

Georgij TARANENKO
Wiktor TARANENKO
Antoni ŚWIĆ
Jakub SZABELSKI

MODELOWANIE UKŁADÓW DYNAMICZNYCH OBRÓBKİ SKRAWANIEM WAŁÓW O MAŁEJ SZTYWNOŚCI

MODELLING OF DYNAMIC SYSTEMS OF LOW-RIGIDITY SHAFT MACHINING

Przedstawiono metodykę opracowania modeli układów dynamicznych obróbki skrawaniem wałów w stanie sprężysto - odkształcalnym. Pokazano specyfikę identyfikacji UD toczenia wzdłużnego oraz szlifowania wzdłużnego i wglębnego wałów o małej sztywności. Specyfika procesu obróbki części o małej sztywności uwzględniana jest przez wprowadzenie odpowiednich równań więzi, odzwierciedlających dodatkowe odkształcenia sprężyste w jednym z równań opisujących siłowe oddziaływania sterujące. Przeprowadzono analizę systemową opracowanych modeli oraz przedstawiono ich strukturę hierarchiczną.

Słowa kluczowe: modelowanie, model matematyczny, wał, obróbka skrawaniem, podejście systemowe.

The paper presents methodology of developing models of dynamic systems of machining shafts in the elastic-deformable condition. The specifics of dynamic system (DS) identification concerning straight turning and straight and plunge grinding of low-rigidity shafts is presented. The specifics of the process of low-rigidity elements machining is taken into account through the introduction of suitable equations of constraint reflecting additional elastic strain in one of the equations describing the control force effect. Systemic analysis of the developed models is performed, and their hierarchical structure is given.

Keywords: modelling, mathematical model, shaft, machining, systemic approach.

1. Wprowadzenie

Dążenie do uzyskania wysokiej jakości obróbki na obrabiarkach skrawających w warunkach oddziaływania na układ technologiczny (UT) różnych zakłóceń doprowadziło do zastosowania w przemyśle maszynowym układów sterowania adaptacyjnego (AC) [1, 2]. Problem doskonalenia takich układów jest szczególnie aktualny w warunkach ESP przy realizacji tzw. technologii „bezludnej”. Opracowanie modelu matematycznego (MM) obiektu sterowania (OS) w dynamice, adekwatnego do obiektu – oryginału, jest konieczną przesłanką uzasadnionego podejścia do rozwiązania problemu analizy stabilności układów sterowania automatycznego (UAS) lub AC i syntezy członów korygujących, zgodnie z wymaganymi wskaźnikami jakości sterowania procesem przejściowym. Przy tym w podobnych układach wskaźniki jakości sterowania współrzędną wyjściową – odkształceniami sprężystymi UT w dynamice bezpośrednio charakteryzują błędy kształtu części, uwarunkowane oddziaływaniem szybko zmieniających się zakłóceń typu zmiana naddatku na obróbkę, zmienność właściwości fizykochemicznych obrabianego materiału.

1. Introduction

Continued efforts aimed at obtaining high-quality machining on machine tools under conditions of various interferences affecting the technological system (TS) have led to the application of adaptive control (AC) systems in the machine-building industry [1, 2]. The problem of improvement of such systems is particularly relevant under ESP conditions, in the realization of so-called “no-man” technology. Development of a mathematical model (MM) of control object (CO) in the dynamics, adequate to the original object, is a prerequisite for substantiated approach to the solution of the stability analysis problem of automatic control systems (ACS) or AC and synthesis of correcting elements, in accordance with required quality indices of transition process control. Whereas, in similar systems, indexes of quality of control of the input variable – elastic deformation in the dynamic TS - characterize directly the errors of the machined parts shape, determined by the effect of rapidly changing interferences of the type of change in material allowance for machining or variability of the physicochemical properties of the machined material.

Układ dynamiczny (*UD*) procesu skrawania jest układem technologicznym - *OUPN* tzn. obrabiarką wraz z realizowanym na niej procesem technologicznym (*PT*) obróbki skrawaniem (toczenie, szlifowanie, wiercenie, frezowanie) [1].

Analiza systemowa, jako podstawa analizy i syntezy *UAS* i *AC* wychodzi z założenia, że specyfika złożonych obiektów i procesów nie wynika tylko z własności elementów składowych, a jest uwarunkowana charakterem powiązań między nimi, które w decydujący sposób oddziałują na strukturę *UAS* lub *AC*.

Przy identyfikacji *UD* podejście systemowe zawiera następujące etapy podstawowe [8]:

- analiza danych wejściowych do identyfikacji;
- formowanie strategii sterowania, zorientowanej na konkretny podsystem podstawowych obrabiarek, zgodnie z danymi wejściowymi przy projektowaniu *UAS*, *AC*;
- wykluczenie inwariantnych, według swego spektrum, wejściowych oddziaływań podukładów i członów w granicach możliwości technicznych *UAS*, *AC* oraz obrabiarek;
- analiza możliwych struktur *MM*, układu sterowania według funkcjonalnego przeznaczenia, typów członów i więzi między nimi, liczby poziomów hierarchii, zasad łączenia, trwałości połączeń.

Przy braku wystarczająco pełnej i dokładnej informacji o obiekcie sterowania, charakterystyki obliczeniowe mogą się istotnie różnić od rzeczywistych. Wybrane przy projektowaniu parametry (nastawienia) regulatorów nie gwarantują wymaganej jakości sterowania a nawet stabilności układu. Oprócz tego rozpatrywane układy charakteryzują się szerokim zakresem zmienności parametrów *OS*. W układach technologicznych, zawierających półfabrykat o małej sztywności, parametry mogą ulegać znacznej zmianie w trakcie cyklu obróbki jednej części. Te uwarunkowania wskazują na złożoność problemu zagwarantowania stabilności *UAS* i na konieczność szczególnie starannego podejścia do problemu określenia jego struktury i syntezy urządzeń korygujących.

2. Identyfikacja układu dynamicznego toczenia wałów

W przypadku, kiedy istnieje pełna informacja o obiekcie sterowania, możliwe jest opracowanie modelu metodą analityczną. Takie postępowanie prowadzące do poznania struktury i parametrów modelu nazywa się identyfikacją analityczną. Dla układów złożonych opracowanie *MM* metodą analityczną wymaga często dodatkowych badań eksperymentalnych w celu sprawdzenia otrzymanych wyników teoretycznych i określenia niektórych parametrów modelu.

Przedstawiony schemat budowy *MM* pokazuje, że podstawowy zakres badań przy opracowaniu *MM* opiera się na głębokiej analizie teoretycznej powiązań między zmiennymi parametrami i ujawnieniu zależności, opisujących procesy zachodzące w obiekcie.

Możliwość linearyzacji równań ruchu poszczególnych elementów *UD* wynika także z powszechnie uznawanego poglądu, że zapewnienie wysokich wymagań odnośnie dokładności regulacji sprowadza się do realizacji układów regulacji, działających przy „małych” odchyleniach zmiennych. A więc układ dynamiczny procesu wiercenia może być rozpatrywany jako wielowymiarowy *OS* z podukładami w postaci procesu technologicznego i układu sprężystego. Struktura *OS* zawiera obwody

The dynamic system (*DS*) of the process of machining is a technological system – *MHWT* (Machine tool, Holder, Workpiece, Tool), i.e. a machine tool together with the realized technological process (*TP*) of machining (turning, grinding, drilling, milling) [1].

Systemic analysis, as the basis for analysis and synthesis of *ACS* and *AC*, is based on the assumption that the specifics of the assumed objects and processes results not only from the properties of the component elements, but is determined by the character of their mutual relationships that have a decisive effect on the structure of the *ACS* or *AC*.

In the identification of *DS* the systemic approach includes the following fundamental stages [8]:

- analysis of input data for the identification;
- formulation of control strategy oriented at a specific subsystem of basic machine tools, in accordance with input data in designing *ACS*, *AC*;
- exclusion of invariant, relative to their spectrum, input effects of subsystems and components within the limits of technical capability of *ACS*, *AC* and the machine tools;
- analysis of possible structures of *MM* of control system with respect to their function, types of components and connections between them, number of hierarchy levels, principles of connection, and permanence of the connections.

With a lack of sufficiently complete and detailed information on the object of control, calculated characteristics may significantly differ from the true ones. The parameters (settings) of regulators adopted in designing do not guarantee the required quality of control, or even stability of the system. Apart from this, the analysed systems are characterized by extensive variability of parameters of the *CO*. In technological systems comprising a semi-finished product of low rigidity the parameters may change notably within the machining cycle of a single part. Those determinations indicate the complexity of the problem of ensuring stability of the *ACS* and the necessity of taking special care in the approach to the problem of defining its structure and synthesis of the corrective devices.

2. Identification of dynamic systems of shaft turning

In the case when there is complete information on the object of control it is possible to design a model using the analytical method. Such a procedure, leading to the identification of the structure and parameters of a model, is referred to as the analytical identification. For complex systems, development of *MM* with the analytical method frequently requires additional experimental tests aimed at the verification of theoretical results and at determination of some of the model parameters.

The presented schematic of the structure of *MM* shows that the basic scope of work in the design of *MM* is based on in-depth theoretical analysis of connections between the variable parameters and on revealing the relationships describing the processes taking place within the object.

The possibility of linearization of the particular *DS* components motion equations follows also from the commonly accepted view that assurance of high requirements with respect to precision of adjustment is reduced to realization of adjustment systems operating at “small” deviations of variables. Therefore, the dynamic system of the drilling process can be considered as multi-dimensional *CO* with subsystems in the form of the technological process and an elastic system. The structure of

sprzężeń zwrotnych przez układ sprężysty spowodowanych oddziaływaniami siłowymi, które pojawiają się podczas realizacji procesu technologicznego.

W pracach [1, 9] przedstawiono układ równań i uogólniony schemat strukturalny *MM* układu dynamicznego toczenia wałów. Opracowany układ równań i schemat strukturalny *MM* uwzględnia geometrię warstwy skrawanej i siły skrawania przy toczeniu, właściwości sprężyste *UT*, proces formowania przekroju warstwy skrawanej (*WS*). Proces formowania przekroju *WS* uwzględnia zjawisko skrawania „po śladzie”, które przejawia się w tym, że składowe warstwy skrawanej materiału w chwili bieżącej określone są przez chwilowe położenie krawędzi ostrza jak i również jego współrzędne w chwili poprzedniego obrotu półfabrykatu, tzn. w chwili opóźnionej o czas jednego obrotu. Jednocześnie uwzględniony jest wpływ odkształceń sprężystych dla współrzędnej *Z* na głębokość skrawania.

Na proces formowania przekroju *WS* duży wpływ ma zjawisko skrawania „po śladzie” i odkształcenia sprężyste *UD*. Przy tym proces formowania przekroju *WS* może być opisany układem równań całkowo-różniczkowych z opóźnionym argumentem. Zmienne charakteryzujące przekrój *WS* zależą od zmiennych wejściowych i odkształceń sprężystych *UD*. W wektorze zmiennych technologicznych, tworzonym przez układ dynamiczny, można wyróżnić dwie składowe, jedna z nich jest określona wektorem oddziaływań wejściowych, a druga - wektorem odkształceń sprężystych [3, 10].

Elementami wektora wielkości wejściowych są wielkości sterujące w postaci prędkości posuwu wzdłużnego, prędkości obrotowej części, a także zakłócenia w postaci zmiany twardości obrabianego materiału i naddatku względem długości i średnicy części.

Wektor odkształceń sprężystych jest określony wektorami sił skrawania wielkości sterujących wchodzących do układu zapewnienia stabilności wibracyjnej. Dynamiczne właściwości ekwiwalentnego układu sprężystego mogą być w przybliżeniu opisane równaniami drugiego rzędu [6, 7]. Na wybór wektora zmiennych technologicznych istotny wpływ ma zjawisko skrawania „po śladzie”, przejawiające się tym, że chwilowe wartości składowych wspomnianego wektora określone są przez wartości elementów wektora wejściowego i wektora sprężystych odkształceń nie tylko w bieżącym momencie, ale także w momencie poprzedniego obrotu części. W wyniku tego układ dynamiczny jest opisywany układem równań całkowo-różniczkowych ze zmiennym opóźnionym argumentem.

W wyniku analizy procesów, zachodzących w układzie dynamicznym obróbki, otrzymano układ równań i funkcje przejścia, a także uogólnioną strukturę obiektu sterowania.

2.1. Identyfikacja UD toczenia wałów o małej sztywności

W celu zwiększenia dokładności obróbki wałów o małej sztywności opracowano sposoby technologiczne sterowania dokładnością, oparte na zmianie stanu sprężysto-odkształcalnego [6, 8]. Jako oddziaływania sterownicze, zgodnie z opracowaną klasyfikacją [6], wykorzystywane są poszczególne siłowe oddziaływania regulacyjne lub ich kombinacja: rozciąganie osiowe i mimośrodowe; sterowanie dodatkowymi oddziaływaniami siłowymi, nakierowanymi na kompensację czynników siłowych

the *CO* includes circuits of feedbacks from the elastic system caused by force effects that appear in the course of realization of the technological process.

References [1, 9] present a system of equations and a generalized structural schematic of *MM* of the dynamic system of shaft turning. The developed system of equations and the structural schematic of *MM* take into account the geometry of the machined layer and of the machining force in turning, elastic properties of the *TS*, process of forming cross-section of the machined layer (*ML*). The process of forming cross-section of the *ML* takes into account the phenomenon of machining “following the feed ridge” which consists in that the components of the machined layer of the material at the current moment are defined by the temporary position of the cutting edge and by its coordinates at the moment of the preceding revolution of the semi-finished product, i.e. at a time-lag of a single revolution. At the same time the effect of elastic deformation for coordinate *Z* on the depth of turning is taken into account.

The process of forming of the cross-section of *ML* is under strong effect of the phenomenon of machining “following the feed ridge” and by elastic deformations in the *DS*. The process of forming of *ML* cross-section can be described with a system of integral-differential equations with delayed argument. Variables characterizing the *ML* cross-section depend on the input variables and on the elastic deformation in the *DS*. In the vector of the technological variables, formed by the dynamic system, two components can be distinguished – one defined by the vector of input effects and the other by the vector of elastic deformations [3, 10].

Elements of the vector of input values are the control values in the form of the straight feed rate, rotational speed of the machined part, and also interference in the form of hardness changes of the machined material and in the machining allowance relative to the length and diameter of the machined part.

The vector of elastic deformations is determined by the vectors of machining forces and of control values entering the system of vibrational stability assurance. Dynamic properties of the equivalent elastic system can be approximated with quadratic equations [6, 7]. The choice of the vector of technological variables is significantly affected by the phenomenon of machining “following the feed ridge”, manifest in that the momentary values of the components of the said vector are determined by the values of elements of the input vector and of the vector of elastic deformations not only at the current moment but also at the time of the preceding revolution of the machined part. Due to this the dynamic system is described with a system of integral-differential equations with variable delayed argument.

As a result of analysis of the processes occurring in the dynamic system of machining a system of equations and functions of transition were obtained, as well as the generalized structure of the control object.

2.1. Identification of DS of turning of low-rigidity shafts

To improve the precision of machining of shafts with low rigidity, technological methods were developed for the control of machining precision, based on change in the elastic-deformable status [6, 8]. As control effects, in accordance with the developed classification [6], particular force control effects are employed, or their combinations – axial and eccentric tension, control by means of additional force effects aimed at compensation of force factors from the machining process, bending moments at supports, control of force-induced bending-torsional strain.

od procesu skrawania; momenty zginające w podporach; sterowanie siłowymi odkształceniami zginająco - skręcającymi.

Model matematyczny różnych układów technologicznych obróbki ze sterowaniem stanem sprężystości- odkształcalnym dla ustalonych parametrów, przedstawionych w postaci funkcji ugięć, otrzymany został przy założeniu, że siła zginająca działająca na część jest zewnętrzną zmienną niezależną od sprężystych odkształceń UD . Takie podejście oparte jest na nieuwzględnieniu zamknięcia układu sprężystego przez proces skrawania i nie wnosi istotnych błędów do wyników analizy charakterystyk statycznych OS . Analiza budowy odpowiedniego MM obiektu sterowania dla parametrów przejściowych jest niemożliwa bez uwzględnienia specyfiki procesów w strefie obróbki i zamknięcia UD przez proces skrawania.

Model matematyczny rozpatrywanego obiektu sterowania – UD ze sterowaniem stanem sprężystości- odkształcalnym części o małej sztywności zbudowano w oparciu o ogólne zasady budowy MM UD [1] obróbki mechanicznej, przy tym specyfika procesu obróbki części o małej sztywności uwzględniana jest poprzez wprowadzenie odpowiednich równań więzów [2, 5], odzwierciedlających wzajemne powiązania dodatkowych odkształceń sprężystych Δg_ζ , do jednego z równań zawierających siłowe oddziaływania sterujące układu równań.

Ekwiwalentne odkształcenia sprężyste UT przy obróbce części o małej sztywności można przedstawić w postaci dwóch składowych:

$$g_\zeta = g_{\zeta obr.} + g_{\zeta cz.} \quad (1)$$

gdzie: $g_{obr.}$ i $g_{cz.}$ - odpowiednio odkształcenia sprężyste obrabiarki- przyrządu- narzędzia i części dla każdej współrzędnej; $\zeta \in \{x, y, z\}$. Pierwsza składowa w tym wyrażeniu dla rozpatrywanych UT , jest w zasadzie o rząd wielkości mniejsza i można jej nie uwzględniać.

Odształcenia sprężyste UT w kierunku promieniowym g_y zgodnie z równaniami ugięć [6], przy ustalonych parametrach bez uwzględniania zamkniętości OS , mogą być rozpatrywane jako deterministyczna nieliniowa funkcja parametrów części L, d, EI ; składowych siły skrawania F_c, F_p, F_f ; współrzędnych x przyłożenia siły skrawania po długości półfabrykatu i różnych oddziaływań regulacyjnych w postaci: siły rozciągającej F_{x1} ; siły rozciągającej mimośrodowej, tworzącej dwa oddziaływania regulacyjne F_{x1} i moment $M = F_{x1} \cdot e$, gdzie e - mimośród siły przy rozciąganiu; jednej lub kilku dodatkowych sił $F_{dod.i}$; momentów zginających M_i ; momentu skręcającego M_{skr} lub ich kombinacji:

$$g = f(L, d, EI, F_c, F_p, F_f, F_{x1}, e, F_{dod.i}, M_i, M_{skr}, x) \quad (2)$$

Przyjmując, że rzeczywista prędkość posuwu wzdłużnego i prędkość zmiany współrzędnej x są względnie niewielkie, przy analizie procesów przejściowych można nie uwzględniać zmiany współrzędnej x w funkcji czasu. A więc zależność (2) w postaci operatorowej można zapisać jako:

$$g_y(s) = K_{xy} \cdot F_f(s) + K_{yy} \cdot F_p(s) + K_{zy} \cdot F_c(s) + K_{F_{x1}} \cdot F_{x1}(s) + K_e \cdot e(s) + K_{F_{dod.i}} \cdot F_{dod.i}(s) + K_{M_i} \cdot M_i(s) + K_{M_{skr}} \cdot M_{skr}(s) \quad (3)$$

gdzie: podwójne indeksy przy współczynnikach K oznaczają, że współczynniki K_{xy} , K_{zy} pokazują wpływ przyrostu składowych F_p, F_c na przyrost odkształceń sprężystych według współrzędnej y ; $K_e = K'_e \cdot F_{x1_0}$. Współczynniki wzmocnienia równań liniowych określane są jako pochodne cząstkowe funkcji od-

MM of various technological systems of machining with control of the elastic-deformable status for stabilised parameters, presented in the form of deflection functions, were obtained with the assumption that a banding force acting on the machined part is an external variable that is independent of the elastic deformations in the DS . This approach is based on not including the closing of the elastic system through the process of machining and does not introduce new errors into results of analyses of static characteristics of the CO . Analysis of the structure of a suitable MM of a control object for transition parameters is not possible without taking into consideration the specifics of processes within the machining zone and the closing of the DS through the process of machining.

MM of the considered control object – DS with control of the elastic-deformable status of parts with low rigidity was constructed on the basis of general principles of creating MM of DS [1] of machining, with the specifics of the process of machining of parts with low rigidity being accounted for by the introduction of suitable equations of constraints [2, 5], reflecting mutual relationships between additional elastic deformations Δg_ζ into one of the equations representing the force control effects of the system of equations.

Equivalent elastic deformations of the TS in the machining of parts with low rigidity can be represented in the form of two components

$$g_\zeta = g_{\zeta obr.} + g_{\zeta cz.} \quad (1)$$

where: $g_{obr.}$ and $g_{cz.}$ elastic deformations of the machine tool, fixture, tool and part for each coordinate, respectively; $\zeta \in \{x, y, z\}$. The first component in this expression for the TS under consideration is, in principle, lower by one order of magnitude and can be neglected.

Elastic deformations of the TS in the radial direction g_y in accordance with the deflection equations [6], at set parameters without the inclusion of closed status of the CO , may be considered as a deterministic non-linear function of the part parameters L, d, EI ; components of the machining force F_c, F_p, F_f ; coordinates x of machining force application on the length of the semi-finished product and various regulatory effects in the form of: tensile force F_{x1} ; eccentric tensile force creating two regulatory effects F_{x1} and moment $M = F_{x1} \cdot e$, where e - eccentric of the tensile forces; one or more additional forces $F_{dod.i}$; bending moments M_i ; torsional moment M_{skr} or their combinations:

$$g = f(L, d, EI, F_c, F_p, F_f, F_{x1}, e, F_{dod.i}, M_i, M_{skr}, x) \quad (2)$$

Assuming that the true feed rate and the rate of change of coordinate x are relatively small, in the analysis of transition processes the change in coordinate x in the function of time can be left out. Therefore, relation (2) in the operator form can be written as:

$$g_y(s) = K_{xy} \cdot F_f(s) + K_{yy} \cdot F_p(s) + K_{zy} \cdot F_c(s) + K_{F_{x1}} \cdot F_{x1}(s) + K_e \cdot e(s) + K_{F_{dod.i}} \cdot F_{dod.i}(s) + K_{M_i} \cdot M_i(s) + K_{M_{skr}} \cdot M_{skr}(s) \quad (3)$$

where: dual indexes at coefficients K mean that coefficients K_{xy} , K_{zy} indicate the effect of increase in the values of components F_p, F_c on increase in the level of elastic strain on coordinate y ; $K_e = K'_e \cdot F_{x1_0}$. The gain coefficients of linear equations are defined as fragmentary derivatives of the strain function along the

kształceń według odpowiedniej zmiennej. Na przykład dla UT obróbki przy działaniu osiowej siły rozciągającej F_{x1} , powodującej stan sprężysto-odkształcalny z równań odkształceń sprężystych [10]:

$$K_{yy} = \left(\frac{\partial g_y}{\partial F_p} \right)_0 = \frac{L^3 \cdot [1 - \cos(2\pi x_0 / L)]^2}{2\pi^2 \cdot (4\pi^2 \cdot EI + F_{x1_0} \cdot L^2)} \quad (4)$$

$$K_{F_{x1}} = \left(\frac{\partial g_y}{\partial F_{x1}} \right)_0 = -\frac{F_p \cdot L^3 [1 - \cos(2\pi x_0 / L)]^2}{2\pi^2 \cdot (4\pi^2 \cdot EI + F_{x1} \cdot L^2)} = -\frac{g_{y_0} \cdot L^2}{4\pi^2 \cdot EI + F_{x1} \cdot L^2} \quad (5)$$

gdzie: F_{x1_0}, g_{y_0} - wartości siły rozciągającej i odkształcenia sprężystego części według współrzędnej y w punkcie linearyzacji (wartości zmiennych, odnośnie których podawane są przyrosty zmiennych). W rozpatrywanym szczególnym przypadku pozostałe współczynniki w zależności (3) są równe zero. Współczynniki wzmocnienia, odpowiadające innym UD przy różnych sposobach obciążenia (przy zginaniu wzdłużno-przecznym i różnych zamocowaniach) przy obróbce części sprężysto-odkształcalnych, uzyskane analogicznie zaprezentowane są w tab.1 – rubryka 2, x_0 - współrzędna położenia noża po długości obróbki w punkcie linearyzacji [7, 10]. Dodatkowe odkształcenia sprężyste g_x, g_z według współrzędnych x i z w wyniku działania rozpatrywanych siłowych oddziaływań sterujących, w zasadzie nie wpływają istotnie na właściwości dynamiczne OS i można ich nie uwzględniać.

Zgodnie z wynikami badań [4, 5, 9] składowe siły skrawania bez uwzględnienia odkształcenia stykowego na powierzchni przyłożenia zapisywane są w postaci:

$$F_c = Q_{pw} \cdot a \cdot b, \quad F_p = Q_{pw} \cdot a \cdot b \cdot K'_y, \quad F_f = Q_{pw} \cdot a \cdot b \cdot K'_x$$

gdzie: Q_{pw} - względna praca powstawania wióra, K'_y, K'_x - stałe współczynniki dla danych warunków skrawania.

Stąd:

$$m_z = \left(\frac{\partial F_c}{\partial a} \right)_0 = Q_{pw_0} \cdot b_0 \cdot K_z, \quad m_y = \left(\frac{\partial F_p}{\partial a} \right)_0 = Q_{pw_0} \cdot b_0 \cdot K_y,$$

$$m_x = \left(\frac{\partial F_f}{\partial a} \right)_0 = Q_{pw_0} \cdot b_0 \cdot K_x$$

$$n_z = \left(\frac{\partial F_c}{\partial b} \right)_0 = Q_{pw_0} \cdot a_0 \cdot K_z, \quad n_y = \left(\frac{\partial F_p}{\partial b} \right)_0 = Q_{pw_0} \cdot a_0 \cdot K_y,$$

$$n_x = \left(\frac{\partial F_f}{\partial b} \right)_0 = Q_{pw_0} \cdot a_0 \cdot K_x$$

i

$$m_y m_x = Q_{pw_0} a_0 K_y Q_{pw_0} b_0 K_x \quad m_z n_x = Q_{pw_0} b_0 K_z Q_{pw_0} a_0 K_x$$

$$m_y n_x = Q_{pw_0} b_0 K_y Q_{pw_0} a_0 K_x \quad n_z m_x = Q_{pw_0} a_0 K_z Q_{pw_0} b_0 K_x$$

$$n_y m_x = m_y n_x \quad m_z n_x = n_z m_x$$

Przytoczone zależności umożliwiają proste przekształcania współczynników A i B , wchodzących w odpowiednie transmittancje operatorowe (TO) OS według różnych oddziaływań sterujących oraz zakłócających.

W pracach [2, 8] rozpatrzono możliwość zamiany otrzymanych zależności TO przybliżonymi, których zastosowanie istotnie upraszcza obliczenia charakterystyk MM UD . Analiza została wykonana według kryterium dokładności odtworzenia

respective coordinate. For example, for the TS of machining with the effect of axial tensile force F_{x1} , causing the elastic-deformable state, from the system of elastic deformations we obtain [10]:

$$K_{yy} = \left(\frac{\partial g_y}{\partial F_p} \right)_0 = \frac{L^3 \cdot [1 - \cos(2\pi x_0 / L)]^2}{2\pi^2 \cdot (4\pi^2 \cdot EI + F_{x1_0} \cdot L^2)} \quad (4)$$

$$K_{F_{x1}} = \left(\frac{\partial g_y}{\partial F_{x1}} \right)_0 = -\frac{F_p \cdot L^3 [1 - \cos(2\pi x_0 / L)]^2}{2\pi^2 \cdot (4\pi^2 \cdot EI + F_{x1} \cdot L^2)} = -\frac{g_{y_0} \cdot L^2}{4\pi^2 \cdot EI + F_{x1} \cdot L^2} \quad (5)$$

where: F_{x1_0}, g_{y_0} - values of tensile force and elastic strain of the part along coordinate y at the point of linearization (values of variables relative to which increases of variables are given). In the special case under consideration the remaining coefficients in relation (3) are equal to zero. Coefficients of gain, corresponding to different DS at various methods of loading (i.e. with axial-radial bending and various methods of fixing) in machining of elastic-deformable parts, obtained in an analogous manner, are presented in Table 2 – column 2, x_0 - coordinate of cutting edge position on machining length at the point of linearization [7, 10]. The additional elastic strains g_x, g_z with respect to coordinates x and z , as a result of the action of the control force effects under consideration, basically do not have any significant effect on the dynamic properties of the CO and can be treated as negligible.

In accordance with the result of studies in ref. [4, 5, 9], the components of machining force without inclusion of the contact strain at the surface of application are written as:

$$F_c = Q_{pw} \cdot a \cdot b, \quad F_p = Q_{pw} \cdot a \cdot b \cdot K'_y, \quad F_f = Q_{pw} \cdot a \cdot b \cdot K'_x$$

where: Q_{pw} - relative work of formation of shaving, K'_y, K'_x - constant coefficients for given conditions of machining.

Hence:

$$m_z = \left(\frac{\partial F_c}{\partial a} \right)_0 = Q_{pw_0} \cdot b_0 \cdot K_z, \quad m_y = \left(\frac{\partial F_p}{\partial a} \right)_0 = Q_{pw_0} \cdot b_0 \cdot K_y,$$

$$m_x = \left(\frac{\partial F_f}{\partial a} \right)_0 = Q_{pw_0} \cdot b_0 \cdot K_x$$

$$n_z = \left(\frac{\partial F_c}{\partial b} \right)_0 = Q_{pw_0} \cdot a_0 \cdot K_z, \quad n_y = \left(\frac{\partial F_p}{\partial b} \right)_0 = Q_{pw_0} \cdot a_0 \cdot K_y,$$

$$n_x = \left(\frac{\partial F_f}{\partial b} \right)_0 = Q_{pw_0} \cdot a_0 \cdot K_x$$

and

$$m_y m_x = Q_{pw_0} a_0 K_y Q_{pw_0} b_0 K_x \quad m_z n_x = Q_{pw_0} b_0 K_z Q_{pw_0} a_0 K_x$$

$$m_y n_x = Q_{pw_0} b_0 K_y Q_{pw_0} a_0 K_x \quad n_z m_x = Q_{pw_0} a_0 K_z Q_{pw_0} b_0 K_x$$

$$n_y m_x = m_y n_x \quad m_z n_x = n_z m_x$$

The relations given above permit simple transformations of coefficients and included in corresponding operator transmittances (OT) of the CO with relation to various control and interfering effects.

In referenced works [2, 8] the authors analysed the possibility of replacing the obtained relations of TO with approximated ones, application of which significantly simplifies calculation of characteristics of DS MM . The analysis was made according

przybliżonymi zależnościami rzeczywistych charakterystyk *MM* w płaszczyznach czasowej i częstotliwościowej; pokazano, że postać zależności aproksymujących należy wybierać z uwzględnieniem liczbowej wartości współczynnika *B*. Ustalono przy tym, że wartość *B* = 0,1 jest „graniczną”, przy której celowe jest przechodzenie od jednej postaci zależności aproksymującej do drugiej. Wartość współczynnika *B* określana jest jako stosunek sztywności ekwiwalentnego układu sprężystego i współczynników wzmocnienia procesu skrawania i może być przyjmowana jako wskaźnik względnej sztywności *UD*. Szerokie zakresy zmiany parametrów obróbki na obrabiarkach, na przykład zmiana twardości obrabianego materiału, nadadku na obróbkę, geometrii ostrza, warunkują szerokie zakresy zmienności współczynników $m_x, m_y, K_{k_z}, K_x, K_{yy}$ i, odpowiednio *B*.

Obliczenia pokazują, że przy obróbce wałów o małej sztywności oraz przy obróbce zgrubnej i kształtującej części o sztywności normalnej, wartości współczynnika *B* są znacznie większe od wartości „granicznej” *B* = 0,1; w tym przypadku również zależności aproksymujące dla *TO* zgodnie z (11), (14), (15) celowo jest budować rozkładając funkcję wykładniczą e^{-st} w szereg Pade, który z zachowaniem dwóch pierwszych członów można zapisać jako:

$$e^{-st} = \left(1 - \frac{1}{2}s \cdot \tau + \frac{1}{12}s^2 \cdot \tau^2\right) / \left(1 + \frac{1}{2}s \cdot \tau + \frac{1}{12}s^2 \cdot \tau^2\right) \quad (6)$$

W przypadku sterowania stanem sprężystość - odkształcalnym części o małej sztywności poprzez przyłożenie siły rozciągającej F_{x1} struktura *OS* została opracowana w [10].

Na podstawie schematu [10] po przekształceniu zależność dla *TO* układu dynamicznego, w przypadku, kiedy jako współrzędna wyjściowa przyjmowany jest przyrost odkształceń sprężystych g_y w kierunku promieniowym sprowadza się do postaci:

$$G_{F_{x1}}(s) = \frac{g_y(s)}{F_{x1}(s)} = K_0 \cdot \frac{1 + A' \cdot (1 - e^{-st})}{1 + B' \cdot (1 - e^{-st})} \quad (7)$$

$$\text{gdzie: } K_0 = K_{F_{x1}} \cdot \frac{1}{1 + K_{yy} \cdot n_y + K_{xy} \cdot n_x + K_{bz} \cdot K_z \cdot n_z} \quad (8)$$

$$A' = m_x \cdot K_x + K_{k_z} \cdot m_y \cdot K_y \quad (9)$$

$$B' = \frac{m_x \cdot K_x + K_{k_z} \cdot m_y \cdot K_y \cdot [2 + K_{yy} \cdot n_y + K_{bz} \cdot n_z + K_{xy} \cdot m_x / (K_{yy} \cdot m_y) + K_{bz} \cdot K_z \cdot m_z / (K_{yy} \cdot m_y)]}{1 + K_{yy} \cdot n_y + K_{xy} \cdot n_x + K_{bz} \cdot K_z \cdot n_z} \quad (10)$$

Dla znanych wartości współczynników wchodzących w zależności (7) – (10), zależności te mogą ulec znacznemu uproszczeniu. Obliczenia pokazują, że przy obróbce części o małej sztywności z przyłożeniem oddziaływań siłowych, składowych zawierających K_{bz} i K_{xy} można w zasadzie nie uwzględniać. Zależność dla *B'* w tych warunkach znacznie upraszcza się, a wyrażenie dla współczynników K_0 ulega znacznemu uproszczeniu. Mianownik *TO* określanej z zależności transmittancji operatorowej dla *UD* przy sterowaniu posuwem wzdłużnym [1] sprowadza się, jak pokazano wyżej, do postaci mianownika członu aperiodycznego drugiego lub pierwszego rzędu. Do przekształcenia licznika *TO* do postaci typowej także można zastosować rozkład funkcji e^{-st} w szereg Pade, przy tym analizowana *TO* przyjmie postać:

$$G_{F_{x1}}(s) = K_0 \cdot \frac{T_3^2 \cdot s^2 + T_3' \cdot s + 1}{(T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2 \cdot s + 1)} \quad (11)$$

Stałe czasowe T_1 i T_2 określane są z zależności:

$$T_{1,2} = 0,5\tau \cdot \left[0,5 + B \pm \sqrt{(0,5 + B)^2 - 1/3}\right] \quad (12)$$

to the criterion of recreation of true characteristics of *MM* with approximated relations in the time and frequency planes; it was demonstrated that the form of approximating relations should be chosen taking into account the numerical value of coefficient *B*. It was also determined that the value of *B* = 0.1 is the “limit” at which the switch from one form of approximating relation to another is justified. The value of coefficient *B* is defined as the ratio of rigidity of equivalent elastic system to gain coefficients of the process of machining and can be adopted as an index of relative rigidity of *DS*. Broad ranges of variability of machining parameters on machine tools, e.g. of change in the hardness of the machined material, machining allowance, cutting edge geometry, determine broad ranges of variability of coefficients $m_x, m_y, K_{k_z}, K_x, K_{yy}$ and *B*, respectively.

Calculations show that in machining of low-rigidity shafts and in roughing and profiling of parts with normal rigidity the values of coefficient *B* are notably greater than the limit value of *B* = 0.1; in this case also the approximating relations for *TO* according to (11), (14), (15) should be built by splitting the exponential function e^{-st} into a Padé series which, keeping the first two components, may be written as:

$$e^{-st} = \left(1 - \frac{1}{2}s \cdot \tau + \frac{1}{12}s^2 \cdot \tau^2\right) / \left(1 + \frac{1}{2}s \cdot \tau + \frac{1}{12}s^2 \cdot \tau^2\right) \quad (6)$$

In the case of control of the elastic-deformable state of parts with low rigidity through the application of tensile force F_{x1} the structure of *CO* has been developed in [10].

On the basis of the schematic given in [10], after transformation, the relation for *TO* of the dynamic system when increase in elastic deformations g_y in the radial direction is adopted as the initial variable is reduced to the form of:

$$G_{F_{x1}}(s) = \frac{g_y(s)}{F_{x1}(s)} = K_0 \cdot \frac{1 + A' \cdot (1 - e^{-st})}{1 + B' \cdot (1 - e^{-st})} \quad (7)$$

$$\text{where: } K_0 = K_{F_{x1}} \cdot \frac{1}{1 + K_{yy} \cdot n_y + K_{xy} \cdot n_x + K_{bz} \cdot K_z \cdot n_z} \quad (8)$$

$$A' = m_x \cdot K_x + K_{k_z} \cdot m_y \cdot K_y \quad (9)$$

For known values of coefficients included in relations (7) – (10), the relations can be notably simplified. Calculations show that in machining of parts with low rigidity with application of force effects components containing K_{bz} and K_{xy} can be basically left out. In such a situation, the relation for *B'* gets considerably simplified, and the expression for coefficients K_0 is notably reduced. Denominator of *TO* of operator transmittance for *DS* determined from the relation in control of straight feed [1] is reduced, as shown above, to the form of denominator of aperiodic component of the first or second order. To transform the numerator of *TO* to a typical form one can also employ splitting the function e^{-st} into a Padé series, and then the analysed *TO* will assume the form of:

$$G_{F_{x1}}(s) = K_0 \cdot \frac{T_3^2 \cdot s^2 + T_3' \cdot s + 1}{(T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2 \cdot s + 1)} \quad (11)$$

The time constants T_1 and T_2 are determined from the relation:

$$T_{1,2} = 0,5\tau \cdot \left[0,5 + B \pm \sqrt{(0,5 + B)^2 - 1/3}\right] \quad (12)$$

przez podstawienie do niej B' w miejsce B , a stałe czasowe w liczniku odpowiednio są równe:

$$T_3 = 0,289\tau; T'_3 = (0,5 + A') \cdot \tau \quad (13)$$

2.2. Uproszczenie modelu matematycznego układu dynamicznego toczenia wałów w stanie sprężysto-odkształcalnym

Dalsze przekształcenia licznika TO (7) powinny być wykonywane przy uwzględnieniu stosunku stałych czasowych T_3 i T'_3 , które zależą od A' . Jeśli $A' < 0,077$, to TO UD może być zapisana w następującej typowej postaci:

$$G_{F_{x1}}(s) = \frac{g_y(s)}{F_{x1}(s)} = K_0 \cdot \frac{T_3^2 \cdot s^2 + 2\varepsilon \cdot T_3 \cdot s + 1}{(T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2 \cdot s + 1)} \quad (14)$$

gdzie: ε - współczynnik tłumienia

$$\varepsilon = \frac{0,5 + A'}{0,577} \quad (15)$$

W przypadku, kiedy $A' > 0,078$, zależność aproksymująca dla analizowanej TO przyjmuje postać:

$$G_{F_{x1}} = \frac{g_y(s)}{F_{x1}(s)} = K_0 \cdot \frac{(T_4 \cdot s + 1) \cdot (T_5 \cdot s + 1)}{(T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2 \cdot s + 1)} \quad (16)$$

gdzie: $T_{4,5} = 0,5\tau \cdot \left[0,5 + A' \pm \sqrt{(0,5 + A')^2 - 1/3} \right]$.

Analogicznie na podstawie uogólnionego schematu strukturalnego i układu równań [9] otrzymano modele UD dla innych oddziaływań sterujących. Zależności aproksymujące TO układu dynamicznego dla różnych oddziaływań sterujących różnią się od przedstawionych tylko wartością współczynnika wzmocnienia K_0 OS . Zamiast współczynnika $K_{F_{x1}}$ w zależności (8) dla K_0 w tym przypadku wchodzi współczynniki wzmocnienia odpowiednich oddziaływań $K_e, K_{F_{dod.1}}, K_{M_1}, K_{M_{skr}}$. Wartości tych współczynników mogą być obliczone według zależności przytoczonych w [10].

W szeregu przypadków, z wystarczającą dla praktycznych obliczeń inżynierskich dokładnością, zależności aproksymujące dla TO (7) celowo jest budować przy wykorzystaniu pierwszego członu rozkładu funkcji e^{-st} w szereg Padé:

$$e^{-st} = (1 - \frac{1}{2}s \cdot \tau) / (1 + \frac{1}{2}s \cdot \tau) \quad (17)$$

W tab. 1 przedstawiono transmitancje operatorowe, współczynniki wzmocnienia i stałe czasowe uogólnionego i szczegółowych MM układu dynamicznego toczenia wałów o małej sztywności w stanie sprężysto-odkształcalnym.

2.3. Praktyczne zastosowanie modelu

Model opracowany zgodnie z powyższą metodologią został wykorzystany do realizacji 5 poziomowego schematu hierarchicznego systematyzującego struktury modelu oraz typowe struktury UD kształtowania wałów o małej sztywności w stanie sprężysto-odkształcalnym przy różnych siłowych oddziaływań sterujących. Na jego podstawie zaprojektowano sterownik PID do sterowania siłą skrawającą w procesie toczenia oraz kontroler PI do obsługi procesu toczenia wałów o małej sztywności. Poczyniono zaawansowane prace w celu zbudowania elementu wykonawczego – konika obrabiarki, umożliwiając

by substituting in it B' to replace B , and the time constants in the numerator are then equal to:

$$T_3 = 0,289\tau; T'_3 = (0,5 + A') \cdot \tau \quad (13)$$

2.2. Simplification of MM of dynamic system of shaft turning in the elastic-deformable state

Further transformations of the numerator of TO (7) should be made with the inclusion of time constants T_3 and T'_3 , which depend on A' . If $A' < 0,077$, then the TO of UD can be written in the following typical form:

$$G_{F_{x1}}(s) = \frac{g_y(s)}{F_{x1}(s)} = K_0 \cdot \frac{T_3^2 \cdot s^2 + 2\varepsilon \cdot T_3 \cdot s + 1}{(T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2 \cdot s + 1)} \quad (14)$$

where: ε - coefficient of attenuation

$$\varepsilon = \frac{0,5 + A'}{0,577} \quad (15)$$

In the case when $A' > 0,078$, the approximating relation for the analysed TO assumes the form of:

$$G_{F_{x1}} = \frac{g_y(s)}{F_{x1}(s)} = K_0 \cdot \frac{(T_4 \cdot s + 1) \cdot (T_5 \cdot s + 1)}{(T_1 \cdot s + 1) \cdot (T_2 \cdot s + 1)} \quad (16)$$

where: $T_{4,5} = 0,5\tau \cdot \left[0,5 + A' \pm \sqrt{(0,5 + A')^2 - 1/3} \right]$.

In an analogous way, on the basis of the generalized structural schematic and system of equations [9] models of DS were obtained for other control effects. The approximating relations of dynamic system TO for various control effects differ from those presented here only in the value of the gain coefficient K_0 of the CO . Instead of coefficient $K_{F_{x1}}$ in relation (8) for K_0 , in such a case coefficients of gain for the respective effects $K_e, K_{F_{dod.1}}, K_{M_1}, K_{M_{skr}}$ are inserted. The values of those coefficients can be calculated according to the relations given in [10].

In many cases, with accuracy sufficient for practical engineering calculations, approximating relations for TO (7) should be built with the use of the first component of the splitting of function e^{-st} into a Padé series:

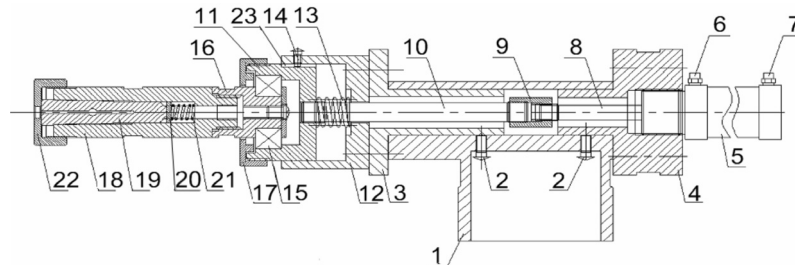
$$e^{-st} = (1 - \frac{1}{2}s \cdot \tau) / (1 + \frac{1}{2}s \cdot \tau) \quad (17)$$

Table 1 presents operator transmittances, coefficients of gain and time constants for the generalized and the detailed MM of dynamic system for the turning of low-rigidity shafts in the elastic-deformable state.

2.3. Practical application of the model

The model prepared according to above described methodology was used for building 5 level hierarchical diagram arranging model structures and typical structures of the DS of machining process of low rigid shafts in elastic deformable state for different control influences. Basing on it the PID controller for cutting force control in turning process and PI controller for low-rigidity shafts turning process were designed. Advanced works in the aim of the construction of the executive unit - the tailstock of machine tool, allowing to control the elastic deformable state of the low-rigid shaft while turning were made,

cego sterowanie stanem sprężyste odkształcalnym wału o małej sztywności podczas toczenia, co zaowocowało czterema zgłoszeniami patentowymi konstrukcji koników przy różnym sposobie wytwarzania i sterowania siłą rozciągającą. Przykład konstrukcji konika przedstawiono na rys.1.



Rys. 1. Jedna z konstrukcji konika – sterowanie siłą rozciągającą przy pomocy systemu pneumatycznego
Fig. 1. One of tailstocks designs – tensile force control is realised by pneumatic system

3. Podsumowanie

Jak wynika z przeprowadzonych badań, struktury dynamiczne *MM* układów technologicznych wałów o małej sztywności przy sterowaniu ich stanem sprężyste- odkształcalnym zawierają obok członów inercyjnych charakterystycznych w przypadku *MM* sterowania według posuwu, również człony przeciążeniowe. Występowanie członów przeciążeniowych w transmitancjach *MM* zmniejsza inercyjność *OS* według kanałów sterowania dodatkowymi oddziaływaniami siłowymi. Na przykład przy bliskich wartościach stałych czasowych licznika i mianownika w zależnościach (16) i (26), co ma miejsce w wielu przypadkach, właściwości modelu *OS* zbliżają się do właściwości członu bezinercyjnego ze współczynnikiem przekazywania K_0 .

Należy podkreślić, że rozpatrzony opis matematyczny *OS* został wykonany przy nieuwzględnieniu „małych” stałych czasowych, charakteryzujących właściwości dynamiczne procesu skrawania i ekwiwalentnego układu sprężystego. Takie podejście jest uzasadnione, ponieważ w obwód *UAS* lub *AC* razem z obiektem wchodzi także automatyczne urządzenie sterujące i inne człony z „dużymi” stałymi czasowymi, których właściwości dynamiczne są bardzo istotne przy rozwiązaniu zadania analizy stabilności i syntezy członów korygujących.

Porównanie *MM* obiektu dla różnorodnych oddziaływań sterujących umożliwia stwierdzenie, że przy zastosowaniu dodatkowych oddziaływań siłowych obiekt ma znacznie mniejszą inercyjność w porównaniu z przypadkiem sterowania według kanału posuwu. Dzięki temu w *UAS* i *AC* stanu sprężyste - odkształcalnego części zasadniczo można uzyskać wyższe wskaźniki jakości sterowania w dynamice i efektywnie przeciwdziałać zakłóceniom, wywołanym zmianą nadmiaru i twardości obrabianych półfabrykatów, zmieniając ich sztywność po długości obróbki.

Z przedstawionej analizy wynika, że metoda informacyjna również jest dogodna, dlatego, że umożliwia podział *MM* układów dynamicznych – obiektów sterowania według jakości i ilości informacji włożonej w *MM* i daje możliwość usystematyzowania sił projektantów przy projektowaniu i przygotowaniu technologicznym procesów technologicznych, opracowaniu systemów zautomatyzowanego projektowania i *UAS* oraz *AC* w celu rozwiązania stojących przed nimi zadań.

what resulted in four patent applications of tailstocks construction for various ways of generating and controlling the tensile force. Example tailstock is presented on fig.1.

3. Conclusion

As follows from the performed study, dynamic structures of *MM* of technological systems for low-rigidity shafts with control of their elastic-deformable condition include, apart from inertial segments characteristic for *MM* of feed-related control, also overload segments. The occurrence of the overload segments in transmittances of the *MM* reduces the inertness of the control objects with respect to channels of control of additional force effects. według kanałów sterowania dodatkowymi oddziaływaniami siłowymi. For example, with close values of time constants of the numerator and denominator in relations (16) and (26), as happens in numerous cases, the properties of model of *CO* approach those of the non-inertial segment with transmission coefficient.

It should be emphasized that the discussed mathematical description of the *CO* was made with the exclusion of “small” time constants characterizing the dynamic properties of the process of machining and of the equivalent elastic system. Such an approach is justified as the *ACS* or *AC* circuit includes, apart from the object, also an automatic control device and other components with “large” time constants, whose dynamic properties are highly significant in the solution of the problem of stability analysis and synthesis of corrective segments.

Comparison of *MM* of the object for various control effects permits the statement that with the application of additional force effects the object has a notably lower inertness compared to the case of control focused on the feed channel. Thanks to this in the *ACS* and *AC* of the elastic-deformable state of parts higher indexes of control quality can be achieved in the dynamics and there is a possibility of effective counteraction of interference caused by changes in material allowance for machining and in the hardness of machined semi-finished products by varying their rigidity on the length of machining.

The presented analysis shows that the information-oriented method is also suitable as it permits division of *MM* of dynamic systems – control objects according to the quality and quantity of information introduced in the *MM* and creates the possibility of systemizing the capacity of design engineers in the design and technological development of technological processes, development of systems of automated design, as well as of *ACS* and *AC*, with a view to solving the problems they are facing.

Tablica 1. Transmittancje operatorowe, współczynniki wzmocnienia oraz stałe czasowe uogólnionego i uproszczonego układu dynamicznego toczenia wałów o małej sztywności w stanie sprężyste - odkształcalnym

Table 1. Operator transmittances, coefficients of gain and time constants of generalized and simplified MM of dynamic system of turning of shafts with low rigidity in elastic-deformable condition

No	$K_{\kappa_r} \neq 0, \kappa_r \neq 90^\circ$				$K_{\kappa_r} = 0, \kappa_r = 90^\circ$			
	Dynamical System Operator Transmittance	Coefficient of Gain	Time Constants	Dynamical System Operator Transmittance	Coefficient of Gain	Time Constants	Dynamical System Operator Transmittance	Time Constants
1	Using first two elements of Padé Approximation for $e^{-s\tau}$; $G_{T1}(s) = K_0 \frac{T_3^2 s^2 + T_3 s + 1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$	$K_0 = \frac{K_{F_{x1}}}{1 + K_{xy} n_x + K_{bz} n_z K_z + K_{yy} n_y}$ $A_1 = m_x K_x + K_{\kappa_r} (m_y K_y + m_x K_{xy} + K_{xy} n_x K_y m_y) + K_{bz} K_z K_{\kappa_r} (m_z + n_z m_y K_y + K_{yy} m_y K_{\kappa_r} (1 + n_y K_y)) / (1 + K_{xy} n_x + K_{bz} K_z n_z + K_{yy} n_y)$	$T_{1,2} = 0,5\tau [0,5 + B_1 \pm \sqrt{(0,5 + B_1)^2 - 1/3}]$ $T_3 = 0,289\tau$ $T'_3 = (0,5 + A_1)\tau$	Using first two elements of Padé Approximation for $e^{-s\tau}$; $G'_{T1}(s) = K_0 \frac{T_3'^2 s^2 + T_3' s + 1}{(T_1' s + 1)(T_2' s + 1)}$	$K_0 = \frac{K_{F_{x1}}}{1 + K_{xy} n_x + K_{bz} n_z K_z + K_{yy} n_y}$ $A_1' = m_x K_x$ $B_1' = \frac{m_x K_x}{1 + K_{xy} n_x + K_{bz} n_z K_z + K_{yy} n_y}$	$T_{1,2} = 0,5\tau [0,5 + B_1' \pm \sqrt{(0,5 + B_1')^2 - 1/3}]$ $T_3 = 0,289\tau$ $T'_3 = (0,5 + A_1')\tau$		
1	$m_x K_x \ll 1$	$K_0 = \frac{K_{F_{x1}}}{1 + K_{xy} n_x + K_{bz} n_z K_z + K_{yy} n_y}$ $A_2 = m_y K_y K_{\kappa_r}$ $B_2 = \{K_{\kappa_r} (m_y K_y + K_{xy} n_x m_y K_y) + K_{xy} m_x (K_{\kappa_r} - n_x K_x) + K_{bz} n_z K_z \times [K_{\kappa_r} n_z m_y K_y + m_z (K_{\kappa_r} - n_x K_x)] + [K_{\kappa_r} n_z m_y K_y + m_z (K_{\kappa_r} - n_x K_x)] + (1 + K_{xy} n_x + K_{bz} K_z n_z + K_{yy} n_y)$	$T_{1,2} = 0,5\tau [0,5 + B_2 \pm \sqrt{(0,5 + B_2)^2 - 1/3}]$ $T_3 = 0,289\tau$ $T'_3 = (0,5 + A_2)\tau$	$G'_{T1}(s) = K_0 \frac{T_3^2 s^2 + 2\epsilon T_3 s + 1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$	$K_0 = \frac{K_{F_{x1}}}{1 + K_{xy} n_x + K_{bz} n_z K_z + K_{yy} n_y}$ $A_2' = 0$ $B_2' = n_x K_x (m_z K_{bz} K_z + m_x K_{xy} + m_y K_{yy}) / (1 + K_{xy} n_x + K_{bz} n_z K_z + K_{yy} n_y)$	$T_{1,2} = 0,5\tau [0,5 + B_2' \pm \sqrt{(0,5 + B_2')^2 - 1/3}]$ $T_3 = 0,289\tau$ $T'_3 = 0,5\tau$ $\epsilon = \frac{T_3'}{2T_3} = 0,866$		
1	$m_x K_x \ll 1, K_{bz} n_z K_z \ll 1$	$K_0 = \frac{K_{F_{x1}}}{1 + K_{xy} n_x + K_{yy} n_y}$ $A_2 = m_y K_y K_{\kappa_r}$ $B_3 = \{K_{\kappa_r} (m_y K_y + K_{xy} n_x m_y K_y) + K_{xy} m_x (K_{\kappa_r} - n_x K_x) + K_{yy} m_y (K_{\kappa_r} - n_x K_x)\} / (1 + K_{xy} n_x + K_{yy} n_y)$	$T_{1,2} = 0,5\tau [0,5 + B_3 \pm \sqrt{(0,5 + B_3)^2 - 1/3}]$ $T_3 = 0,289\tau$ $T'_3 = (0,5 + A_2)\tau$		$K_0 = \frac{K_{F_{x1}}}{1 + K_{xy} n_x + K_{yy} n_y}$ $A_2' = 0$ $B_3' = n_x K_x (m_x K_{xy} + m_y K_{yy}) / (1 + K_{xy} n_x + K_{bz} n_z K_z + K_{yy} n_y)$	$T_{1,2} = 0,5\tau [0,5 + B_3' \pm \sqrt{(0,5 + B_3')^2 - 1/3}]$ $T_3 = 0,289\tau$ $T'_3 = 0,5\tau$ $\epsilon = 0,866$		

Tablica 1. Transmitancje operatorowe, współczynniki wzmocnienia oraz stałe czasowe uogólnionego i uproszczonego MM układu dynamicznego toczenia wałów o małej sztywności w stanie sprężysto - odkształcalnym (cd.)

Table 1. Operator transmittances, coefficients of gain and time constants of generalized and simplified MM of dynamic system of turning of shafts with low rigidity in elastic-deformable condition (continued)

1	2	3	4	5	6	7
1	$K_{xy} \ll 1$	$K_0 = \frac{K_{F_{x1}}}{1 + K_{yy}n_y}$ $A_2 = m_y K_y K_{\kappa_r}$ $B_4 = [K_{yy}m_y K_{\kappa_r} (n_y K_y + 1) + K_{yy}m_y (K_{\kappa_r} - n_x K_x)] / (1 + K_{yy}n_y)$	$T_{1,2} = 0,5\tau[0,5 + B_4 \pm \sqrt{(0,5 + B_4)^2 - 1/3}]$ $T_3 = 0,289\tau$ $T_3' = (0,5 + A_2)\tau$		$K_0 = \frac{K_{F_{x1}}}{1 + K_{yy}n_y}$ $A_2' = 0$ $B_4' = n_x K_x K_{yy}m_y / (1 + K_{yy}n_y)$	$T_{1,2} = 0,5\tau[0,5 + B_3' \pm \sqrt{(0,5 + B_3')^2 - 1/3}]$ $T_3 = 0,289\tau$ $T_3' = 0,5\tau$ $\varepsilon = 0,866$
2	$A_1 \ll 0,077$ $G_{T1}(s) = K_0 \frac{T_3^2 s^2 + 2\delta T_{3s} + 1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$	$K_0 = \frac{K_{F_{x1}}}{1 + K_{xy}n_x + K_{bz}n_z K_z + K_{yy}n_y}$ $A_1 = m_x K_x + m_y K_y K_{\kappa_r}, B_1 = B_1$	$T_{1,2} = 0,5\tau[0,5 + B_1 \pm \sqrt{(0,5 + B_1)^2 - 1/3}]$ $T_3 = 0,289\tau$ $\varepsilon = \frac{0,5 + A_1}{0,577}$	$G_{T1}(s) = K_0 \frac{T_3^2 s^2 + 2\delta T_{3s} + 1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$	$K_0 = \frac{K_{F_{x1}}}{1 + K_{xy}n_x + K_{bz}n_z K_z + K_{yy}n_y}$ $A_1' = m_x K_x$ $B_1' = \frac{m_x K_x}{1 + K_{xy}n_x + K_{bz}n_z K_z + K_{yy}n_y}$	$T_{1,2} = 0,5\tau[0,5 + B_1' \pm \sqrt{(0,5 + B_1')^2 - 1/3}]$ $T_3 = 0,289\tau$ $\varepsilon = \frac{0,5 + A_1}{0,577}$
2	$m_x K_x \ll 1, A_2 \ll 0,077$	$K_0 = \frac{K_{F_{x1}}}{1 + K_{xy}n_x + K_{bz}n_z K_z + K_{yy}n_y}$ $A_2 = m_y K_y K_{\kappa_r}, B_2 = B_2$	$T_{1,2} = 0,5\tau[0,5 + B_2 \pm \sqrt{(0,5 + B_2)^2 - 1/3}]$ $T_3 = 0,289\tau$ $\varepsilon = \frac{0,5 + A_2}{0,577}$	$G_{T1}(s) = K_0 \frac{T_3^2 s^2 + 2\delta T_{3s} + 1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$	$K_0 = \frac{K_{F_{x1}}}{1 + K_{xy}n_x + K_{bz}n_z K_z + K_{yy}n_y}$ $A_2' = 0, B_2' = B_2'$	$T_{1,2} = 0,5\tau[0,5 + B_2' \pm \sqrt{(0,5 + B_2')^2 - 1/3}]$ $T_3 = 0,289\tau$ $\varepsilon = 0,866$
2	$m_x K_x \ll 1, K_{bz}n_z K_z \ll 1$	$K_0 = \frac{K_{F_{x1}}}{1 + K_{xy}n_x + K_{yy}n_y}$ $A_2 = m_y K_y K_{\kappa_r}, B_3 = B_3$	$T_{1,2} = 0,5\tau[0,5 + B_3 \pm \sqrt{(0,5 + B_3)^2 - 1/3}]$ $T_3 = 0,289\tau$ $\varepsilon = \frac{0,5 + A_2}{0,577}$		$K_0 = \frac{K_{F_{x1}}}{1 + K_{xy}n_x + K_{yy}n_y}$ $A_2' = 0, B_3' = B_3'$	$T_{1,2} = 0,5\tau[0,5 + B_3' \pm \sqrt{(0,5 + B_3')^2 - 1/3}]$ $T_3 = 0,289\tau$ $\varepsilon = 0,866$
2	$K_{xy} \ll 1$	$K_0 = \frac{K_{F_{x1}}}{1 + K_{yy}n_y}$ $A_2 = m_y K_y K_{\kappa_r}, B_4 = B_4$	$T_{1,2} = 0,5\tau[0,5 + B_4 \pm \sqrt{(0,5 + B_4)^2 - 1/3}]$ $T_3 = 0,289\tau$ $\varepsilon = \frac{0,5 + A_2}{0,577}$		$K_0 = \frac{K_{F_{x1}}}{1 + K_{yy}n_y}$ $A_2' = 0, B_4' = B_4'$	$T_{1,2} = 0,5\tau[0,5 + B_4' \pm \sqrt{(0,5 + B_4')^2 - 1/3}]$ $T_3 = 0,289\tau$ $\varepsilon = 0,866$

Tablica 1. Transmittancje operatorowe, współczynniki wzmocnienia oraz stałe czasowe uogólnionego i uproszczonego MM układu dynamicznego toczenia wałów o małej sztywności w stanie sprężyste - odkształcalnym

Table 1. Operator transmittances, coefficients of gain and time constants of generalized and simplified MM of dynamic system of turning of shafts with low rigidity in elastic-deformable condition

1	2	3	4	5	6	7
3	$A_1 \geq 0,078$ $G_{T2}(s) = \frac{(T_{4s} + 1)(T_{5s} + 1)}{T_{1s} + 1)(T_{2s} + 1)}$	$K_0 = \frac{K_{F_{31}}}{1 + K_{sp}n_x + K_{bz}n_z K_z + K_{yp}n_y}$ $A_1 = m_x K_x + m_y K_y K_{kr}, B_1 = B_1$	$T_{4,5} = 0,5\tau[0,5 + A_1 \pm \sqrt{(0,5 + A_1)^2 - 1/3}]$ $T_{1,2} = 0,5\tau[0,5 + B_1 \pm \sqrt{(0,5 + B_1)^2 - 1/3}]$	$G_{T2}(s) = \frac{(T_{4s} + 1)(T_{5s} + 1)}{T_{1s} + 1)(T_{2s} + 1)}$	$K_0 = \frac{K_{F_{31}}}{1 + K_{sp}n_x + K_{bz}n_z K_z + K_{yp}n_y}$ $A_1' = m_x K_x, B_1' = B_1'$	$T_{4,5} = 0,5\tau[0,5 + A_1' \pm \sqrt{(0,5 + A_1')^2 - 1/3}]$ $T_{1,2} = 0,5\tau[0,5 + B_1' \pm \sqrt{(0,5 + B_1')^2 - 1/3}]$
3	$m_x K_x \ll 1, A_2 \geq 0,078$	$K_0 = \frac{K_{F_{31}}}{1 + K_{sp}n_x + K_{bz}n_z K_z + K_{yp}n_y}$ $A_2 = m_y K_y K_{kr}, B_2 = B_2$	$T_{4,5} = 0,5\tau[0,5 + A_2 \pm \sqrt{(0,5 + A_2)^2 - 1/3}]$ $T_{1,2} = 0,5\tau[0,5 + B_2 \pm \sqrt{(0,5 + B_2)^2 - 1/3}]$	$G_{T1}(s) = K_0 \frac{T_{3s}^2 + 2\epsilon T_{3s} + 1}{(T_{1s} + 1)(T_{2s} + 1)}$	$K_0 = \frac{K_{F_{31}}}{1 + K_{sp}n_x + K_{bz}n_z K_z + K_{yp}n_y}$ $A_2' = 0, B_2' = B_2'$	$T_{1,2} = 0,5\tau[0,5 + B_2' \pm \sqrt{(0,5 + B_2')^2 - 1/3}]$ $T_3 = 0,289\tau$ $\epsilon = 0,866$
3	$m_x K_x \ll 1, K_{bz}n_z K_z \ll 1$	$K_0 = \frac{K_{F_{31}}}{1 + K_{sp}n_x + K_{yp}n_y}$ $A_2 = m_y K_y K_{kr}, B_3 = B_3$	$T_{4,5} = 0,5\tau[0,5 + A_2 \pm \sqrt{(0,5 + A_2)^2 - 1/3}]$ $T_{1,2} = 0,5\tau[0,5 + B_3 \pm \sqrt{(0,5 + B_3)^2 - 1/3}]$		$K_0 = \frac{K_{F_{31}}}{1 + K_{sp}n_x + K_{yp}n_y}$ $A_2' = 0, B_3' = B_3'$	$T_{1,2} = 0,5\tau[0,5 + B_3' \pm \sqrt{(0,5 + B_3')^2 - 1/3}]$ $T_3 = 0,289\tau$ $\epsilon = 0,866$
3	$K_{sp} \ll 1$	$K_0 = \frac{K_{F_{31}}}{1 + K_{yp}n_y}$ $A_2 = m_y K_y K_{kr}, B_4 = B_4$	$T_{4,5} = 0,5\tau[0,5 + A_2 \pm \sqrt{(0,5 + A_2)^2 - 1/3}]$ $T_{1,2} = 0,5\tau[0,5 + B_4 \pm \sqrt{(0,5 + B_4)^2 - 1/3}]$		$K_0 = \frac{K_{F_{31}}}{1 + K_{yp}n_y}$ $A_2' = 0, B_4' = B_4'$	$T_{1,2} = 0,5\tau[0,5 + B_4' \pm \sqrt{(0,5 + B_4')^2 - 1/3}]$ $T_3 = 0,289\tau$ $\epsilon = 0,866$
4	Using the first element of Padé Approximation for $e^{-s\tau}$: $G_{T3}(s) = K_0 \frac{T_{2s} + 1}{T_{3s} + 1}$	$K_0 = \frac{K_{F_{31}}}{1 + K_{sp}n_x + K_{bz}n_z K_z + K_{yp}n_y}$ $A_1 = m_x K_x + m_y K_y K_{kr}, B_1 = B_1$	$T_0 = \tau, T_1 = 0,5\tau$ $T_2 = \tau(0,5 + A_1)$ $T_3 = \tau(0,5 + B_1)$	Using the first element of Padé Approximation for $e^{-s\tau}$: $G_{T3}(s) = K_0 \frac{T_{2s} + 1}{T_{3s} + 1}$	$K_0 = \frac{K_{F_{31}}}{1 + K_{sp}n_x + K_{bz}n_z K_z + K_{yp}n_y}$ $A_1' = m_x K_x, B_1' = B_1'$	$T_0 = \tau, T_1 = 0,5\tau$ $T_2 = \tau(0,5 + A_1')$ $T_3 = \tau(0,5 + B_1')$

Tablica 1. Transmitancje operatorowe, współczynniki wzmocnienia oraz stałe czasowe uogólnionego i uproszczonego MM układu dynamicznego toczenia wałów o małej sztywności w stanie sprężystości - odkształcalnym (cd.)

Table 1. Operator transmittances, coefficients of gain and time constants of generalized and simplified MM of dynamic system of turning of shafts with low rigidity in elastic-deformable condition (continued)

1	2	3	4	5	6	7
4	$m_x K_x \ll 1$	$K_0 = \frac{K_{F_{31}}}{1 + K_{xy} n_x + K_{bz} n_z K_z + K_{yy} n_y}$ $A_2 = m_y K_y K_{kr}, B_2 = B_2$	$T_0 = \tau, T_1 = 0,5\tau$ $T_2 = \tau(0,5 + A_2)$ $T_3 = \tau(0,5 + B_2)$		$K_0 = \frac{K_{F_{31}}}{1 + K_{xy} n_x + K_{bz} n_z K_z + K_{yy} n_y}$ $A'_1 = 0, B'_2 = B'_2$	$T_0 = \tau$ $T_1 = T_2 = 0,5\tau$ $T_3 = \tau(0,5 + B'_2)$
	$m_x K_x \ll 1, K_{bz} n_z K_z \ll 1$	$K_0 = \frac{K_{F_{31}}}{1 + K_{xy} n_x + K_{yy} n_y}$ $A_2 = m_y K_y K_{kr}, B_3 = B_3$	$T_0 = \tau, T_1 = 0,5\tau$ $T_2 = \tau(0,5 + A_2)$ $T_3 = \tau(0,5 + B_3)$		$K_0 = \frac{K_{F_{31}}}{1 + K_{xy} n_x + K_{yy} n_y}$ $A'_2 = 0, B'_3 = B'_3$	$T_0 = \tau$ $T_1 = T_2 = 0,5\tau$ $T_3 = \tau(0,5 + B'_3)$
	$K_{xy} \ll 1$	$K_0 = \frac{K_{F_{31}}}{1 + K_{yy} n_y}$ $A_2 = m_y K_y K_{kr}, B_4 = B_4$	$T_0 = \tau, T_1 = 0,5\tau$ $T_2 = \tau(0,5 + A_2)$ $T_3 = \tau(0,5 + B_4)$		$K_0 = \frac{K_{F_{31}}}{1 + K_{yy} n_y}$ $A'_2 = 0, B'_4 = B'_4$	$T_0 = \tau$ $T_1 = T_2 = 0,5\tau$ $T_3 = \tau(0,5 + B'_4)$

4. References

1. Abakumow A, Taranenko W, Zubrzycki J. Moduły programowe dla badania charakterystyk układu dynamicznego procesu skrawania. Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej 230 Mechanika, z. - Modułowe Technologie i Konstrukcje w Budowie Maszyn 2006: 99-109.
2. Abakumov A, Taranenko V, Zubrzycki J. Modeling of characteristics of dynamic system of turning process for axialsymmetric shafts. V-th International Congress: Mechanical Engineering Technologies-06 (MT06). Varna: Proceedings 2006: 76 - 78
3. Kujan K. Badania i analiza powtarzalności rozkładu odchyłek geometrycznych w procesie obróbki skrawaniem. Eksploatacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability 2008; 3(39): 45-52.
4. Kuśmierz L, Ponieważ G. Analiza wpływu modyfikacji geometrii krawędzi elementu oporowego płytki wahlowej na właściwości strefy kontaktu. Eksploatacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability 2007;1(33): 53-58.
5. Kuśmierz L, Ponieważ G. Badania numeryczne wpływu obciążenia oraz geometrii krawędzi elementu oporowego segmentu wahlowego na właściwości strefy kontaktu. Eksploatacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability 2007;2 (34): 10-14.
6. Marchelek K. Dynamika obrabiarek. Warszawa: WNT, 1974.
7. Semotiuk L. Analiza cech eksploatacyjnych innowacyjnych konstrukcji narzędzi wykorzystywanych w procesach frezowania zgrubnego z wykorzystaniem technologii HSM. Eksploatacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability 2009;1 (41): 46-53.
8. Taranenko W, Świć A. Technologia kształtowania części maszyn o małej sztywności. Lublin. Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej, 2005.
9. Taranenko W, Świć A. Urządzenia sterujące dokładnością obróbki części maszyn o małej sztywności. Lublin: Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej, 2006.
10. Taranenko W, Szabelski J, Taranenko G. Podstawy identyfikacji układu dynamicznego toczenia wałów o małej sztywności. Pomiary Automatyka Robotyka 2008; 2

Doc. dr inż. Georgij TARANENKO

Narodowy Uniwersytet Techniczny w Sewastopolu
Ul. Gigola 14, 99053 Sewastopol, Ukraina
e-mail: peot@sevntu.com.ua

Prof. dr hab. inż. Wiktor TARANENKO

Dr hab. inż. Antoni ŚWIĆ, prof. nazw.,

Mgr inż. Jakub SZABELSKI

Instytut Technologicznych Systemów Informatycznych
Politechnika Lubelska
Ul. Nadbystrzycka 36, 20-618 Lublin
e-mail: w.taranenko@pollub.pl
e-mail: a.swic@pollub.pl
e-mail: j.szabelski@pollub.pl