

MODEL ANALITYCZNY EFEKTU SAMOROZGRZANIA W PŁYTKACH PROSTOKĄTNYCH Z LAMINATÓW POLIMEROWYCH PODCZAS GNĄCYCH OBCIĄŻEŃ HARMONICZNYCH

ANALYTICAL MODEL OF THE SELF-HEATING EFFECT IN POLYMERIC LAMINATED RECTANGULAR PLATES DURING BENDING HARMONIC LOADING

Efekt samorozgrzania, spowodowany dyssypowaną energią podczas drgań niewspółfazowych pomiędzy amplitudami naprężeń i odkształceń, jest ważnym zjawiskiem w laminatach polimerowych. Wzrost temperatury samorozgrzania w laminatach polimerowych może być niebezpieczny podczas eksploatacji, gdyż większość polimerów cechuje się niską temperaturą zeszklenia i jednocześnie niskim współczynnikiem przewodzenia ciepła. Powoduje to kumulowanie ciepła w strukturze i obniżenie właściwości materiałowych laminatu. Z tego względu zachowanie laminatów polimerowych podczas procesu samorozgrzania powinno być zbadane. W niniejszym artykule rozpatrzono efekt samorozgrzania laminatowych płyt prostokątnych poddanych prostemu zginaniu podczas harmonicznego obciążenia wymuszonych jako zadanie dwuwymiarowe. Rozpatrzono cztery przypadki prostego zginania płyt z różnymi warunkami brzegowymi. Rozwiązanie zagadnienia otrzymano dla termicznego stanu ustalonego i przedstawiono w postaci podwójnych nieskończonych szeregów trygonometrycznych. Pokazano przykłady obliczeń numerycznych dla badanych przypadków oraz zbadano wpływ parametrów obciążenia na wartości temperatury samorozgrzania.

Słowa kluczowe: eksploatacja laminatów, efekt samorozgrzania, dyssypacja energii.

Self-heating effect, caused by energy dissipation during out-of-phase oscillations between stress and strain amplitudes, is an important phenomenon in polymer-based laminates. An increase of self-heating temperature in polymer-based laminates can be dangerous, because most polymers feature low glass-transition temperature and simultaneously low heat transfer coefficient. It causes the accumulation of heat the decreases of the material properties of the laminate. Therefore, the behaviour of polymer-based laminates during self-heating should be examined. In this paper the self-heating effect in laminated rectangular plates subjected to pure bending during harmonic forced loading was examined as a two-dimensional problem. In the examination four cases of pure bending of plates with different mechanical boundary conditions were considered. The examination revealed a solution of the problem for the thermal steady state and presented as double trigonometric infinite series. Numerical examples of temperature distribution were shown and the influence of loading parameters on self-heating temperature values was concluded.

Keywords: laminates exploitation, self-heating effect, energy dissipation.

1. Wstęp

Problem predykcji termomechanicznego zachowania laminatów polimerowych poddanych harmonicznemu zginaniu powstaje w wielu odpowiedzialnych zastosowaniach inżynierskich, zwłaszcza w przemyśle samochodowym i lotniczym. Podczas długotrwałych harmonicznymi obciążeniami polimery wykazują zachowanie lepkosprężyste, które może być scharakteryzowane pętlą histerezy i procesami dyssypacyjnymi. Dyssypowana energia powoduje efekt samorozgrzania i wzrost temperatury, gdyż niskie wartości współczynników rozszerzalności cieplnej większości polimerów powodują kumulację ciepła w strukturze kompozytowej. Dane zjawisko jest niebezpieczne w przypadkach, gdy zachodzi niestabilność termiczna, ze względu na niskie wartości temperatury zeszklenia, i może spowodować katastroficzne skutki [11]. Jednak w wielu przypadkach laminaty pozostają w ustalonym stanie termicznym, przy czym ich temperatura osiąga różne wartości w zależności od warunków brzegowych i obciążen. Z tego względu zachowanie laminatów polimerowych w stanie ustalonym powinno być zbadane biorąc pod uwagę różne warunki pracy.

1. Introduction

The problem of prediction of the thermomechanical behaviour investigation of polymer-based laminates subjected to harmonic bending arises in many responsible engineering applications, especially in the automotive, civil and aircraft building industries. During prolonged harmonic loading polymers reveal viscoelastic behaviour, which can be described by hysteresis loop and dissipative processes. Dissipated energy causes self-heating effect and a rise in temperature, because low values of thermal expansion coefficients of most polymers cause heat accumulation in the composite structure. This phenomenon is quite dangerous in cases where thermal instability occurs because of low glass-transition temperature value and can cause catastrophic consequences [11]. However, in many cases of laminates remain in a steady state and their temperature achieves different values depending on boundary conditions and loads. Therefore, behaviour of polymer-based laminates in steady state must be investigated considering different operational states.

W związku z szybkim rozwojem materiałów kompozytowych znalazły one wiele zastosowań praktycznych. Decydujące znaczenie laminatów polimerowych może być zaobserwowane w inżynierii aerokosmicznej. Do zalet ich stosowania można zaliczyć dużą sztywność, dobre tłumienie drgań, odporność na korozję oraz obojętność elektromagnetyczną. Jednak procesy dyssypacyjne podczas cyklicznych obciążeń elementów wykonanych z laminatu w czasie ich eksploatacji mogą spowodować wzrost temperatury struktury. Gdy zachodzi taki proces następuje spadek sztywności, co wywołuje wystąpienie mikropeknięć i powoduje samorozgrzanie w miejscu uszkodzeń [13]. Efekt samorozgrzania powstaje także w elementach silników turboodrzutowych [21], co powinno być wzięte pod uwagę na etapie ich projektowania. Problem samorozgrzania powstaje we wszystkich konstrukcjach mechanicznych, gdzie obserwowane są powtarzające się naprężenia o dostatecznie dużych wartościach. Na przykład, pęknięcia zmęczeniowe w wentylatorach śmigłowych i łopatkach turbin są intensyfikowane przez wzrost temperatury samorozgrzania [1]. Podobny problem występuje w turbinach wiatrowych. W przypadkach, gdy łopaty drgają na częstości rezonansowej znacznie wzrastają amplitudy i dochodzi do samorozgrzania. Pewne badania zmęczeniowe z uwzględnieniem samorozgrzania były przeprowadzone w Montana State University [20]. Wyniki wskazują na spadek liczby cykli do zniszczenia oraz szybki spadek krzywej σ -N w porównaniu do struktur o niezmienniej temperaturze. Warunki cyklicznych obciążeń występują w przekładniach. W związku z zastosowaniem materiałów polimerowych przy konstrukcji przekładni (szczególnie w robotyce) występują w nich procesy dyssypacyjne. Zęby kół zębatych dyssypują ciepło podczas pracy, co skutkuje utratą sztywności. Często do uszkodzenia dochodzi przed okresem przeglądów i remontów [18]. Kontrola temperatury struktury jest bardzo ważna w przypadku zbiorników paliwowych wykonanych z kompozytów polimerowych. Badania przeprowadzone przez Boyarova [2] wykazują, że nawet przy nieznacznym wzroście temperatury (włącznie z samorozgrzaniem) może dojść do samozapłonu i wybuchu zbiornika.

Badania dotyczące efektu samorozgrzania były zapoczątkowane przez Ratnera i Korobova [19]. W swoich pracach autorzy wykazali zależności pomiędzy rozgrzaniem polimeru i zmianą kąta fazowego pomiędzy amplitudami naprężeń i odkształceń. Badania teoretyczne w tym zakresie były zapoczątkowane przez Karnaukhova i Senchenkova. Autorzy zaproponowali ogólne równania termolepkosprężystości dla cyklicznych odkształceń polimerów [23]. W swoich pracach autorzy przedstawili szczególnie przypadki efektu samorozgrzania dla różnych układów jednowymiarowych. W szczególności autorzy zbadali zachowanie termomechaniczne belek pryzmatycznych [14], nieliniowe rozgrzanie dyssypacyjne belek [22], samorozgrzania płyt o zmiennej grubości [24]; szereg ich prac jest poświęcony walcem obciążonym osiowo [7]. W swojej pracy [25] Senchenkov zaproponował równania konstytutywne sprzężonej lepko-sprężystości w sformułowaniu pełnym i aproksymacyjnym dla różnych modeli geometrycznych. Autorzy także sformułowali podejście aproksymacyjne opisu zachowania lepko-sprężystego układu na podstawie modułów zespolonych. Problem samorozgrzania był także rozpatrywany przez Dinzarta i Molinariego. Autorzy badali układy jednowymiarowe obciążone osiowo i cyklicznie poddane prostemu zginaniu [3,4] w stanie ustalonym i w stanie nieustalonym (na podstawie eksperymentów).

Due to the intensive development of composite materials they found many practical applications. Crucial importance of polymer-based laminates could be observed in the aerospace engineering. The advantages of their using include high stiffness, good vibration damping, corrosion resistance and electromagnetic transparency. However, dissipative processes connected with cyclic loading during exploitation of laminate elements could rise up the temperature of the structure. If it happens, the stiffness decrease occurs that induces the appearance of microcracks, which cause the self-heating at the damage location [13]. The self-heating effect also arises in parts of solid-propellant engines [21], which must be taken into consideration on the constructing stage. The problem of the self-heating appears in all the mechanical constructions, where repeated stresses with sufficiently high values are observed. For example, fatigue-induced cracks in helicopter propeller fans and turbine blades were intensified by the self-heating temperature rise [1]. The same problem appears in wind turbines. In cases when the blades vibrate on the resonant frequency the amplitudes rise extremely and cause the hysteretic heating. Some research of fatigue process considering self-heating was carried out at the Montana State University [20]. Results show decrease of the number of cycles to the breakdown and rapid decrease of the S-N curve in comparison with the structure, whose temperature is stable. The cyclic loading conditions occur in gears. Due to the polymeric materials used for gears construction (especially in robotics) they are characterized by dissipative processes. The gear tooth dissipates heat during service, which results in the stiffness losses. Often the breakdown is reached before the maintenance and repairs [18]. The control of the structure temperature is extremely important in case of polymer-based composite fuel containers. Research provided by Boyarov [2] shows, that even slight increase of the temperature (including self-heating) may cause spontaneous ignition and explosion of the container.

The research on self-heating effect was introduced by Ratner and Korobov [19]. In their works they revealed dependencies between polymer heating and the change in phase angle between stress and strain amplitudes. Theoretical research in this area was established by Karnaukhov and Senchenkov. They proposed governing equations of thermoviscoelasticity in [23] for periodic deformation of polymers. In their works they presented particular cases of self-heating effect for significant one-dimensional systems. In particular, they investigated a prism thermomechanical behaviour [14], beam nonlinear dissipative heating [22], vibrational heating of plates with variable thickness [24], and a series of their works concentrated on axially loaded cylinders [7]. Senchenkov in his work [25] revealed constitutive equations in complete and approximate formulation of coupled viscoelasticity for significant geometrical models. They also formulated an approximate approach using complex moduli for describing viscoelastic behaviour of the system. The problem of self-heating was also discovered by Dinzart and Molinari. They investigate axially cyclic loaded one-dimensional systems subjected to simple bending [3,4] for steady state and (experimentally based) non-steady state.

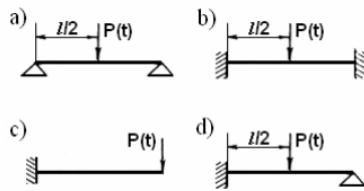
Author's works were concentrated on describing the thermoviscoelastic behaviour of polymer-based laminates and its application to their fatigue and fracture. In [8] the self-heating of the cross-section of plates is dealt with, which can be simplified to one-dimensional systems in a steady state based on homogenized model of a laminate. Also, the laminate behavio-

Prace autora skupiają się na opisie zachowania termolepkosprężystego laminatów polimerowych i jego zastosowaniu do modeli zmęczeniowych i wytrzymałościowych. W pracy [8] zbadano efekt samorozgrzania w przekroju poprzecznym płyt w stanie ustalonym z zastosowaniem homogenizacyjnego modelu laminatu, które mogą być uproszczone do układów jednowymiarowych. Zbadano także zachowanie laminatu w stanie ustalonym i nieustalonym z zastosowaniem modeli numerycznych [10]. Opracowane modele numeryczne były zastosowane do opisu zmęczenia [9] oraz oceny stopnia degradacji laminatów [11].

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie wyników badań autora w zakresie samorozgrzania polimerowych laminatów lepkosprężystych płyt prostokątnych podczas wymuszonych obciążeń harmonicznym z różnymi przypadkami mechanicznych warunków brzegowych poddanych prostemu zginaniu jako dwuwymiarowe sprzężone zagadnienie termolepkosprężystości. Dla wyznaczenia naprężeń i rozkładu temperatury zastosowano metodę superpozycji. Przedstawiono rozwiązanie równania Poissona przy pomocy szeregów Fouriera dla otrzymania rozkładu temperatury w stanie ustalonym. Termiczne zagadnienie brzegowe rozwiązano numerycznie oraz zbadano zbieżność otrzymanych szeregów uwzględniając zastosowanie do obliczeń inżynierskich. Przykłady numeryczne rozkładu temperatury przedstawiono dla laminatu epoksydowego wzmocnionego włóknem szklanym. Otrzymany model pozwoli na wyznaczenie przedziałów bezpiecznej eksploatacji elementów wykonanych z kompozytów polimerowych i prognozowanie ich trwałości zmęczeniowej.

2. Sformułowanie zagadnienia

Rozpatrzono prostokątną transversalnie izotropową wielowarstwową cienką płytę z liczbą warstw k w świetle klasycznej teorii laminacji [6] o długości l , szerokości b , grubości h i grubości warstwy h_k . Płyta jest obciążona harmonicznymi siłą $P(t)$. Rozpatrzono cztery przypadki prostego zginania: obustronnie podparta (rys.1a), obustronnie utwierdzona (rys.1b), wspornikowa (rys.1c) oraz jednostronnie utwierdzona i jednostronnie podparta (rys.1d) płyta na krawędziach przeciwnych. Z tego względu warunki brzegowe mogą być przedstawione jako jednowymiarowe. Mechaniczne warunki brzegowe i początkowe dla powyższych przypadków mogą być przedstawione jako (1)-(4) i (5) odpowiednio:



Rys. 1. Rozpatrywane przypadki mechanicznych warunków brzegowych
 Fig. 1. Considered types of mechanical boundary conditions

ur was investigated in steady and non-steady states using numerical models [10]. The developed numerical models were used for describing fatigue [9] and degradation degree evaluation of laminates [11].

The aim of this paper is to present the results of the author’s investigation of self-heating of the polymer- based laminate viscoelastic rectangular plates during forced harmonic loading with significant cases of boundary conditions subjected to simple bending within a two-dimensional coupled problem of thermoviscoelasticity. The superposition method was used for determining stress and temperature distributions. A solution of Poisson’s equation using a Fourier series for describing steady state temperature distribution was presented. The thermal boundary-value problem was solved numerically and the series convergence was investigated while taking into account engineering computations. Also, numerical examples of temperature distribution were presented for epoxy GRP laminate. The obtained model allows to determine the ranges of safe exploitation of polymer-based composite elements and to predict their fatigue life.

2. Statement of the problem

One consider a rectangular transversal isotropic multilayer thin plate with k layers subjected to classical lamination theory [6] with length l , width b , whole thickness h and thickness of lamina h_k . The plate is loaded harmonically by force $P(t)$. Four cases of simple bending were taken into consideration: double simply supported (fig.1a), double clamped (fig.1b), cantilever (fig.1c) and clamped-simply supported (fig.1d) plates on the opposite edges. Therefore, boundary conditions can be presented as one-dimensional. The mechanical boundary and initial conditions for the above mentioned cases can be presented by (1)-(4) and (5) respectively:

$$w(0, v, t) = 0, \quad w(l, v, t) = 0; \quad D \frac{\partial^3 w(u, v, t)}{\partial u^3} \Big|_{u=l/2} = -P(t) \quad (1)$$

$$w(0, v, t) = 0, \quad w(l, v, t) = 0; \quad D \frac{\partial^3 w(u, v, t)}{\partial u^3} \Big|_{u=l/2} = -P(t) \quad (1)$$

$$w(0, v, t) = 0, \quad \frac{\partial w(u, v, t)}{\partial u} \Big|_{u=0} = 0$$

$$w(l, v, t) = 0, \quad \frac{\partial w(u, v, t)}{\partial u} \Big|_{u=l} = 0 \quad (2)$$

$$w(0, v, t) = 0, \quad \frac{\partial w(u, v, t)}{\partial u} \Big|_{u=0} = 0$$

$$w(l, v, t) = 0, \quad \frac{\partial w(u, v, t)}{\partial u} \Big|_{u=l} = 0 \quad (2)$$

$$D \frac{\partial^3 w(u, v, t)}{\partial u^3} \Big|_{u=l/2} = -P(t)$$

$$D \frac{\partial^3 w(u, v, t)}{\partial u^3} \Big|_{u=l/2} = -P(t)$$

$$w(0, v, t) = 0, \left. \frac{\partial w(u, v, t)}{\partial u} \right|_{u=0} = 0; D \left. \frac{\partial^3 w(u, v, t)}{\partial u^3} \right|_{u=l} = -P(t) \quad (3)$$

$$w(0, v, t) = 0, \quad w(l, v, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial w(u, v, t)}{\partial u} \right|_{u=l} = 0 \quad (4)$$

$$D \left. \frac{\partial^3 w(u, v, t)}{\partial u^3} \right|_{u=\frac{l}{2}} = -P(t) \quad (5)$$

$$w(u, v, 0) = 0 \quad (5)$$

gdzie u i v są współrzędnymi kartezjańskimi, t jest zmienną czasową ($t \geq 0$), D jest zhomogenizowaną sztywnością giętą laminatu, w jest funkcją ugięcia oraz $P(t)$ wyraża się jako:

$$P(t) = P_0 \sin \omega t \quad (6)$$

gdzie P_0 jest siłą statyczną i ω jest częstotliwością kątową.

Homogenizacja laminatu pozwala na jego rozpatrywanie jako układu dwuwymiarowego. Mechaniczne i termiczne warunki brzegowe na grubości laminatu zostały pominięte. Zhomogenizowaną sztywność giętą materiału transwersalnie izotropowego z uwzględnieniem orientacji warstw przedstawiono przez autora w [8] następującym równaniem:

$$D = \frac{1}{36} \sum_{k=1}^n \frac{z_k^3 - z_{k-1}^3}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \left[\cos^2 \varphi_k \sin^2 \varphi_k \left(E_1 + E_2 \nu_{21} (22 + \nu_{21}) - \frac{48G_{12}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \right) + \cos^4 \varphi_k \left(E_1 + E_2 + \frac{G_{12}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \right) + \sin^4 \varphi_k \left(E_1 + E_2 - \frac{G_{12}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \right) \right] \quad (7)$$

gdzie: E_1 i E_2 są modułami Younga, G_{12} jest modułem Kirchhoffa, ν_{12} i ν_{21} są współczynnikami Poissona, z_k jest odległością od płaszczyzny środkowej laminatu do k -tej warstwy oraz φ_k jest orientacją w k -tej warstwie w globalnym układzie współrzędnych.

3. Zachowanie lepkosprężyste laminatu podczas obciążeń harmonicznyc

Zachowanie lepkosprężystego laminatu polimerowego może być przedstawione równaniem Boltzmanna-Volterry [16]:

$$E\varepsilon(t) = \sigma(t) + \int_0^t \Pi(t-\tau) d\tau \quad (8)$$

gdzie E jest momentalnym modułem Younga dla pełzania, $\varepsilon(t)$ jest odkształceniem zależnym od czasu, $\sigma(t)$ jest naprężeniem zależnym od czasu oraz $\Pi(t-\tau)$ jest jądrem relaksacji. Zmiana całkowania τ oznacza czas relaksacji. Rozpatrujemy tensor naprężeń σ_{ij} :

$$\sigma_{ij} = s_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{ij} \delta_{ij} \quad (9)$$

gdzie s_{ij} jest dewiatorem naprężeń i δ_{ij} jest deltą Kroneckera. W rozpatrywanym przypadku indeksy dolne $i=j=1$ przy założeniu prostego zginania (patrz (1)-(4)), i (9) może być uproszczony do postaci:

$$\sigma_{11} = \frac{3}{2} s_{11} \quad (10)$$

$$w(0, v, t) = 0, \left. \frac{\partial w(u, v, t)}{\partial u} \right|_{u=0} = 0; D \left. \frac{\partial^3 w(u, v, t)}{\partial u^3} \right|_{u=l} = -P(t) \quad (3)$$

$$w(0, v, t) = 0, \quad w(l, v, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial w(u, v, t)}{\partial u} \right|_{u=l} = 0 \quad (4)$$

$$D \left. \frac{\partial^3 w(u, v, t)}{\partial u^3} \right|_{u=\frac{l}{2}} = -P(t) \quad (5)$$

$$w(u, v, 0) = 0 \quad (5)$$

where u and v are Cartesian coordinates, t is time variable ($t \geq 0$), D is homogenized flexural rigidity of laminate, w is the deflection function and $P(t)$ is:

$$P(t) = P_0 \sin \omega t \quad (6)$$

where P_0 is the static force and ω is the angular frequency.

The homogenization of the laminate allows one to consider it as a two-dimensional system. Mechanical and thermal boundary conditions on the laminate thickness were not taken into consideration. The homogenized flexural rigidity for transversal isotropic material while taking into consideration laminas orientation was expressed by the author in [8] in the equation:

where: E_1 and E_2 are Young's moduli, G_{12} is the shear modulus, ν_{12} and ν_{21} are Poisson's ratios, z_k is the distance from the mid-plane to k -th lamina and φ_k is the k -th lamina orientation according to the global coordinate system.

3. Viscoelastic behaviour of laminate during harmonic loading

Behaviour of viscoelastic polymer-based laminate can be expressed by Boltzmann-Volterra equation [16]:

$$E\varepsilon(t) = \sigma(t) + \int_0^t \Pi(t-\tau) d\tau \quad (8)$$

where E is the instantaneous Young's modulus for creep, $\varepsilon(t)$ is the time-dependent strain, $\sigma(t)$ is the time-dependent stress and $\Pi(t-\tau)$ is the relaxation kernel. Integration variable τ denotes relaxation time. Considering the stress tensor σ_{ij} :

$$\sigma_{ij} = s_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{ij} \delta_{ij} \quad (9)$$

where s_{ij} is the stress deviator and δ_{ij} is the Kronecker's delta. In the investigated case the subscripts $i=j=1$ under the assumption of simple bending (see (1)-(4)), and (9) can be simplified to:

$$\sigma_{11} = \frac{3}{2} s_{11} \quad (10)$$

Dewiator naprężeń s_{11} przy uwzględnieniu (7), (8) i zależności od temperatury może być przedstawiony jako (por. [4]):

$$s_{11} = 2D_e(\theta)\varepsilon_{11} + 2\int_0^t D(t-\tau, \theta)\dot{\varepsilon}_{11} d\tau \quad (11)$$

gdzie $D(t-\tau, \theta)$ jest resolwentą jądra w odniesieniu do (8), a θ jest temperaturą. Moduł równowagi $D_e(\theta)$ jest równy zhomogenizowanej sztywności giętej laminatu D w przypadku, gdy $t = 0$, co potwierdza uogólniony model lepkosprężystości Maxwella biorąc pod uwagę zależność od temperatury:

$$D(t, \theta) = D_e + \sum_{i=1}^I D_i(\theta) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (12)$$

gdzie I jest liczbą elementów Maxwella.

Podczas obciążeń harmonicznym zmiany temperatury są równoważne ze zmianami odkształceń i biorąc pod uwagę małe zmiany temperatury można uprościć dane wyrażenie w przyszłych rozważaniach do wartości temperatury uśrednionej w cyklu (13).

$$\theta_a(u, v) = \frac{2\pi}{\omega} \int_0^{t+T} \theta(u, v, t) dt \quad (13)$$

gdzie T oznacza okres cyklu. Na podstawie powyższych założeń dewiator naprężeń może być przedstawiony jako:

$$s_{11} = w(u, v) \left[D_e(\theta_a) + \varepsilon_{\max} \hat{D}(\omega, \theta_a) \right] \quad (14)$$

gdzie $w(u, v)$ jest funkcją ugięcia (rozpatrywanie stanu ustalonego zjawiska pozwala na pominięcie zależności od czasu), ε_{\max} – maksymalne ugięcie oraz $\hat{D}(\omega, \theta_a)$ – sztywność zespolona, która może być rozłożona następująco:

$$\hat{D}(\omega, \theta_a) = D'(\omega, \theta_a) + iD''(\omega, \theta_a) \quad (15)$$

$$D'(\omega, \theta_a) = \omega \int_0^{\infty} D(t, \theta_a) \sin(\omega t) dt \quad (16)$$

$$D''(\omega, \theta_a) = \omega \int_0^{\infty} D(t, \theta_a) \cos(\omega t) dt$$

W wyrażeniach (16) $D'(\omega, \theta_a)$ i $D''(\omega, \theta_a)$ oznaczają odpowiednio sztywność zachowawczą i stratną, które przedstawiają składową energii sprężystej i składową energii lepkiej w nawiązaniu do modelu lepkosprężystości Maxwella.

Biorąc pod uwagę rozpatrywane przypadki warunków brzegowych (1)-(4) i obciążenie harmoniczne (6) odkształcenia laminatu mogą być przedstawione jako:

$$\varepsilon_{11}(u, v, t) = \varepsilon_{\max} w(u, v) \sin \omega t \quad (17)$$

gdzie ugięcie maksymalne oraz funkcje ugięcia dla rozpatrywanych przypadków mogą być przedstawione zależnościami (18)-(21) na podstawie odpowiednio [17] i [15]:

$$\text{SS-F-SS-F: } \varepsilon_{\max} = \frac{Pl^3}{48D} \quad w(u, v) = \sin \frac{\pi u}{l} \quad (18)$$

$$\text{C-F-C-F: } \varepsilon_{\max} = \frac{Pl^3}{192D} \quad w(u, v) = \cos \frac{2\pi u}{l} - 1 \quad (19)$$

$$\text{C-F-F-F: } \varepsilon_{\max} = \frac{Pl^3}{3D} \quad w(u, v) = \cos \frac{\pi u}{2l} - 1 \quad (20)$$

The deviatoric stress s_{11} while taking into consideration (7), (8) and temperature dependence can be presented as (cf. [4]):

$$s_{11} = 2D_e(\theta)\varepsilon_{11} + 2\int_0^t D(t-\tau, \theta)\dot{\varepsilon}_{11} d\tau \quad (11)$$

where $D(t-\tau, \theta)$ is the resolvent kernel with reference to (8) and θ is the temperature. The equilibrium modulus $D_e(\theta)$ is equal to homogenized flexural rigidity of laminate D in the case of $t = 0$, which originates from the generalized Maxwell model of viscoelasticity while taking into account the temperature dependence:

$$D(t, \theta) = D_e + \sum_{i=1}^I D_i(\theta) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (12)$$

where I is the number of Maxwell elements.

During harmonic loading the temperature oscillations are equivalent to strain oscillations and according to small temperature variation the cycle-averaged temperature (13) can be assumed in further investigations.

$$\theta_a(u, v) = \frac{2\pi}{\omega} \int_0^{t+T} \theta(u, v, t) dt \quad (13)$$

where T denotes cycle period. Following the assumptions mentioned before the deviatoric stress can be expressed as:

$$s_{11} = w(u, v) \left[D_e(\theta_a) + \varepsilon_{\max} \hat{D}(\omega, \theta_a) \right] \quad (14)$$

where $w(u, v)$ is the deflection function (investigation of steady-state of the phenomenon allows one to neglect time dependency), ε_{\max} maximal deflection and $\hat{D}(\omega, \theta_a)$ is the complex rigidity, which decomposes as follows:

$$\hat{D}(\omega, \theta_a) = D'(\omega, \theta_a) + iD''(\omega, \theta_a) \quad (15)$$

$$D'(\omega, \theta_a) = \omega \int_0^{\infty} D(t, \theta_a) \sin(\omega t) dt \quad (16)$$

$$D''(\omega, \theta_a) = \omega \int_0^{\infty} D(t, \theta_a) \cos(\omega t) dt$$

In the expressions (16) $D'(\omega, \theta_a)$ and $D''(\omega, \theta_a)$ are storage and loss rigidities respectively, which denotes the elastic energy component and viscous energy component with respect to the Maxwell model of viscoelasticity.

The strain of laminate, while taking into consideration the investigated cases of boundary conditions (1)-(4) and harmonic loading (6), can be expressed as:

$$\varepsilon_{11}(u, v, t) = \varepsilon_{\max} w(u, v) \sin \omega t \quad (17)$$

where maximal deflection and deflection functions for investigated cases can be presented by (18)-(21) following to [17] and [15] respectively:

$$\text{SS-F-SS-F: } \varepsilon_{\max} = \frac{Pl^3}{48D} \quad w(u, v) = \sin \frac{\pi u}{l} \quad (18)$$

$$\text{C-F-C-F: } \varepsilon_{\max} = \frac{Pl^3}{192D} \quad w(u, v) = \cos \frac{2\pi u}{l} - 1 \quad (19)$$

$$\text{C-F-F-F: } \varepsilon_{\max} = \frac{Pl^3}{3D} \quad w(u, v) = \cos \frac{\pi u}{2l} - 1 \quad (20)$$

$$\text{C-F-SS-F: } \varepsilon_{\max} = \frac{7Pl^3}{768D} \quad w(u, v) = \cos \frac{3\pi u}{2l} - \cos \frac{\pi u}{2l} \quad (21)$$

Tutaj F, C i SS oznaczają odpowiednio warunki brzegowe dla swobodnej, utwierdzonej i podpartej krawędzi.

4. Równanie przewodzenia ciepła i rozwiązanie zagadnienia samorozgrzania

Rozpatrzmy dwuwymiarowe zagadnienie samorozgrzania laminatu w stanie ustalonym. Zakładając jednorodność materiału w sensie mechanicznym i termicznym i niezależność temperatury stałych termomechanicznych można wyrazić przewodzenie ciepła równaniem Poissona:

$$-\lambda \left(\frac{\partial^2 \theta_a(u, v)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta_a(u, v)}{\partial v^2} \right) = Q_{sh} \quad (22)$$

gdzie λ – współczynnik przewodzenia ciepła, Q_{sh} – energia dysypowana w jednostce czasu i w jednostce objętości ośrodka.

Na podstawie powierzchni pętli histerezy dyssypowana energia może być wyrażona jako:

$$Q_{sh} = \frac{2\pi}{\omega} \int_0^T \sigma_{11} \dot{\varepsilon}_{11} dt \quad (23)$$

gdzie każdy punkt płyty jest źródłem ciepła o stałej wydajności.

Podstawiając (14) do (22) i biorąc pod uwagę (10) i (17) można zapisać równanie energii dyssypowanej w postaci:

$$Q_{sh} = \frac{3}{2} \omega \varepsilon_{\max}^2 w^2(u, v) D''(\omega, \theta_a) \quad (24)$$

Następnie założono termiczne warunki brzegowe w celu uwzględnienia wymiany ciepła z otoczeniem:

$$\lambda \frac{\partial \theta_a(u, v)}{\partial u} \Big|_{u=0} = \lambda \frac{\partial \theta_a(u, v)}{\partial u} \Big|_{u=l} = -\alpha \Delta \theta_a(u, v), \quad v \in (0, b) \quad (25)$$

$$\lambda \frac{\partial \theta_a(u, v)}{\partial v} \Big|_{v=0} = \lambda \frac{\partial \theta_a(u, v)}{\partial v} \Big|_{v=b} = -\alpha \Delta \theta_a(u, v), \quad u \in (0, l)$$

gdzie α – konwekcyjny współczynnik przenikania ciepła, $\Delta \theta_a(u, v)$ – temperatura rozgrzania.

Zgodnie z twierdzeniem Fouriera poszukiwana funkcja $\Delta \theta_a(u, v)$ może być wyrażona przez podwójny nieskończony szereg trygonometryczny:

$$\Delta \theta_a(u, v) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos M_m u \cos N_n v \quad (26)$$

Uwzględniając symetrię termicznych warunków brzegowych, poszukiwana funkcja jest jednakowa ze względu na u i v ; dlatego szeregi trygonometryczne mogą być rozwinięte tylko przy pomocy cosinusów.

Z termicznych warunków brzegowych (25) otrzymano [12]:

$$M_m = \frac{\mu_m}{l} \quad N_n = \frac{\gamma_n}{b} \quad \mu_m, \gamma_n > 0 \quad (27)$$

gdzie μ_m i γ_n są kolejnymi pierwiastkami równań (28), które sabelaryzowano w [5].

$$\text{C-F-SS-F: } \varepsilon_{\max} = \frac{7Pl^3}{768D} \quad w(u, v) = \cos \frac{3\pi u}{2l} - \cos \frac{\pi u}{2l} \quad (21)$$

Here F, C and SS denotes boundary conditions: free, clamped and simply supported edges respectively.

4. Heat transfer equation and solution of self-heating problem

Let us consider a two-dimensional problem of self-heating in the laminate in a steady state. Under the assumptions of material homogeneity in mechanical and thermal means and temperature independence of thermomechanical properties we can express the heat transfer by Poisson's equation:

$$-\lambda \left(\frac{\partial^2 \theta_a(u, v)}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \theta_a(u, v)}{\partial v^2} \right) = Q_{sh} \quad (22)$$

where λ is thermal conductivity and Q_{sh} is energy dissipated per unit time and unit volume of the medium.

Based on hysteresis loop area the dissipated energy can be expressed as:

$$Q_{sh} = \frac{2\pi}{\omega} \int_0^T \sigma_{11} \dot{\varepsilon}_{11} dt \quad (23)$$

where each point of the plate is the heat source with constant productivity.

Substituting (14) to (22) and taking into account (10) and (17) one can construct the dissipated energy equation in the form:

$$Q_{sh} = \frac{3}{2} \omega \varepsilon_{\max}^2 w^2(u, v) D''(\omega, \theta_a) \quad (24)$$

Now, one applies thermal boundary conditions for describing heat conduction with surroundings:

$$\lambda \frac{\partial \theta_a(u, v)}{\partial u} \Big|_{u=0} = \lambda \frac{\partial \theta_a(u, v)}{\partial u} \Big|_{u=l} = -\alpha \Delta \theta_a(u, v), \quad v \in (0, b) \quad (25)$$

$$\lambda \frac{\partial \theta_a(u, v)}{\partial v} \Big|_{v=0} = \lambda \frac{\partial \theta_a(u, v)}{\partial v} \Big|_{v=b} = -\alpha \Delta \theta_a(u, v), \quad u \in (0, l)$$

where α is the convective heat transfer coefficient and $\Delta \theta_a(u, v)$ is the heating up temperature.

The investigated function $\Delta \theta_a(u, v)$ according to Fourier's theorem can be expressed as an infinite double trigonometric series:

$$\Delta \theta_a(u, v) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos M_m u \cos N_n v \quad (26)$$

Considering the symmetry of thermal boundary conditions, the investigated function is even regarding u and v ; therefore, the trigonometric series can be expanded only by cosines.

From thermal boundary conditions (25) one obtain [12]:

$$M_m = \frac{\mu_m}{l} \quad N_n = \frac{\gamma_n}{b} \quad \mu_m, \gamma_n > 0 \quad (27)$$

where μ_m and γ_n are subsequent roots of equations (28), whose values were tabulated in [5].

$$\mu \tan \mu = \alpha l \quad \gamma \tan \gamma = \alpha b \quad (28)$$

Biorąc pod uwagę (27) zależność (26) przybiera postać:

$$\Delta \theta_a(u, v) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos \frac{\mu_m u}{l} \cos \frac{\gamma_n v}{b} \quad (29)$$

Współczynniki A_{mn} powinny być dopasowane do (29), aby spełniać równanie (22). Na tej podstawie drugie pochodne równania (29) mogą być wyznaczone i podstawione do (22). Po pewnych przekształceniach współczynniki A_{mn} mogą być otrzymane z poniższej zależności:

$$A_{mn} = \frac{4Q_{sh}}{\lambda} \frac{\sin \mu_m \sin \gamma_n}{\mu_m \gamma_n \left(1 + \frac{\sin 2\mu_m}{2\mu_m}\right) \left(1 + \frac{\sin 2\gamma_n}{2\gamma_n}\right) \left(\frac{\mu_m^2}{l^2} + \frac{\gamma_n^2}{b^2}\right)} \quad (30)$$

Rozwiązanie dla rozkładu temperatury podczas samorozgrzania może być wyprowadzone biorąc pod uwagę równanie (24):

$$\theta_a(u, v) = 6\omega\lambda^{-1}w^2(u, v)\varepsilon_{\max}^2 D''(\omega, \theta_a) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_m \sin \gamma_n \cos \frac{\mu_m u}{l} \cos \frac{\gamma_n v}{b}}{\mu_m \gamma_n \left(1 + \frac{\sin 2\mu_m}{2\mu_m}\right) \left(1 + \frac{\sin 2\gamma_n}{2\gamma_n}\right) \left(\frac{\mu_m^2}{l^2} + \frac{\gamma_n^2}{b^2}\right)} + \theta_0 \quad (31)$$

gdzie θ_0 jest temperaturą otoczenia.

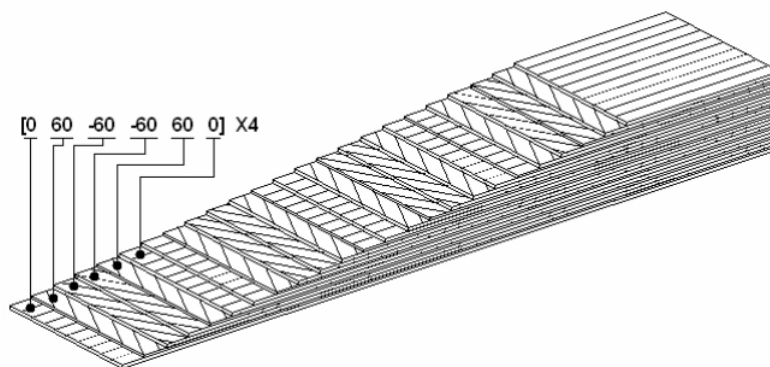
Stosując powyższą zależność dwuwymiarowy rozkład temperatury może być wyznaczony dla wszystkich przypadków warunków brzegowych (1)-(4) przy prostym zginaniu podstawiając do (31) odpowiednie funkcje ugięcia i wartości maksymalnego ugięcia.

5. Przykłady numeryczne

Rozpatrzono 24-warstwowy laminat epoksydowy wzmocniony włóknem szklanym z orientacją włókna przedstawioną wzorem strukturalnym: $[0/60/-60/-60/60/0]_{4S}$ (rys.2), wykonanym w Institut für Leichtbau und Kunststofftechnik, TU Dresden z Epo GmbH BD-Prepreg.

Przyjęto następujące geometryczne, mechaniczne i termomechaniczne właściwości (otrzymane w wyniku eksperymentów lub z raportów Epo GmbH):

$$\begin{aligned} l &= 0.4 \text{ [m]}, \quad b = 0.05 \text{ [m]}, \quad h = 0.00528 \text{ [m]}, \quad h_k = 0.00022 \text{ [m]}, \\ E_1 &= 38.283 \cdot 10^9 \text{ [Pa]}, \quad E_2 = 10.141 \cdot 10^9 \text{ [Pa]}, \quad G_{12} = 3.533 \cdot 10^9 \text{ [Pa]}, \quad \nu_{12} = 0.366 \text{ [-]}, \\ \lambda &= 0.29 \text{ [W/mK]}, \quad \alpha = 10.3 \text{ [W/m}^2\text{K]}, \quad \theta_0 = 293 \text{ [K]}. \end{aligned} \quad (32)$$



Rys. 2. Orientacja warstw w laminacie (wartości w stopniach)
Fig. 2. Layers orientation in the laminate (values in degrees)

$$\mu \tan \mu = \alpha l \quad \gamma \tan \gamma = \alpha b \quad (28)$$

Taking into consideration (27) the dependence (26) takes the form:

$$\Delta \theta_a(u, v) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos \frac{\mu_m u}{l} \cos \frac{\gamma_n v}{b} \quad (29)$$

The A_{mn} coefficients must be matched to (29) so as to satisfy the equation (22). Referring to this, second derivatives of (29) were calculated and substituted to (22). After several transformations the A_{mn} coefficients can be obtained by means of the following formula:

$$A_{mn} = \frac{4Q_{sh}}{\lambda} \frac{\sin \mu_m \sin \gamma_n}{\mu_m \gamma_n \left(1 + \frac{\sin 2\mu_m}{2\mu_m}\right) \left(1 + \frac{\sin 2\gamma_n}{2\gamma_n}\right) \left(\frac{\mu_m^2}{l^2} + \frac{\gamma_n^2}{b^2}\right)} \quad (30)$$

The solution of temperature distribution during self-heating can be constructed while taking into account equation (24):

$$\theta_a(u, v) = 6\omega\lambda^{-1}w^2(u, v)\varepsilon_{\max}^2 D''(\omega, \theta_a) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \mu_m \sin \gamma_n \cos \frac{\mu_m u}{l} \cos \frac{\gamma_n v}{b}}{\mu_m \gamma_n \left(1 + \frac{\sin 2\mu_m}{2\mu_m}\right) \left(1 + \frac{\sin 2\gamma_n}{2\gamma_n}\right) \left(\frac{\mu_m^2}{l^2} + \frac{\gamma_n^2}{b^2}\right)} + \theta_0 \quad (31)$$

where θ_0 is the ambient temperature.

Using this dependence the two-dimensional temperature distribution can be calculated for all cases of boundary conditions (1)-(4) of simple bending by substituting to (31) the appropriate deflection functions and maximal deflection values.

5. Numerical examples

Considering a 24-layered epoxy FRP laminate with fiber orientation given by the structural formula: $[0/60/-60/-60/60/0]_{4S}$ (fig.2), produced in Institut für Leichtbau und Kunststofftechnik of Technical University of Dresden from Epo GmbH BD-Prepreg.

The following geometrical, mechanical and thermomechanical properties (measured in several experiments or given by Epo GmbH reports) were used:

Porównano dominację oporu przewodzenia R_{cond} i oporu konwekcji R_{conv} . Jest to możliwe stosując bezwymiarową liczbę Biota. Termiczne warunki brzegowe trzeciego rodzaju (25) mogą być przedstawione w postaci bezwymiarowej jako:

$$-\frac{\partial \Theta_a}{\partial L} = Bi \Delta \Theta_a \quad (33)$$

gdzie Θ – temperatura bezwymiarowa, L – unormowana długość płyty oraz Bi – liczba Biota w następującej postaci:

$$\Theta_a = \frac{\theta_a - \theta_0}{\theta_0}, L = \frac{u}{l}, Bi = \frac{R_{cond}}{R_{conv}} \text{ lub } Bi = \frac{\alpha l}{\lambda} \quad (34)$$

Uwzględniając (32) i założenia ustalonego przewodzenia ciepła i pominięcie zależności od temperatury stałych termomechanicznych w związku z małymi zmianami temperatury, liczba Biota wynosi 14.2, co oznacza, że opór zewnętrzny ma mały wpływ na proces samorozgrzania.

Do obliczeń przykładów rozkładu temperatury przyjęto parametry (32) oraz wartość początkowej sztywności stratnej D'' równej $6 \cdot 10^6$ [Pa]. Przykładowy rozkład temperatury samorozgrzania dla różnych przypadków mechanicznych warunków brzegowych (patrz rys. 1) przedstawiono na rys. 3. W danym przypadku siła statyczna P_0 wynosi 10 [N] oraz częstotliwość ω wynosi 0.1592 [Hz]. Zależność pomiędzy siłą obciążenia i częstotliwością a temperaturą samorozgrzania także została zbadana. Otrzymane wyniki dla każdego przypadku warunków brzegowych przedstawiono na rys. 4 i rys. 5. W przypadku zmiany amplitudy obciążenia wartość ω jest równa 0.1592 [Hz], w przypadku zmiany częstotliwości wartość P_0 jest równa 10 [N]. Na rys. 4 i rys. 5 $\theta_{a,max}$ oznacza maksymalną temperaturę samorozgrzania. Zakres wartości siły obciążającej wybrano na podstawie możliwości urządzeń pomiarowych, a zakres częstotliwości wybrano ze względu na zakresy występujące w praktyce [21].

The domination of conduction R_{cond} and convection R_{conv} resistances were compared. It can be possible using dimensionless Biot number approach. The third kind thermal boundary conditions (25) can be presented in dimensionless form as:

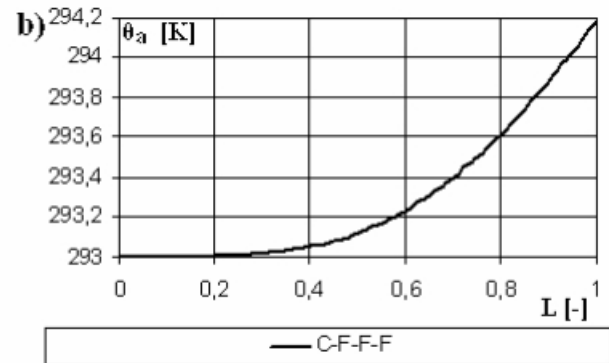
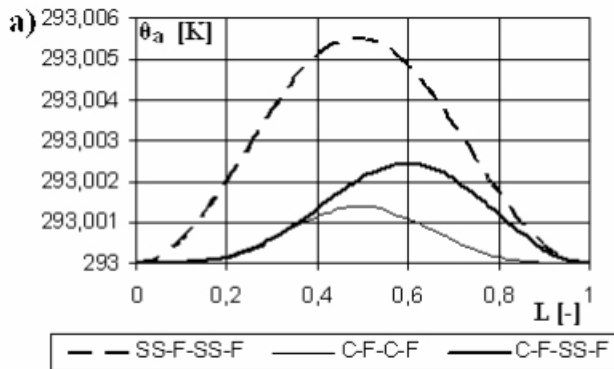
$$-\frac{\partial \Theta_a}{\partial L} = Bi \Delta \Theta_a \quad (33)$$

where Θ is the dimensionless temperature, L is the normalized length of plate and Bi is the Biot number, which were given by:

$$\Theta_a = \frac{\theta_a - \theta_0}{\theta_0}, L = \frac{u}{l}, Bi = \frac{R_{cond}}{R_{conv}} \text{ or } Bi = \frac{\alpha l}{\lambda} \quad (34)$$

Considering (32) and assumptions of steady-state heat transfer and the negligence of thermal properties temperature-variability due to small changes of temperature the Biot number is equaled to 14.2, which denotes that external resistance has little influence on the self-heating process.

For calculations of examples of temperature distribution properties (32) and the initial loss rigidity D'' with value $6 \cdot 10^6$ [Pa] were assumed. The exemplary self-heating temperature distribution for different types of mechanical boundary conditions (according to fig. 1.) was presented in fig. 3. In these cases the force amplitude P_0 is equal to 10 [N] and the frequency ω – to 0.1592 [Hz]. The dependence of loading force and frequency on self-heating was also investigated. Obtained results for each case of boundary conditions were presented in fig. 4 and fig. 5. In case of variable amplitude of loading the value of ω is 0.1592 [Hz] and in case of variable frequency the value P_0 is 10 [N]. In fig. 4 and fig. 5 $\theta_{a,max}$ denotes maximal temperature of self-heating. The range of force amplitudes was chosen according to measurement hardware capabilities and the range of loading frequencies chosen according to common industrial loads [21].



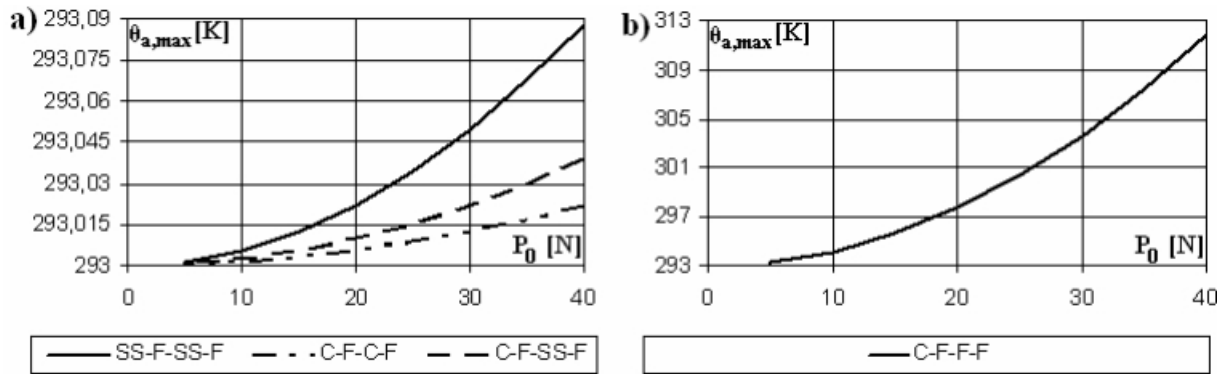
Rys. 3. Przykładowy rozkład temperatury samorozgrzania płyty przy rozpatrywanych warunkach brzegowych
Fig. 3. Exemplary self-heating temperature distribution of plates for the investigated boundary conditions

6. Wnioski

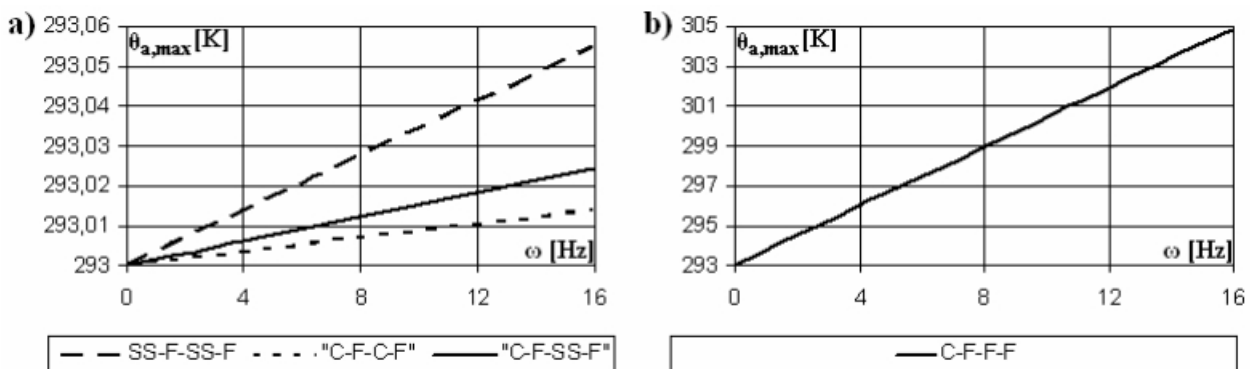
W niniejszej pracy zbadano efekt samorozgrzania w stanie ustalonym prostokątnych płyt wykonanych z laminatu polimerowego poddanych prostemu zginaniu. W celu otrzymania wartości energii dyssypacji posłużono się metodą superpozycji. Równanie przewodzenia ciepła dla zjawiska samorozgrzania kompozytów polimerowych zostało rozwiązane przy użyciu

6. Conclusions

The self-heating effect for rectangular polymer-based laminate plates subjected to simple bending in two dimensions in steady state was investigated in this paper. The superposition method was used for obtaining the dissipation energy value. The heat equation of the self-heating phenomenon of polymeric laminates was solved using a Fourier series, where boundary



Rys. 4. Wpływ siły obciążającej na wartość maksymalną temperatury samorozgrzania przy rozpatrywanych warunkach brzegowych
 Fig. 4. Influence of the loading amplitude on the self-heating maximal temperature for the investigated boundary conditions



Rys. 5. Wpływ częstotliwości obciążenia na wartość maksymalną temperatury samorozgrzania przy rozpatrywanych warunkach brzegowych
 Fig. 5. Influence of the loading frequency on the self-heating maximal temperature for the investigated boundary conditions

szeregów Fouriera, gdzie zagadnienie brzegowe zostało zredukowane do dwóch równań trygonometrycznych uwzględniając symetrię warunków brzegowych. Dla przedstawionego zagadnienia wyznaczono również liczbę Biota. Obliczenia wykazały, że wartość oporu wewnętrznego w rozważanym zagadnieniu jest znacznie większa od wartości oporu zewnętrznego, co potwierdza charakterystyczne zachowanie termiczne laminatów polimerowych. Wyznaczono rozkład uśrednionej temperatury samorozgrzania dla czterech rozpatrywanych przypadków prostego zginania z zadanymi parametrami. Analizując otrzymane zależności wykazano, że siła obciążająca i częstotliwość drgań wywierają wpływ różnego charakteru na termiczne zachowanie laminatu. Siła obciążająca wywiera nieliniowy (funkcja kwadratowa) wpływ na temperaturę samorozgrzania, a częstotliwość wywiera liniowy wpływ na tą temperaturę zgodnie z (31). Temperatura samorozgrzania podczas obciążeń cyklicznych cechuje się wyższymi wartościami dla płyt wspornikowych (patrz rys. 4b i rys. 5b) niż w innych rozpatrywanych przypadkach warunków brzegowych z identycznymi obciążeniami, co wynika z odpowiednich zależności maksymalnych ugięć.

Otrzymane równanie rozkładu temperatury może być użyteczne przy konstruowaniu kompozytowych elementów maszyn poddawanych intensywnym obciążeniom. Na podstawie otrzymanych przedziałów wzrostu temperatury jest możliwy monitoring struktur kompozytowych. Temperatura samorozgrzania może być dodatkowym kryterium przy aktywnym tłu-

value problem was reduced to two trigonometric equations considering symmetry of boundary conditions. The Biot number value was calculated for the presented issue. The calculations show that the internal resistance in the investigated phenomenon is much greater than the external resistance, which confirms the characteristic thermal behaviour of polymeric laminates and must be taken into consideration during non-steady state self-heating modelling. The averaged self-heating temperature distributions were calculated for four investigated cases of simple bending with given parameters. Analysing obtained dependencies, changes in loading amplitude and vibration frequency values each have different influences on the thermal behaviour of the laminate. The loading amplitude influences self-heating temperature nonlinearly (by quadratic dependence) and the loading frequency influences the self-heating temperature by linear dependence according to (31). The self-heating temperature during cyclic loading has higher values for single cantilever plates (see fig. 4b and fig. 5b) than in other cases of investigated boundary conditions with same loading parameters, which is explained by adequate maximal deflection dependencies.

The obtained temperature distribution equation could be helpful during design of composite machine elements subjected to the intensive loading. Basing on the obtained ranges of temperature increase there is a possibility of composite structures monitoring. The self-heating temperature could be an additional criterion in active damping in integrated structures, which

mieniu w strukturach zintegrowanych, które są używane w inżynierii aerokosmicznej. Ponadto, zjawisko może występować podczas niskocyklowych procesów zmęczeniowych, co może wzmacniać propagację uszkodzeń i redukować trwałość zmęczeniową struktury. Znając parametry graniczne obciążeń roboczych można zapobiegać nagłym uszkodzeniom.

Prezentowane badania są jednym z początkowych etapów aktualnie realizowanego grantu badawczego. W przyszłych badaniach model teoretyczny będzie rozszerzony o badania zjawiska samorozgrzania w stanie nieustalonym. Zagadnienie nie może być rozwiązane w pełni analitycznie ze względu na zmiany właściwości mechanicznych i termomechanicznych, a zatem sztywności stratnej, która wykazuje gwałtowne zmiany podczas procesu samorozgrzania. Zmiany te, zależne od zmiennej temperatury i częstotliwości obciążenia, mogą być zmierzone przy pomocy Dynamicznej Analizy Termomechanicznej. Następnie otrzymane modele będą zweryfikowane eksperymentalnie. W ostatniej fazie model będzie zastosowany do oceny procesów zmęczeniowych laminatów i ich trwałości zmęczeniowej, a także wpływu samorozgrzania na propagację uszkodzeń (np. pęknięcia i delaminacje).

were used in aerospace engineering. Moreover, the phenomenon may appear during the low-cycle fatigue processes, which may improve damage propagation and reduce the residual life of the structure. Knowing limits of safety workload one can prevent the spontaneous damage.

Presented research is one of the initial phases of actually realized research grant. In further steps the theoretical model will be improved for the self-heating phenomenon in non-steady state. The problem cannot be solved fully analytically because values of mechanical and thermomechanical properties change during loading and the loss rigidity rapidly changes too. These changes, which depend on variable temperature and loading frequency, could be measured using DMA (Dynamic Mechanical Analysis). Then, obtained models will be validated in several experiments. In the final phase the model will be used to evaluate fatigue processes in laminates and their residual life and the influence of the self-heating on the damage (e.g. cracks and delaminations) propagation.

Autor wyraża wyrazy uznania anonimowym recenzentom za cenne sugestie. Dana praca została sfinansowana ze środków grantu badawczego nr N N504 282137 przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego.

The author would like to acknowledge the valuable suggestions of anonymous reviewers. This work was financially supported by research grant No. N N504 282137 by the Polish Ministry of Science and Higher Education.

7. Literatura

1. Adzima B J, Kloxin C J, Bowman C N. Externally triggered healing of a thermoreversible covalent network via self-limited hysteresis heating. *Advanced Materials* 2010, early view.
2. Boyarov A N. Mechanism of formation and protection from spontaneous ignition of the pyrophoric sedimentations in vertical reservoirs [in Russian]. Ufa: PhD Thesis, 2010.
3. Dinartz F., Molinari A., Linear stability analysis for thermoviscoplastic material under cyclic axial loading. *Continuum Mechanics and Thermodynamics* 2005; 17: 83-99.
4. Dinartz F., Molinari A., Herbach R., Thermomechanical response of viscoelastic beam under cyclic bending; self-heating and thermal failure. *Archives of Mechanics* 2008; 60(1): 59-85.
5. Galitsyn A S, Zhukovskiy A N. Integral transformations and special functions in problems of heat conduction [in Russian]. Kiev: Naukova Dumka, 1976.
6. Jones R M. *Mechanics of composite materials*. Philadelphia: Taylor & Francis, 1999.
7. Karnaukhov V G, Senchenkov I K. Thermomechanical behavior of a viscoelastic finite circular cylinder under harmonic deformations. *Journal of Engineering Mathematics* 2003; 46: 299-312.
8. Katunin A., Self-heating effect in laminate plates during harmonic forced loading. *Scientific Problems of Machine Operation and Maintenance* 2009; 44(2): 73-84.
9. Katunin A., Influence of self-heating temperature on the fatigue strength of a plate made of laminated polymeric composite. *International Applied Mechanics* 2009; 45(3): 342.
10. Katunin A., Moczulski W., Ocena zachowania belki kompozytowej podczas przejścia oraz po przejściu temperatury zeszklenia. *Materiały VII Konferencji Naukowo-Praktycznej „Energia w Nauce i Technice”* 2008; Suwałki, 241-251.
11. Katunin A., Moczulski W., The conception of a methodology of degradation degree evaluation of laminates. *Eksploatacja i Niezawodność - Maintenance and Reliability* 2009; 41(1): 33-38.
12. Kącki E., *Równania różniczkowe cząstkowe w zagadnieniach fizyki i techniki*. Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1989.
13. Kessler M R. Self-healing: A new paradigm in materials design. *Proc. of the Institution of Mechanical Engineers. Part G, Journal of Aerospace Engineering* 2007; 221(4): 479-495.
14. Kucher N K, Karnaukhov V G. Thermomechanical behavior of a viscoelastic prism subjected to cyclic loading. *Problemy Prochnosti* 1981; 8: 58-62.
15. Leissa A W. *Vibration of plates*. Washington D.C.: NASA SP, 1969.
16. Minenkov B V, Stasenko I V. *Strength of elements made of plastics* [in Russian]. Moscow: Mashinostroenie, 1977.

17. Niezgodziński M E, Niezgodziński T. Wzory, wykresy i tablice wytrzymałościowe. Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1996.
18. Ramkumar A, Kannan K. Gnanamoorthy R., Experimental and theoretical investigation of a polymer subjected to cyclic loading conditions. *International Journal of Engineering Science* 2010, 48: 101-110.
19. Ratner S B, Korobov V I. Self-heating of plastics during cyclic deformation. *Mekhanika Polimerov* 1965; 1(3): 93-100.
20. Samborsky D D, Mandell J F. Fatigue resistant fiberglass laminates for wind turbine blades. *ASME Wind Energy Symposium*, ASME 1996, 46-51.
21. Senchenkov I K, Karnaukhov V G. Thermomechanical behavior of nonlinearly viscoelastic materials under harmonic loading. *International Applied Mechanics* 2001; 37(11): 1400-1432.
22. Senchenkov I K, Kirichok I F. Forced nonlinear vibrations and dissipative heating of a viscoelastic beam. *Prikladnaya Mekhanika* 1987; 23(1): 91-97.
23. Senchenkov I K, Karnaukhov V G, Kozlov V I. Toward a theory of governing equations of thermoviscoelasticity for periodic deformation. *Prikladnaya Mekhanika* 1986; 22(8): 97-104.
24. Senchenkov I K, Kozlov V I, Yakimenko S N, Nesterenko N P. Calculation of the plane vibration and vibrational heating of plates of variable thickness. *Prikladnaya Mekhanika* 1992; 28(5): 64-69.
25. Senchenkov I K, Zhuk Ya A, Karnaukhov V G. Modeling the thermomechanical behaviour of physically nonlinear materials under monoharmonic loading. *International Applied Mechanics* 2004, 40(9): 943-969.

Mgr inż. Andrzej KATUNIN

Department of Fundamentals of Machinery Design
Silesian University of Technology
Konarskiego 18A, 44-100 Gliwice, Poland
e-mail: andrzej.katunin@polsl.pl
