całego cylindra na  $2 \cdot b$  – rys.5. Dla tych parametrów modelu można zapisać następujące warunki graniczne:  $\nabla_{\tau=0} M = 1 \wedge \nabla_{\tau=\infty} M = 0 \wedge \nabla_{x=0} M = 0 \wedge \nabla_{x=b} \frac{\partial M}{\partial x} = 0$ . Ostatni z warunków  $\nabla_{x=b} \frac{\partial M}{\partial x} = 0$  wynika z przyjęcia, że na końcach cylindra dyfuzja nie zachodzi. Zakładając, że funkcja będąca rozwiązaniem równania różniczkowego (2) może być wyrażona jako iloczyn  $M = \varepsilon \cdot \omega$ , gdzie  $\varepsilon(M)$  jest funkcją zmiennej  $M$ , a  $\omega(\tau) \equiv \dot{\omega}$  jest funkcją czasu  $\tau$ , można zapisać drugie prawo Ficka jako:  $\varepsilon(M) \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \tau} = D \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon(M)}{\partial x^2} \cdot \dot{\omega}$  a następnie rozdzielając zmienne przekształcić do postaci:  $\frac{1}{\varepsilon(M)} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon(M)}{\partial x^2} = \frac{1}{D \cdot \dot{\omega}} \cdot \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \tau}$ . Ponieważ funkcja  $\dot{\omega}$  nie zależy od  $x$ :  $\dot{\omega} \neq f(M)$ , to przy zmianie  $M$  prawa strona ostatniego równania pozostaje stała. Podobnie lewa strona pozostaje stała przy zmianie  $\tau$ , gdyż  $\varepsilon(M) \neq f(\tau)$ . Wynika stąd, że obie strony równania powinny być równe jednej i tej samej stałej oznaczonej tutaj jako  $-k^2$ :  $\left\{ \frac{1}{\varepsilon(M)} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon(M)}{\partial x^2} = -k^2 \wedge \frac{1}{D \cdot \dot{\omega}} \cdot \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \tau} = -k^2 \right\}$ . W ten sposób powstał układ równań różniczkowych zwyczajnych. Jedną z metod rozwiązywania takich równań jest odgadnięcie całek ogólnych, których propozycje można zapisać, jako:  $\varepsilon(M) = \alpha_1 \cdot \cos(\alpha \cdot M) + \alpha_2 \cdot \sin(\alpha \cdot M) \wedge \dot{\omega} = \alpha_3 \cdot \exp(-D \cdot \alpha^2 \cdot \tau)$ , stąd funkcję  $M$  można powtórnie zapisać, jako ich iloczyn:  $M = \varepsilon(M) \cdot \omega(\tau) = \alpha_3 \cdot \exp(-D \cdot \alpha^2 \cdot \tau) \cdot [\alpha_1 \cdot \cos(\alpha \cdot M) + \alpha_2 \cdot \sin(\alpha \cdot M)]$ . Dla tego rozwiązania i warunku  $\nabla_{x=0} M = 0$  wynika, że  $\nabla_{x=0} M = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$ .

<sup>28</sup> tutaj – teza przyjmowana bez dowodu jako aksjomat, stanowiąca punkt wyjścia do dalszych rozważań

<sup>29</sup> profile z dekompresją zerową, czyli takie czasy przebywania na maksymalnej głębokości ekspozycji, które nurek toleruje przy wynurzeniu bez zastosowania przystanków dekompresyjnych – limitowana jest jedynie prędkość wynurzenia

## HEMPELMAN'S APPROACH

A cylinder divided at distance  $b$  in half with a thin wall, on the sides of which there are two types of pure gases  $A$  and  $B$  was selected as a physical model – Figure 5. These gases are under the same pressure  $p_0$ . After removing the barriers, the process of diffusion will begin, which will change the concentration of gas  $i$ . The mass of gas  $A$  stored in one half of the container will change the value from  $m_A = m_0$  to  $m_A = \frac{m_0}{2}$ ;  $m_A = m_0 \rightarrow m_A = \frac{m_0}{2} \mid \tau = 0 \rightarrow \tau = \infty$ . To solve Fick's second law (2) for this model, it is convenient to replace  $m_A$  with variable  $M = 2 \cdot \left( \frac{m_A}{m_0} - \frac{1}{2} \right)$ , which during the time running from zero to infinity varies from one to zero:  $M = 1 \rightarrow M = 0 \mid \tau = 0 \rightarrow \tau = \infty$ . After substituting the variable  $m_A = \frac{m_0}{2} \cdot (M + 1)$  in equation (2), we can write  $\frac{\partial M}{\partial \tau} = D \cdot \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$ , gdyż  $X = f(\tau, x)$ . For the physical model adopted, the concentration of diffusing gases will be symmetrical to the centre of the cylinder, hence it is enough to resolve the problem only for its one half by determining the beginning of axis 0 at one end of the cylinder and the length of the cylinder to  $2 \cdot b$  - Figure 5. For these model parameters, we can write the following boundary conditions:  $\forall_{\tau=0} M = 1 \wedge \forall_{\tau=\infty} M = 0 \wedge \forall_{x=0} M = 0 \wedge \forall_{x=b} \frac{\partial M}{\partial x} = 0$ . The last of them  $\forall_{x=b} \frac{\partial M}{\partial x} = 0$  results from assuming that at the ends of the cylinder diffusion does not occur. Assuming that the function being the solution of the differential equation (2) can be expressed as the product,  $M = \varepsilon \cdot \omega$  where  $\varepsilon(M)$  is a function of the variable  $M$ , and  $\omega(\tau) \equiv \hat{\omega}$  is a function of time  $\tau$ , we can write Fick's Second Law as:  $\varepsilon(M) \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial \tau} = D \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon(M)}{\partial x^2} \cdot \hat{\omega}$  and then, by separating variables, we can convert it to the following form:  $\frac{1}{\varepsilon(M)} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon(M)}{\partial x^2} = \frac{1}{D \cdot \hat{\omega}} \cdot \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial \tau}$ . Since function  $\hat{\omega}$  does not depend on  $x$ :  $\hat{\omega} \neq f(M)$ , changing  $M$  will leave the right side of the last equation the same. Similarly, the left side will remain constant when changing  $\tau$ , since  $\varepsilon(M) \neq f(\tau)$ . It appears that both sides of the equation should be equal to one and the same constant, indicated here as  $-k^2$ :  $\left\{ \frac{1}{\varepsilon(M)} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon(M)}{\partial x^2} = -k^2 \wedge \frac{1}{D \cdot \hat{\omega}} \cdot \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial \tau} = -k^2 \right\}$ . Thus, a system of ordinary differential equations was created. One of the methods of solving such equations is to guess the general integrals proposals of which can be written as:  $\varepsilon(M) = a_1 \cdot \cos(\alpha \cdot M) + a_2 \cdot \sin(\alpha \cdot M) \wedge \hat{\omega} = a_3 \cdot \exp(-D \cdot \alpha^2 \cdot \tau)$ , hence function  $M$  can be rewritten as their product:  $M = \varepsilon(M) \cdot \omega(\tau) = a_3 \cdot \exp(-D \cdot \alpha^2 \cdot \tau) \cdot [a_1 \cdot \cos(\alpha \cdot M) + a_2 \cdot \sin(\alpha \cdot M)]$ . For this solution and the condition  $\forall_{x=0} M = 0$ , it appears that  $\forall_{x=0} M = 0 \Rightarrow a_1 = 0$ . So the solution will be simplified:  $M = a_3 \cdot \exp(-D \cdot \alpha^2 \cdot \tau) \cdot a_2 \cdot \sin(\alpha \cdot M)$ . The condition for the end of the diffusion process at the end of the box  $\forall_{x=b} \frac{\partial M}{\partial x} = 0$  entails such a conclusion:  $\forall_{x=b} \frac{\partial M}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \sin(\alpha M)}{\partial x} = \cos(\alpha \cdot M) = 0 \mid \exists_{n \in \mathbb{Z}} \alpha = \frac{2n-1}{2b} \cdot \pi$ , and the condition  $\forall_{\tau=\infty} M = 0$  is automatically met. After taking these conditions into account, when we add up all the possible solutions for any values of  $n$ , we can transform function  $M$  and write it as:  $M = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \exp \left[ -D \cdot \left( \frac{2n-1}{2b} \cdot \pi \right)^2 \cdot \tau \right] \cdot \sin \left( \frac{2n-1}{2b} \cdot \pi \cdot x \right)$ . But while taking into account the last condition:  $\forall_{\tau=0} X = 1$ , the last equation can be written as the following relation:  $\forall_{\tau=0} X = 1$ , Constants  $A_n$  should be selected so as to meet the condition  $\forall_{\tau=0} M = 1$

Czyli rozwiązanie ulegnie uproszczeniu:  
 $M = a_3 \cdot \exp(-D \cdot \alpha^2 \cdot \tau) \cdot a_2 \cdot \sin(\alpha \cdot M)$ . Warunek zaniku procesu dyfuzji na końcu kuwety  $V_{x=b} \frac{\partial M}{\partial x} = 0$  pociąga za sobą wniosek:  
 $V_{x=b} \frac{\partial M}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \sin(\alpha M)}{\partial x} = \cos(\alpha \cdot M) = 0 \mid \exists n \in \mathbb{Z} \alpha = \frac{(2n-1) \cdot \pi}{2b}$ , natomiast warunek  $V_{\tau=\infty} M = 0$  jest już automatycznie spełniony. Po uwzględnieniu powyższych warunków, sumując wszystkie możliwe rozwiązania dla dowolnych wartości  $n$ , można funkcję  $M$  przekształcić i zapisać w postaci:  
 $M = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \exp\left[-D \cdot \left(\frac{(2n-1) \cdot \pi}{2b}\right)^2 \cdot \tau\right] \cdot \sin\left(\frac{(2n-1) \cdot \pi}{2b} \cdot x\right)$ . Zaś uwzględniając ostatni warunek:  $V_{\tau=0} M = 1$ , to ostatnie równanie można zapisać jako związek:  
 $V_{\tau=0} M = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin\left(\frac{(2n-1) \cdot \pi}{2b} \cdot x\right) = 1$ . Stałe  $A_n$  należy dobrać tak, aby spełniały warunek  $V_{\tau=0} M = 1$ . Z algebry<sup>30</sup> wiadomo, że dla przedziału  $[0; 2 \cdot b]$ , szereg geometryczny:  $\sin\left(\frac{\pi}{2b} \cdot x\right) + \frac{1}{3} \cdot \sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{2b} \cdot x\right) + \frac{1}{5} \cdot \sin\left(5 \cdot \frac{\pi}{2b} \cdot x\right) + \dots$  ma granicę wynoszącą  $\frac{\pi}{4}$  (Batuner Ł.M., Pozin M.J., 1956). Stąd można zapisać rozwinięcie jedności według sinusów, jako:  $1 \equiv \frac{4}{\pi} \left[ \sin\left(\frac{\pi}{2b} \cdot x\right) + \frac{1}{3} \cdot \sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{2b} \cdot x\right) + \frac{1}{5} \cdot \sin\left(5 \cdot \frac{\pi}{2b} \cdot x\right) + \dots \right]$  i porównać z  $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin\left(\frac{(2n-1) \cdot \pi}{2b} \cdot x\right) = 1$  otrzymując stąd, że:  $A_n = \frac{4}{\pi(2n-1)}$ . Ostatecznie funkcja zastępcza  $M$  może zostać zapisana, jako:

$$M = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \cdot \exp\left[-D \cdot \left(\frac{(2n-1) \cdot \pi}{2b}\right)^2 \cdot \tau\right] \cdot \sin\left(\frac{(2n-1) \cdot \pi}{2b} \cdot x\right) \quad (12)$$

Zależność (12) jest ogólnym rozwiązaniem sytuacji problemowej dyfundujących gazów w przeciwprądzie – rys.5 (Batuner Ł.M., Pozin M.J., 1956). Rozważając następnie stężenie składnika  $A$  w kuwecie w procesie dyfuzji, można zapisać, że:  
 $M = \frac{4}{\pi} \cdot \int_0^{2b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \cdot \exp\left[-D \cdot \left(\frac{(2n-1) \cdot \pi}{2b}\right)^2 \cdot \tau\right] \cdot \sin\left[\frac{(2n-1) \cdot \pi}{2b} \cdot x\right] dx$ . Przyjmując, że kuweta ma średnicę jednostkową, to jej objętość wyniesie:  $V = 2 \cdot b$ . Stąd można obliczyć stężenie obliczając powyższą całkę<sup>31</sup>:

$$C = \frac{M}{2b} = \frac{2}{\pi^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cdot \exp\left[-D \cdot \left(\frac{(2n-1) \cdot \pi}{2b}\right)^2 \cdot \tau\right] \quad (13)$$

Wartość stężenia  $C$  można zapisać także przekształcając definicję wartości masy  $M$ , jako:  $M = 2 \cdot \left(\frac{m_A}{m_0} - \frac{z}{2}\right) \Rightarrow C = 2 \cdot \left(\frac{C_A}{C_0} - \frac{z}{2}\right)$ . Wynika stąd, że zmiana stężenia  $C$ , podobnie jak masy  $M$ , przebiega w czasie biegnącym od zera do nieskończoności od jedności do zera:  $C = 1 \rightarrow C = 0 \mid \tau = 0 \rightarrow \tau = \infty$ . Na tej podstawie można stwierdzić, że w połówce kuwety gdzie zawarty jest gaz  $A$  stężenie jego spada po usunięciu bariery zgodnie z funkcją (13) a w przestrzeni gdzie był jedynie gaz  $B$  rośnie jego zawartość według tej samej funkcji. Można na podstawie rozwiązania ogólnego *drugiego prawa Ficka* (13) zapisać zależność stopnia desaturacji  $\Delta$  gazem  $A$  dla części kuwety gdzie na początku był jedynie gaz  $B$ , jako (Hempelmann H. V., 1975):

$$\Delta = 1 - \frac{2}{\pi^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cdot \exp\left[-D \cdot \left(\frac{(2n-1) \cdot \pi}{2b}\right)^2 \cdot \tau\right] \quad (14)$$

<sup>30</sup> dział matematyki będący początkowo teorią rozwiązywania równań posługującą się symboliką literową

<sup>31</sup> całkując poszczególne czynniki sumy i sumując je oraz korzystając z tego, że  $\int \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2b} dx = -\frac{2b}{(2n-1)\pi} \cdot \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2b}$  i  $\cos \pi = -1$

From algebra<sup>26</sup> we know that for range  $[0; 2 \cdot b]$ , geometrical series  $\sin(\frac{\pi}{2b} \cdot x) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3 \cdot \frac{\pi}{2b} \cdot x) + \frac{1}{5} \cdot \sin(5 \cdot \frac{\pi}{2b} \cdot x) + \dots$  has a limit of  $\frac{\pi}{4}$  (Batuner Ł.M., Pozin M.J., 1956). That is why we can write the expansion of unity by sines as  $1 \equiv \frac{4}{\pi} [\sin(\frac{\pi}{2b} \cdot x) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3 \cdot \frac{\pi}{2b} \cdot x) + \frac{1}{5} \cdot \sin(5 \cdot \frac{\pi}{2b} \cdot x) + \dots]$  and compare it with  $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin(\frac{2n-1}{2b} \cdot \pi \cdot x) = 1$ , getting  $A_n = \frac{4}{\pi(2n-1)}$ . Finally, substitute function  $\square$  can be written as

$$M = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \cdot \exp[-D \cdot (\frac{2n-1}{2b} \cdot \pi)^2 \cdot \tau] \cdot \sin(\frac{2n-1}{2b} \cdot \pi \cdot x) \tag{12}$$

The relation (12) is a general solution to the problem of gases diffusing in counter-current – Figure 5 (Batuner Ł.M., Pozin M.J., 1956). Considering then the concentration of component *A* in the box in the process of diffusion, we can write that  $M = \frac{4}{\pi} \cdot \int_0^{2b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \cdot \exp[-D \cdot (\frac{2n-1}{2b} \cdot \pi)^2 \cdot \tau] \cdot \sin[\frac{2n-1}{2b} \cdot \pi \cdot x] \cdot dx$ .

Assuming that the box has a unit diameter, its volume is  $V = 2 \cdot b$ . Hence, we can calculate the concentration by calculating the above integral<sup>27</sup>:

$$C = \frac{M}{2b} = \frac{4}{\pi^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cdot \exp[-D \cdot (\frac{2n-1}{2b} \cdot \pi)^2 \cdot \tau] \tag{13}$$

The value of concentration *C* can be written thanks to transforming the definition of the mass *M* value as  $M = 2 \cdot (\frac{m_A}{m_0} - \frac{c}{2}) \Rightarrow C = 2 \cdot (\frac{C_A}{C_0} - \frac{c}{2})$ . It can be concluded that the change in concentration *C*, like mass *M*, happens in time running from zero to infinity, from unity to zero:  $C = 1 \rightarrow C = 0 \mid \tau = 0 \rightarrow \tau = \infty$ .

On the basis of it, it can be concluded that in half of the box, where there is gas *A*, its concentration falls after removing the barriers according to function (13) and in the area where there was only gas *B*, its amount increases according to the same function.

On the basis of the general solution of *Fick's Second Law* (13), we can write the relation degree of desaturation  $\Delta$  with gas *A* for a part of the box where at the beginning there was only gas *A* as (Hempelmann H. V., 1975):

$$\Delta = 1 - \frac{4}{\pi^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cdot \exp[-D \cdot (\frac{2n-1}{2b} \cdot \pi)^2 \cdot \tau] \tag{14}$$

<sup>26</sup> branch of mathematics which initially was a theory of solving equations using letter symbolism

<sup>27</sup> integrating individual factors of the sum summing them and knowing that  $\int \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2b} dx = -\frac{2b}{(2n-1)\pi} \cdot \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2b}$  and  $\cos \pi = -1$ .

## DYSKUSJA I WNIOSKI

Ze względu na półempiryczny charakter modelu granicy bezpieczeństwa zakładającego stałą wartość iloczynu  $Prt = p \cdot \sqrt{\tau}$  (11) ciśnienia  $p$  i pierwiastka z czasu  $\tau$  opartego na analizie procesu dyfuzji *Hempelmana* ogłosił, że jest on prawidłowy jedynie dla krótkich czasów ekspozycji<sup>32</sup> (Ashida H., Ikeda T., Tikuisis P., Nishi R. Y., 2005) – tab.1. Jednak jej zastosowanie okazało się szersze i odegrała ona także liczącą się rolę w projektowaniu dekompresji dla nurków saturowanych (Behnke A.R., 1979).

## WSKAŹNIK OBCIĄŻENIA DEKOMPRESYJNEGO

Formuła  $Prt$  jest przez swą prostą formę użyteczna i wystarczająco dokładna do planowania dekompresji bezpośrednich<sup>33</sup> dla czasów  $\tau \leq 100 \text{ min}$  (Ashida H., Ikeda T., Tikuisis P., Nishi R. Y., 2005). Teoria *Hempelmana* została wykorzystana do opracowania tabel dekompresyjnych *British Royal Navy* z 1968 r. (Gernhardt M. L., 1991).

Tabela 1

Porównanie wybranych powietrznych profili dekompresji bezpośrednich przyjętych przez *US Navy* (Direction of Commander, Naval Sea Systems Command, 2008) z formułą *Hempelmana* dla wartości  $Prt = p \cdot \sqrt{\tau} = 480 \text{ fsw} \cdot \sqrt{\text{min}}$

Głębokość	Czas ekspozycji bezpośredniej według <i>US Navy</i>	Czas obliczony	Różnica czasów	Procentowa różnica czasów
$H$	$\tau$	$\tau_{obl.}$	$\Delta\tau$	$\Delta\tau_{\%}$
[fsw]	[min]	[min]	[min]	[%]
50	92	92	0	0
55	74	76	2	3
60	60	64	4	7
70	48	47	1	2
80	39	36	3	8
90	30	28	2	5
100	25	23	2	8
110	20	19	1	5
120	15	16	1	7
$\tau_{obl.} = \left( \frac{480 \text{ fsw} \cdot \sqrt{\text{min}}}{p} \right)^2$ ; $\Delta\tau =  \tau - \tau_{obl.} $ ; $\Delta\tau_{\%} = 100\% \cdot \frac{\Delta\tau}{\tau}$				

<sup>32</sup> do maksymalnego czasu  $100 \text{ min}$ ; późniejsze próby zastosowania podobnych reguł do nurków saturowanych były także udane (Behnke A.R., 1979)

<sup>33</sup> nurkowania z dekompresją zerową

**DISCUSSION AND CONCLUSIONS**

Due to the half-empirical nature of the safety limit model, which assumes a constant value of product  $Prt = p \cdot \sqrt{\tau}$  (11) of pressure  $p$  and square root of time  $\tau$ , based on the analysis of the diffusion process, *Hempelmann* announced that it is valid only for short exposure times<sup>28</sup> (Ashida H., Ikeda T., Tikuisis P., Nishi R. Y., 2005) - Table 1. However, its application turned out to be wider and it also played an important role in designing decompression for saturated divers (Behnke A.R., 1979).

**DECOMPRESSION LOAD INDICATOR**

Formula, thanks to its simple form, is useful and accurate enough to plan for direct decompression<sup>29</sup> for times  $\tau \leq 100 \text{ min}$  (Ashida H., Ikeda T., Tikuisis P., Nishi R. Y., 2005). *Hempelmann's* theory was used for creating British Royal Navy decompression tables from 1968 (Gernhardt M. L., 1991).

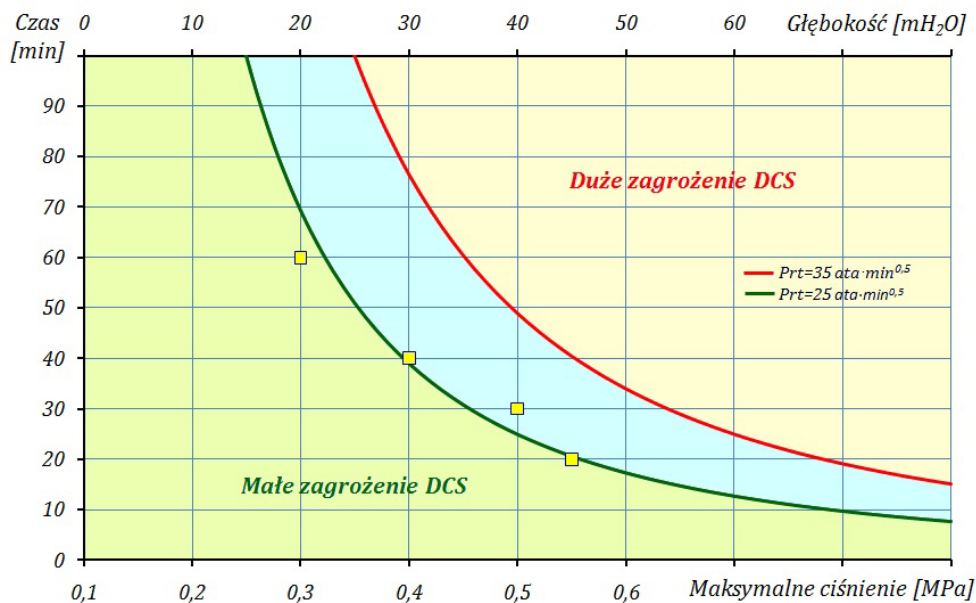
Table 1

Comparison of selected air profiles of direct decompressions adopted by the U.S. Navy (Direction of Commander, Naval Sea Systems Command, 2008) with *Hempelmann's* formula for the value  $Prt = p \cdot \sqrt{\tau} = 480 \text{ fsw} \cdot \sqrt{\text{min}}$

Depth	Exposure time according to <i>US Navy</i>	Calculated time	Time difference	Percentage time difference
$H$	$\tau$	$\tau_{obl}$	$\Delta\tau$	$\Delta\tau_{\%}$
[fsw]	[min]	[min]	[min]	[%]
50	92	92	0	0
55	74	76	2	3
60	60	64	4	7
70	48	47	1	2
80	39	36	3	8
90	30	28	2	5
100	25	23	2	8
110	20	19	1	5
120	15	16	1	7
$\tau_{obl} = \left( \frac{480 \text{ fsw} \cdot \sqrt{\text{min}}}{p} \right)^2$ ; $\Delta\tau =  \tau - \tau_{obl} $ ; $\Delta\tau_{\%} = 100\% \cdot \frac{\Delta\tau}{\tau}$				

<sup>28</sup> till the maximum time of **100 min**; subsequent attempts to apply similar rules to saturated dives were also successful (Behnke A.R., 1979)

<sup>29</sup> zero-decompression diving



Rys.6. Zakresy zagrożenia **DCS** dla ekspozycji nitroksowych z naniesionymi, proponowanymi ograniczeniami czasu trwania pojedynczego nurkowania dla aparatu typu CRABE przy wykorzystaniu formuły  $Prt$  według *Imberta* (Imbert J.P., Hugon J., 2004)

Miarę  $Prt$  wykorzystywano przy badaniach nad zagrożeniem **DCS** na *Morzu Północnym* prowadzonymi na zlecenie *British Department of Energy*, jako wskaźnik obciążenia dekompresyjnego (Shields T.G., Lee W.B., 1986; Ashida H., Ikeda T., Tikuisis P., Nishi R. Y., 2005; Imbert J.P., Hugon J., 2004).. Umiarkowanymi wartościami zagrożenia  $p \cdot \sqrt{t}$  są uznawane wszystkie te, dla których  $p \cdot \sqrt{t} < 25 \text{ ata} \cdot \text{min}^{0.5}$ , średnimi wartościami  $25 \text{ ata} \cdot \text{min}^{0.5} < p \cdot \sqrt{t} \leq 35 \text{ ata} \cdot \text{min}^{0.5}$  a znacznymi wartościami zagrożenia **DCS** dla  $p \cdot \sqrt{t} > 35 \text{ ata} \cdot \text{min}^{0.5}$  (Imbert J.P., Fructus X., 1991; Imbert J.P., Hugon J., 2004). W Akademii, badania te posłużyły do wstępnej oceny zagrożenia podczas projektowania dekompresji dla aparatu CRABE (Kłós R., 2011) – rys.6.

#### INFORMACJE DODATKOWE

Artykuł powstał w ramach realizacji pracy naukowej finansowanej ze środków na naukę w latach 2009 – 2011 jako projekt badawczy rozwojowy Nr O R00 0001 08, pt. „Projektowanie dekompresji w misjach bojowych”.



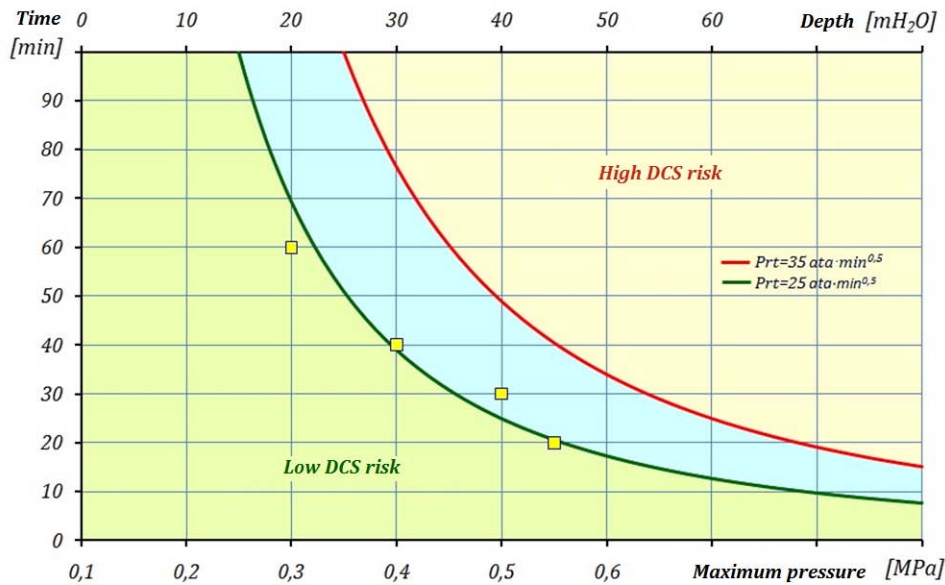


Fig.6 Ranges of DCS risk for nitrox exposures with marked proposed time limits of a single diving for the CRABE, using  $Prt$  formula by Imbert (Imbert J.P., Hugon J., 2004).

$Prt$  measure was used in studies of *DCS* risk in the *North Sea* carried out on behalf of the *British Department of Energy*, as an indicator of decompression load (Shields T.G., Lee W.B., 1986; Ashida H., Ikeda T., Tikuisis P., Nishi R. Y., 2005; Imbert J.P., Hugon J., 2004). As moderate values of risk  $p \cdot \sqrt{t}$  we consider all those for which  $p \cdot \sqrt{t} < 25 \text{ ata} \cdot \text{min}^{0.5}$ , as mean values  $25 \text{ ata} \cdot \text{min}^{0.5} < p \cdot \sqrt{t} \leq 35 \text{ ata} \cdot \text{min}^{0.5}$  and as significant values of *DCS* risk  $p \cdot \sqrt{t} > 35 \text{ ata} \cdot \text{min}^{0.5}$  (Imbert J.P., Fructus X., 1991; Imbert J.P., Hugon J., 2004). In the Academy, these studies were used for preliminary risk assessment during the design of the decompression apparatus CRABE (Kłós R., 2011) - Figure 6.

#### ADDITIONAL INFORMATION

The paper was written as part of the developmental research project no. O R00 0001 08, called "Decompression design in combat missions", which was carried out as part of a funded scientific work in the years 2009-2011.

## LITERATURA/BIBLIOGRAPHY

1. Ashida H., Ikeda T., Tikuisis P., Nishi R. Y. 2005. Relationship between two different functions derived from diffusion-based decompression theory. *Undersea Hyperbaric Medicine*. 2005, Tom 32, strony 429-435.
2. Batuner Ł.M., Pozin M.J. 1956. *Metody matematyczne w technice chemicznej*. Warszawa : Państwowe Wydawnictwa Techniczne, 1956. 517.62.
3. Behnke A.R. 1979. The square-root principle in the calculation of one-stage (no-stop) decompression tables. *Undersea Biomedical Research*. No.4, 1979, Tom Vol. 6, strony 357-365.
4. Carslaw H.S., Jaeger J.C. reprint 2008. *Conduction of heat in solids*. Oxford : MPG Books Group, Bodmin and King's Lynn, reprint 2008. ISBN 978-0-19-853368-9.
5. Direction of Commander, Naval Sea Systems Command. 2008. *U.S. Navy Diving Manual: rev.6* . Washington : Government Printing Office, 2008. SS521-AG-PRO-010 U.S..
6. Gernhardt M. L. 1991. *Development and evaluation of a decompression stress index based on tissue bubble dynamics: Praca doktorska*. Philadelphia : Department of Bioengineering of the University of Pennsylvania, 1991. Report No 01-01-1991.
7. Gray M.C. 1925. Particular Solutions of the Equation of Conduction of Heat in One Dimension. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*. 1925, Tom 43, strony 50-62.
8. Hempelman H. V. 1975. Decompression theory: British Practice. [aut. książki] Bennett P.B. and Elliott D.H. *The physiology and medicine of diving and compressed air work*. London : Baillière Tindall, 1975.
9. Imbert J.P., Fructus X. 1991. Short and repetitive decompressions in air diving procedures: the commercial diving experience. [aut. książki] American Academy of Underwater Sciences. *Proceedings of Repetitive Diving Workshop*. Durham, North Carolina : DUKE University Medical Center, 1991, strony 63-72.
10. Imbert J.P., Hugon J. 2004. In Search of Models Behind Successful Decompressions. [aut. książki] SJacquet. *Les Tables de Decompression, MT92*. Banyuls, Rosselló, Catalunya Nord : Stage de Plongée Scientifique, 2004, strony 18-32.
11. Karaśkiewicz E. 1976. *Zarys teorii wektorów i tensorów* . Warszawa : Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1976.
12. Kembłowski Z., Michałowski S., Strumiłło Cz. Zarzyski R. 1985. *Podstawy teoretyczne inżynierii chemicznej*. Warszawa : Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, 1985. ISBN 83-204-0649-8.
13. Kłós R. 2011. *Możliwości doboru dekompresji dla aparatu nurkowego typu CRABE - Założenia do nurkowań standardowych i eksperymentalnych*. Gdynia : Polskie Towarzystwo Medycyny i Techniki Hiperbarycznej, 2011. ISBN 978-83-924989-4-0.
14. Pigoń K., Ruziewicz Z. 2007. *Chemia Fizyczna*. Warszawa : Wydawnictwo Naukowe PWN, 2007. ISBN 978-83-01-15055-6.
15. Shields T.G., Lee W.B. 1986. *The incidence of decompression sickness arising from commercial offshore air-diving operations in the UK sector of the North Sea during 1982/83. Report to the UK Department of Energy*. Sheffield : Health and Safety Executive, 1986. OTO 97812.
16. Wienke B.R. 1989. Tissue gas exchange models and decompression computations: a review. *Undersea Biomedical Research*. 1989, Tom 16, 1.