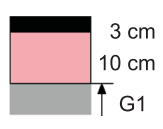
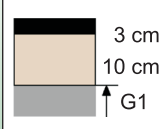
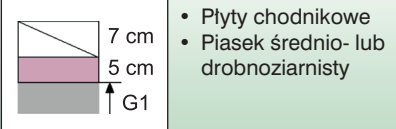
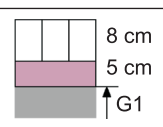
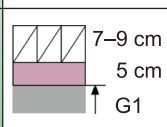


Tabela 13. Zalecane konstrukcje nawierzchni chodników przeznaczonych wyłącznie do ruchu pieszych [3]

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Warstwa ścieralna z asfaltu lanego</li> <li>• Podbudowa zasadnicza z kruszywa łamanego stabilizowanego mechanicznie</li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Warstwa ścieralna z asfaltu lanego lub asfaltu piaskowego</li> <li>• Podbudowa zasadnicza z gruntu stabilizowanego spoiwem hydraulicznym</li> </ul>	 <ul style="list-style-type: none"> <li>• Płyty chodnikowe</li> <li>• Piasek średnio- lub drobnoziarnisty</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Warstwa ścieralna z kostki betonowej</li> <li>• Piasek średnio- lub drobnoziarnisty</li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Warstwa ścieralna z kostki kamiennej</li> <li>• Piasek średnio- lub drobnoziarnisty</li> </ul>	

#### Bibliografia

- [1] Mały rocznik statystyczny Polski. Główny Urząd Statystyczny. Warszawa, 2008
- [2] Rozporządzenie Ministra Infrastruktury z dnia 12 kwietnia 2002 r. w sprawie warunków technicznych, jakim powinny odpowiadać budynki i ich usytuowanie (Dz. U. nr 75, poz. 690)
- [3] Rozporządzenie Ministra Transportu i Gospodarki Morskiej z dnia 2 marca 1999 r. w sprawie warunków technicznych, jakim powinny odpowiadać drogi publiczne i ich usytuowanie (Dz.U. nr 43 poz. 430)

- [4] Korzeniewski W. *Parkingi i garaże dla samochodów osobowych. Wymagania techniczno-prawne*. Centralny Ośrodek Informacji Budownictwa. Warszawa 2000, s. 110
- [5] Budny J. *Jak dostosować budynek*. Wyd. Stowarzyszenia Przyjaciół Integracji. Warszawa 2004, s. 86
- [6] Rozporządzenie Ministra Spraw Wewnętrznych i Administracji z dnia 15 stycznia 1999 r. w sprawie określenia szczegółowych wymagań w zakresie przeciwpożarowego zaopatrzenia wodnego, ratownictwa technicznego, chemicznego, ekologicznego lub medycznego oraz warunków, jakim powinny odpowiadać drogi pożarowe. (Dz.U. nr 99.7.64)
- [7] Gaca St., Suchorzewski W., Tracz M. *Inżynieria ruchu drogowego. Teoria i praktyka*. WKiŁ, Warszawa 2009, s. 504 ■



## Ekonomiczno-geometryczne aspekty projektowania łuków pionowych

W ustalaniu pionowego kształtu tras drogowych dominuje podejście polegające na projektowaniu niwelety utworzonej przez poligon stycznych i wyokrągłaniu jego załamań za pomocą odpowiednich łuków pionowych. Jako łuki wyokrągłające służą z reguły łuki kołowe lub paraboliczne 2. stopnia. Szczegółowe zasady projektowania takich łuków w sposób ścisły zostały przedstawione m.in. w pracy [6], a ostatnio w pracach [5] i [4]. O rozpowszechnieniu takiego podejścia w praktyce decyduje głównie prostota matematyczna tych rozwiązań i wynikająca stąd możliwość bardzo rutynowego wykonywania określonych czynności projektowych. Jak się okazuje, kołowe lub paraboliczne łuki wyokrągłające nie są jednak najwłaściwsze pod względem ekonomicznym i ekologicznym, chociażby z powodu zużycia paliwa.

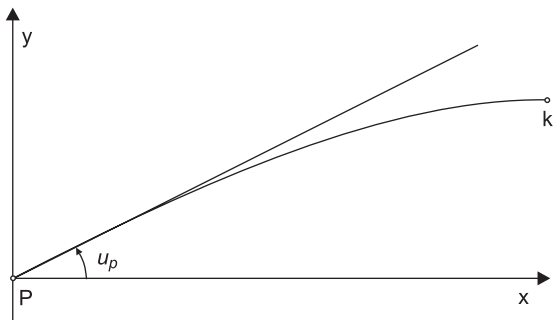
Autor niniejszego artykułu w ramach projektu badawczego KBN nr 8 T12C 022 21 [2] przeprowadził odpowiednie badania numeryczne w zakresie wskaźników zużycia paliwa w różnych grupach pojazdów kilku wariantów łuków pionowych, które były utworzone zarówno przez elementy tradycyjne, jak też przez wybrane tzw. wierzchołkowe krzywe przejściowe. Podstawę przeprowadzonych badań stanowiły odpowiednie zapisy zawarte w wytycznych *Empfehlungen für Wirtschaftlichkeitsuntersuchungen an Straßen (Aktualisierung der RAS-W 86)*. Wyniki badań wykazały, że celowe jest wyokrągla-

nie załamań niwelety np. za pomocą tzw. wielomianowych krzywych przejściowych, gdyż pozwala to na znaczną redukcję zużycia paliwa w obrębie łuków pionowych. Krzywe te są opisane nieco bardziej złożonymi wzorami niż łuki paraboliczne, jednak obecnie nie jest to problemem z uwagi na rozwój techniki komputerowej.

W artykule zaprezentowano matematyczne rozwiązania wielomianowych krzywych przejściowych oraz w skrócie opisano wyniki badań dotyczących zużycia paliwa. W nawiązaniu do tych wyników, wskazujących na możliwą redukcję zużycia paliwa przy stosowaniu wielomianowych krzywych przejściowych, zaproponowano szczegółowe procedury obliczeniowe w odniesieniu do wyokrągłania załamań niwelety za pomocą łuków wierzchołkowych, tworzonych przez te krzywe.

### Wielomianowe krzywe przejściowe i ich właściwości

Wielomianowe krzywe przejściowe różnią się od większości innych znanych krzywych przejściowych innym usytuowaniem w układzie współrzędnych (rys. 1). Styczna w punkcie początkowym, tzw. styczna główna, nie zajmuje położenia poziomego, lecz jest nachylona pod pewnym kątem  $u_p$  względem osi odciętych. Krzywizna tych krzywych osiąga wartość maksymalną  $-1/R_K$  w punkcie końcowym K



Rys. 1. Wielomianowa krzywa przejściowa w układzie współrzędnych prostokątnych

o odciętej  $x_K$ , natomiast w punkcie początkowym P krzywizna jest równa zero. Wśród wielomianowych krzywych przejściowych znane są rozwiązania krzywych o gładkim i niegładkim wykresie krzywizny. Przedstawiona w pracy [1] rodzina krzywych o gładkim wykresie krzywizny jest opisana równaniem:

$$y = \frac{-\kappa \operatorname{tg} u_P}{C} \left[ Ct + \frac{2-5C}{2} t^4 - \frac{7-15C}{5} t^5 + \frac{1-2C}{2} t^6 \right] \quad (1)$$

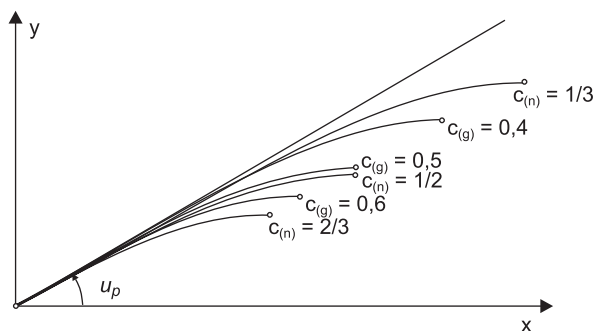
przy czym  $t = \frac{x}{x_K}$  oraz

$$C = \frac{R_K \operatorname{tg} u_P}{x_K} \quad (2)$$

Rodzina krzywych o niegładkim wykresie krzywizny ma następującą postać [3]:

$$y = \frac{x_K \operatorname{tg} u_P}{C} \left[ Ct + \frac{1-3C}{3} t^3 - \frac{1-2C}{4} t^4 \right] \quad (3)$$

Parametr C może w przypadku krzywych (1) przybierać wartości z przedziału  $C \in \langle 4/10; 6/10 \rangle$ , natomiast w przypadku krzywych (3) – z przedziału  $C \in \langle 1/3; 2/3 \rangle$ . Daje to duże możliwości zmiany geometrii krzywych w ramach określonej rodziny. Pokazano to na rysunku 2, który zawiera wykresy krzywych odpowiadające różnym wartościom C dla danej wartości kąta  $u_p$  lub promienia  $R_K$  (oznaczenia na rysunku:  $C_{(g)}$  – krzywe o gładkim wykresie krzywizny,  $C_{(n)}$  – krzywe o niegładkim wykresie krzywizny).



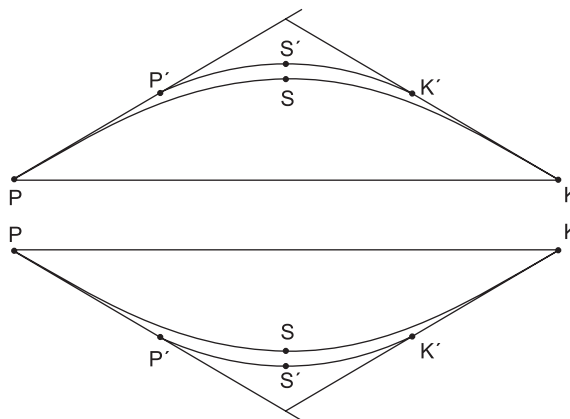
Rys. 2. Rodzina wielomianowych krzywych przejściowych

## Redukcja zużycia paliwa na niekonwencjonalnych łukach pionowych

W porównaniu z łukiem kołowym lub łukiem paraboli kwadratowej o minimalnym promieniu krzywizny równym R, krzywe przejściowe charakteryzuje to, że przy jednakowej zmianie pochylenia stycznych między początkiem a końcem łuku przejście do tej samej wartości promienia krzywizny następuje na większej długości łuku. W rezultacie zmniejsza się też średnia wartość pochylenia stycznej do krzywej, liczonego względem stycznej w punkcie początkowym łuku.

Wiadomo również, że zużycie paliwa przez pojazdy zależy m.in. od pochylenia podłużnego drogi. Z tego powodu można zakładać, że zmiana podejścia do projektowania łuków pionowych i stosowanie do tego celu krzywych przejściowych pozwoli uzyskać redukcję zużycia paliwa przez pojazdy.

W proponowanym podejściu pionowy łuk niwelety tworzyłyby dwie krzywe przejściowe (wariant B), zamiast tradycyjnego rozwiązania z łukami kołowymi/ parabolicznymi (wariant A). Przy tej samej wartości minimalnego promienia krzywizny, odcinek niwelety określony przez punkty PP'S'K'K w podejściu tradycyjnym (wariant A) zostałby zastąpiony odcinkiem PSK w podejściu proponowanym (wariant B) (rys. 3).



Rys. 3. Dwa rodzaje łuków pionowych – paraboliczny (P'S'K') i utworzony przez krzywe przejściowe (PSK)

Autor określił wartości wskaźników zużycia paliwa w obydwu wariantach łuków pionowych. W obliczeniach wykorzystane zostały ustalenia wynikające z wytycznych *Empfehlungen für Wirtschaftlichkeitsuntersuchungen an Straßen (Aktualisierung der RAS-W 86)*. Na ich podstawie możliwe jest wyznaczenie wskaźników zużycia paliwa dla różnych grup pojazdów, które podzielone są w następujący sposób:

- PO – samochody osobowe z silnikiem benzynowym,
- PD – samochody osobowe z silnikiem Diesla,
- LN – samochody ciężarowe 2,8 t – 3,5 t,
- LS – samochody ciężarowe > 3,5 t, pojazdy specjalne oraz pojazdy rolnicze,
- Z – samochody ciężarowe z naczepami/ przyczepami,
- BR – autobusy turystyczne,
- BL – autobusy liniowe.

Zgodnie z tymi wytycznymi, współczynnik zużycia paliwa w przypadku rozgrzanego silnika i prędkości ruchu  $v > 20$  km/h wyraża się następującą funkcją regresji:

$$EF_{FG}(v) = c_0 + c_1 v^2 + \frac{c_2}{v} \quad (4)$$

przy czym odpowiednie parametry  $c_0$ ,  $c_1$  i  $c_2$  odnoszą się do 1990 r.

Wpływ pochylenia podłużnego  $s$  na współczynnik zużycia paliwa jest określany za pomocą współczynnika korekcyjnego  $SF_P(v,s)$ , który zapewnia uzyskanie wartości współczynnika równej jedności przy pochyleniu niwelety  $s = 0$ , czyli spełnienie warunku  $SF_{FG}(v,s=0) = 1$ . W przypadku samochodów osobowych (grupa PO i PD) ma on postać:

$$SF_P(v,s) = \exp \left[ \left( c_0 - \frac{(v-v_0)^2}{c_1} \right) \cdot (c_2 s + c_3 s^2) \cdot 10^{-6} \right] \quad (5)$$

natomiast dla samochodów ciężarowych (grupy LN, LS, Z) i autobusów (grupy BR i BL) wyraża się on równaniem:

$$SF_{L,Z,B}(s) = \exp [s c_1 \cdot (1 + c_2 s - c_3 s^2)] \quad (6)$$

z odpowiednimi wartościami współczynników  $c_0$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  i  $c_3$ .

Jeśli uwzględnimy potencjał w zakresie redukcji zużycia paliwa wskutek postępu technicznego, określony przez odpowiednie współczynniki redukcyjne  $k_f$  (względem zużycia paliwa w 1990 r.), to wynikowe współczynniki zużycia paliwa dla lat 1995, 2000, 2005 i 2010 można określić ze wzoru:

$$EF_P(v,s,J) = EF_P(v) \cdot SF_P(v,s) \cdot k_f(J) \quad (7)$$

w przypadku samochodów osobowych lub ze wzoru:

$$EF_{(L,Z,B)}(v,s,J) = EF_{(L,Z,B)}(v) \cdot SF_{L,Z,B}(s) \cdot k_f(J) \quad (8)$$

w przypadku pozostałych grup pojazdów.

Odpowiednie wartości współczynników zużycia paliwa, wyznaczone w obydwu wariantach symetrycznych łuków pionowych dla 2005 r., zestawiono w tabelach 1 i 2. Podane wartości odnoszą się zarówno do łuków wklęsłych, jak i wypukłych, gdyż – jak się okazuje – w obydwu przypadkach wskaźniki zużycia paliwa są jednakowe. Wartości podane w kolumnie „zmiana pochylenia” należy rozumieć jako zmianę pochylenia między początkowym a środkowym punktem łuku. Na całej długości rozpatrywanego łuku pionowego zmiana pochylenia podłużnego jest więc równa podwójnej wartości podanej w kolumnie „zmiana pochylenia”.

Na podstawie wartości podanych w tabelach 1 i 2 można stwierdzić, że proponowane podejście do wyokrąglenia załamów niwelety umożliwia znaczącą redukcję zużycia paliwa w porównaniu z tradycyjnym sposobem projektowania za pomocą parabol 2. stopnia. Wielkość możliwej redukcji odpowiednich wskaźników zużycia paliwa rośnie wraz ze wzrostem pochylenia podłużnego i prędkości ruchu.

W poszczególnych grupach pojazdów zmniejszenie zużycia paliwa osiąga różne rozmiary. Względna wielkość redukcji w wariantcie B w stosunku do zużycia paliwa w wariantcie A, wyrażona jako  $(B - A)/A$  [%] jest największa w przypadku sa-

mochołów osobowych, najmniejsza zaś w przypadku autobusów liniowych. Względna wielkość redukcji w przypadku samochodów ciężarowych jest mniejsza niż dla samochodów osobowych, lecz należy zauważyć, że zmniejszenie wartości odpowiednich wskaźników wyrażone w liczbach bezwzględnych  $(B - A)$  wynosi dla samochodów ciężarowych z naczepami około 1/6 całkowitych wskaźników zużycia paliwa w grupie samochodów osobowych, a w grupie autobusów turystycznych – aż 1/4 wartości wskaźników dla samochodów osobowych.

Wartości w tabelach 1 i 2 pokazują też, że najmniejsze wartości wskaźników zużycia paliwa charakteryzują krzywe o największych wartościach parametru  $C$ , tj. krzywe (1) z  $C = 6/10$  i krzywe (3) z  $C = 2/3$ . Można przyjąć, że krzywe te są najkorzystniejsze z punktu widzenia możliwej redukcji zużycia paliwa w obrębie łuków pionowych.

## Projektowanie łuków pionowych tworzonych przez wielomianowe krzywe przejściowe

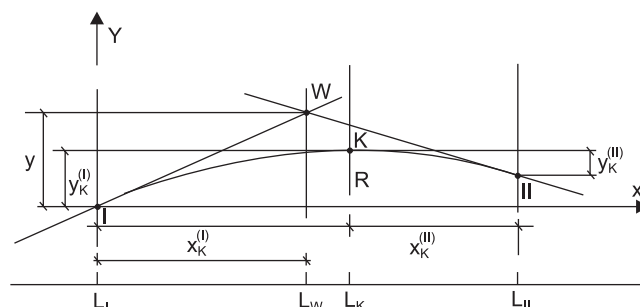
Przedstawiony tu sposób projektowania łuków pionowych tworzonych przez wielomianowe krzywe przejściowe nawiązuje do procedur opisanych przez autora w pracy [4] w odniesieniu do tradycyjnych łuków w postaci parabol drugiego stopnia. Niech będą dane dwa kolejne prostoliniowe odcinki, które stanowią fragment niwelety zaprojektowanej jako poligon stycznych (rys. 4). Przyjmijmy, że załamanie niwelety między dwiema prostymi o pochyleniach  $s_I$  i  $s_{II}$  będzie wyokrąglone za pomocą wielomianowych krzywych przejściowych, przy czym początkowy punkt łuku przyjmijmy w początku lokalnego układu współrzędnych projektowanego łuku pionowego. Rozważmy najpierw łuk wypukły niwelety wyznaczony przez punkty I, II i K, przy czym nieznane położenie punktów I, II i K wyznaczmy wg procedury opisanej poniżej.

Punkty I i II utożsamimy odpowiednio z początkowymi punktami I i II krzywej, co pozwala zapisać:

$$\operatorname{tg} u_p^{(I)} = s_I \quad (9)$$

$$\operatorname{tg} u_p^{(II)} = -s_{II} \quad (10)$$

Jeśli przyjmijmy jednakowy parametr  $C$  obydwu krzywych i jednakowy promień krzywizny w punkcie styku K tych krzywych, to na podstawie (2) możemy zapisać:



Rys. 4. Łuk pionowy wypukły złożony z dwóch krzywych wielomianowych

Tabela 1. Przeciętne wskaźniki zużycia paliwa w wariantach A i B i ich zmiany w przypadku krzywych (1)

Zmiana pochylenia	Grupa pojazdów	Wariant	Prędkość ruchu v=60 km/h			Prędkość ruchu v=100 km/h		
			Parametr krzywej			Parametr krzywej		
			C = 4/10	C = 5/10	C = 6/10	C = 4/10	C = 5/10	C = 6/10
0,04	PO	A	51,43	50,75	50,06	59,94	58,90	57,85
		B	50,54	49,86	49,46	58,57	57,54	56,91
		B-A	-0,89	-0,88	-0,61	-1,37	-1,36	-0,94
		(B-A)/A [%]	-1,7	-1,7	-1,2	-2,3	-2,3	-1,6
	PD	A	45,57	44,96	44,36	53,95	53,01	52,07
		B	44,78	44,18	43,82	52,72	51,78	51,22
		B-A	-0,79	-0,79	-0,54	-1,23	-1,23	-0,85
		(B-A)/A [%]	-1,7	-1,7	-1,2	-2,3	-2,3	-1,6
	LN	A	90,10	88,99	87,88	116,28	114,84	113,41
		B	88,68	87,58	86,91	114,46	113,03	112,17
		B-A	-1,41	-1,41	-0,96	-1,82	-1,81	-1,24
		(B-A)/A [%]	-1,6	-1,6	-1,1	-1,6	-1,6	-1,1
	LS	A	174,51	171,95	169,38	253,66	249,93	246,21
		B	171,32	168,76	167,20	249,03	245,31	243,05
		B-A	-3,19	-3,19	-2,18	-4,63	-4,62	-3,16
		(B-A)/A [%]	-1,8	-1,8	-1,3	-1,8	-1,8	-1,3
	Z	A	310,93	304,09	297,25	367,50	359,42	351,34
		B	302,57	295,75	291,57	357,62	349,55	344,61
		B-A	-8,36	-8,34	-5,68	-9,89	-9,87	-6,72
		(B-A)/A [%]	-2,7	-2,7	-1,9	-2,7	-2,7	-1,9
	BR	A	254,28	249,08	243,89	279,60	274,13	268,41
		B	247,69	242,51	239,38	272,60	266,90	263,46
		B-A	-6,59	-6,58	-4,51	-7,24	-7,23	-4,95
		(B-A)/A [%]	-2,6	-2,6	-1,9	-2,6	-2,6	-1,9
	BL	A	222,46	221,12	219,78	193,72	192,55	191,39
		B	220,88	219,53	218,70	192,34	191,17	190,45
		B-A	-1,58	-1,58	-1,08	-1,38	-1,38	-0,94
		(B-A)/A [%]	-0,7	-0,7	-0,5	-0,7	-0,7	-0,5
0,08	PO	A	80,85	77,25	73,64	108,36	103,53	96,43
		B	75,80	72,21	70,13	99,81	95,03	90,49
		B-A	-5,06	-5,04	-3,51	-8,55	-8,50	-5,94
		(B-A)/A [%]	-6,3	-6,5	-4,8	-7,9	-8,2	-6,2
	PD	A	71,63	68,44	65,25	97,52	92,16	86,79
		B	67,16	63,98	62,14	89,84	84,50	81,45
		B-A	-4,47	-4,46	-3,10	-7,69	-7,66	-5,35
		(B-A)/A [%]	-6,2	-6,5	-4,8	-7,9	-8,3	-6,2
	LN	A	127,31	122,81	118,31	164,31	158,50	152,69
		B	121,57	117,08	114,37	156,90	151,11	147,61
		B-A	-5,74	-5,73	-3,94	-7,40	-7,39	-5,08
		(B-A)/A [%]	-4,5	-4,7	-3,3	-4,5	-4,7	-3,3
	LS	A	242,76	234,57	226,38	352,85	340,96	329,06
		B	233,20	225,02	219,89	338,98	327,08	319,63
		B-A	-9,55	-9,55	-6,49	-13,87	-13,88	-9,43
		(B-A)/A [%]	-3,9	-4,1	-2,9	-3,9	-4,1	-2,9
	Z	A	440,83	425,62	410,41	520,99	503,03	485,06
		B	426,98	411,70	401,34	504,65	486,59	474,35
		B-A	-13,85	-13,92	-9,07	-16,34	-16,44	-10,71
		(B-A)/A [%]	-3,1	-3,3	-2,2	-3,1	-3,3	-2,2
	BR	A	431,05	409,50	387,96	474,45	450,73	427,00
		B	402,52	381,05	368,25	443,01	419,38	405,30
		B-A	-28,53	-28,45	-19,70	-31,43	-31,34	-21,70
		(B-A)/A [%]	-6,6	-7,0	-5,1	-6,6	-7,0	-5,1
	BL	A	241,26	239,09	236,92	210,09	208,21	206,32
		B	239,94	237,75	236,14	208,95	207,04	205,64
		B-A	-1,32	-1,34	-0,78	-1,14	-1,17	-0,68
		(B-A)/A [%]	-0,5	-0,6	-0,3	-0,5	-0,6	-0,3

Tabela 2. Przeciętne wskaźniki zużycia paliwa w wariantach A i B i ich zmiany w przypadku krzywych (3)

Zmiana pochylenia	Grupa pojazdów	Wariant	Prędkość ruchu v=60 km/h			Prędkość ruchu v=100 km/h		
			Parametr krzywej			Parametr krzywej		
			C=1/3	C=1/2	C=2/3	C=1/3	C=1/2	C=2/3
0,04	PO	A	51,89	50,75	49,61	60,64	58,90	57,15
		B	50,48	49,35	48,87	58,47	56,75	56,02
		B-A	-1,41	-1,39	-0,73	-2,17	-2,51	-1,13
		(B-A)/A [%]	-2,7	-2,7	-1,5	-3,6	-3,6	-2,0
	PD	A	45,98	44,96	43,95	54,58	53,01	51,44
		B	44,72	43,73	43,30	52,62	51,08	50,42
		B-A	-1,25	-1,24	-0,65	-1,96	-1,93	-1,02
		(B-A)/A [%]	-2,7	-2,7	-1,5	-3,6	-3,6	-2,0
	LN	A	90,84	88,99	87,14	117,23	114,84	112,46
		B	88,58	86,76	85,97	114,32	111,97	110,95
		B-A	-2,26	-2,23	-1,17	-2,91	-2,87	-1,51
		(B-A)/A [%]	-2,5	-2,5	-1,3	-2,5	-2,5	-1,3
	LS	A	176,22	171,95	167,67	256,15	249,93	243,72
		B	171,10	166,88	165,02	248,71	242,57	239,88
		B-A	-5,12	-5,07	-2,65	-7,44	-7,36	-3,84
		(B-A)/A [%]	-2,9	-2,9	-1,6	-2,9	-2,9	-1,6
	Z	A	315,49	304,09	292,69	372,89	359,42	345,95
		B	302,03	290,75	285,76	356,97	343,65	337,75
		B-A	-13,46	-13,33	-6,93	-15,92	-15,77	-8,20
		(B-A)/A [%]	-4,3	-4,4	-2,4	-4,3	-4,4	-2,4
	BR	A	257,74	249,08	240,43	285,65	274,13	264,60
		B	247,20	238,67	234,96	272,07	262,67	258,59
		B-A	-10,53	-10,42	-5,47	-11,58	-11,45	-6,01
		(B-A)/A [%]	-4,1	-4,2	-2,3	-4,1	-4,2	-2,3
	BL	A	223,35	221,12	218,88	194,50	192,55	190,61
		B	220,78	218,56	217,56	192,26	190,33	189,46
		B-A	-2,57	-2,56	-1,32	-2,23	-2,22	-1,15
		(B-A)/A [%]	-1,2	-1,2	-0,6	-1,2	-1,2	-0,6
0,08	PO	A	83,26	77,25	71,23	112,33	102,40	92,46
		B	75,34	69,47	67,05	99,01	89,33	85,40
		B-A	-7,92	-7,78	-4,18	-13,33	-13,07	-7,06
		(B-A)/A [%]	-9,5	-10,1	-5,9	-11,9	-12,8	-7,6
	PD	A	73,77	68,44	63,11	101,10	92,16	83,22
		B	66,75	61,55	59,41	89,11	80,40	76,86
		B-A	-7,01	-6,89	-3,70	-11,99	-11,76	-6,35
		(B-A)/A [%]	-9,5	-10,1	-5,9	-11,9	-12,8	-7,6
	LN	A	130,31	122,81	115,32	168,18	158,50	148,82
		B	121,15	113,75	110,54	156,36	146,81	142,67
		B-A	-9,16	-9,06	-4,77	-11,82	-11,69	-6,16
		(B-A)/A [%]	-7,0	-7,4	-4,1	-7,0	-7,4	-4,1
	LS	A	248,22	234,57	220,93	360,78	340,96	321,13
		B	232,70	219,13	212,95	338,25	318,53	309,54
		B-A	-15,41	-15,43	-7,98	-22,53	-22,43	-11,59
		(B-A)/A [%]	-6,3	-6,6	-3,6	-6,3	-6,6	-3,6
	Z	A	450,97	425,62	400,27	532,96	503,03	473,08
		B	427,15	401,48	388,55	504,86	474,52	459,23
		B-A	-23,82	-24,14	-11,72	-28,11	-28,51	-13,85
		(B-A)/A [%]	-5,3	-5,7	-2,9	-5,3	-5,7	-2,9
	BR	A	445,42	409,50	373,59	490,25	450,73	411,19
		B	400,30	365,03	349,93	440,57	401,75	385,13
		B-A	-45,11	-44,47	-23,66	-49,68	-48,97	-26,05
		(B-A)/A [%]	-10,1	-10,9	-6,3	-10,1	-10,9	-6,3
	BL	A	242,70	239,09	235,48	211,35	208,21	205,07
		B	240,15	236,42	234,34	209,13	205,88	204,07
		B-A	-2,56	-2,67	-1,14	-2,22	-2,33	-1,00
		(B-A)/A [%]	-1,1	-1,1	-0,5	-1,1	-1,1	-0,5



$$\frac{x_K^{(I)}}{\operatorname{tg} u_p^{(I)}} = \frac{x_K^{(II)}}{\operatorname{tg} u_p^{(II)}} \quad (11)$$

W układzie współrzędnych jak na rysunku 4 można równanie pierwszej stycznej zapisać jako:

$$y = \operatorname{tg} u_p^{(I)} \cdot x \quad (12)$$

a drugiej stycznej jako:

$$y = -\operatorname{tg} u_p^{(II)} \cdot (x - x_{II}) + y_{II} \quad (13)$$

gdzie  $x_{II}$  i  $y_{II}$  są współrzędnymi punktu  $I$  w układzie współrzędnych jak na rysunku 4.

Na podstawie (12) i (13), dla punktu przecięcia ( $W$ ) obydwu stycznych otrzymamy wówczas:

$$x(\operatorname{tg} u_p^{(I)} + \operatorname{tg} u_p^{(II)}) = y_{II} + x_{II} \operatorname{tg} u_p^{(II)} \quad (14)$$

Współrzędne  $x_{II}$  i  $y_{II}$  punktu  $I$  można jednak wyrazić jako:

$$x_{II} = x_K^{(I)} + x_K^{(II)} \quad (15)$$

$$y_{II} = y_K^{(I)} - y_K^{(II)} \quad (16)$$

przy czym:

$x_K^{(I)}$ ,  $x_K^{(II)}$  – odcięte końcowych punktów I i II krzywej w układzie współrzędnych jak na rysunku 1,

$y_K^{(I)}$ ,  $y_K^{(II)}$  – rzędne końcowych punktów I i II krzywej, obliczone na podstawie równań (1) lub (3).

Wartości  $y_K^{(I)}$  i  $y_K^{(II)}$  można wyrazić w ogólnej formie jako:

$$y_K = \frac{5C+1}{10C} x_K \operatorname{tg} u_p \quad (17)$$

w przypadku krzywej opisanej równaniem (1) oraz jako:

$$y_K = \frac{6C+1}{12C} x_K \operatorname{tg} u_p \quad (18)$$

w przypadku krzywej opisanej równaniem (3).

Ponieważ zgodnie z (11) jest

$$x_K^{(II)} = x_K^{(I)} \frac{\operatorname{tg} u_p^{(II)}}{\operatorname{tg} u_p^{(I)}} \quad (19)$$

zatem na podstawie (15) wyrazimy odciętą  $x_{II}$  jako:

$$x_{II} = x_K^{(I)} \frac{\operatorname{tg} u_p^{(I)} + \operatorname{tg} u_p^{(II)}}{\operatorname{tg} u_p^{(I)}} \quad (20)$$

Jeśli przyjmijemy przykładowo, że pionowy łuk niwelety tworzą dwie wielomianowe krzywe przejściowe (1) o gładkim wykresie krzywizny, to na podstawie (16) oraz po odpowiednich przekształceniach zapiszemy rzędną  $y_{II}$  jako:

$$y_{II} = x_K^{(I)} \frac{5C+1}{10C} \frac{(\operatorname{tg} u_p^{(I)} - \operatorname{tg} u_p^{(II)})(\operatorname{tg} u_p^{(I)} + \operatorname{tg} u_p^{(II)})}{\operatorname{tg} u_p^{(I)}} \quad (21)$$

Na podstawie (14), (20) i (21) otrzymamy więc:

$$x = x_K^{(I)} \frac{5C+1}{10C} \frac{\operatorname{tg} u_p^{(I)} - \operatorname{tg} u_p^{(II)}}{\operatorname{tg} u_p^{(I)}} + x_K^{(I)} \frac{5C+1}{10C} \frac{\operatorname{tg} u_p^{(II)}}{\operatorname{tg} u_p^{(I)}} \quad (22)$$

Jeśli przyjmijemy, że  $R$  jest promieniem krzywizny w punkcie styku  $K$  obydwu krzywych, to z (2) wynika, że:

$$x_K^{(I)} = \frac{R \operatorname{tg} u_p^{(I)}}{C} \quad (23)$$

Po uwzględnieniu (23) w (22) i po odpowiednich przekształceniach otrzymuje się:

$$x = R \frac{(5C+1)\operatorname{tg} u_p^{(I)} + (5C-1)\operatorname{tg} u_p^{(II)}}{10C^2} \quad (24)$$

Powyższy wzór określa odciętą punktu przecięcia stycznych (punkt  $W$ ) w lokalnym układzie współrzędnych jak na rysunku 4. Na podstawie (24) i (12) rzędna  $y$  punktu  $W$  wyniesie:

$$y = R \frac{(5C+1)\operatorname{tg} u_p^{(I)} + (5C-1)\operatorname{tg} u_p^{(II)}}{10C^2} \operatorname{tg} u_p^{(I)} \quad (25)$$

W przypadku użycia krzywych (3) o niegładkim wykresie krzywizny uzyskamy odpowiednio:

$$x = R \frac{(6C+1)\operatorname{tg} u_p^{(I)} + (6C-1)\operatorname{tg} u_p^{(II)}}{12C^2} \quad (26)$$

$$y = R \frac{(6C+1)\operatorname{tg} u_p^{(I)} + (6C-1)\operatorname{tg} u_p^{(II)}}{12C^2} \operatorname{tg} u_p^{(I)} \quad (27)$$

Przy znanym położeniu punktu  $W$ , wartości  $x$  i  $y$  zdefiniowane za pomocą (24) i (25) lub (26) i (27) umożliwiają ostatecznie ściśle wyznaczenie położenia punktów skrajnych I i II łuku pionowego, utworzonego przez dwie wielomianowe krzywe przejściowe. Kilometraż  $L_I$  i wysokość  $z_I$  punktu  $I$  wynoszą:

$$L_I = L_W - x \quad (28)$$

$$z_I = z_W - y \quad (29)$$

W przypadku końca łuku (punkt  $II$ ) kilometraż i wysokość wynoszą:

$$L_{II} = L_W - x + x_K^{(I)} + x_K^{(II)} \quad (30)$$

$$z_{II} = z_W - y + y_K^{(I)} - y_K^{(II)} \quad (31)$$

Dla punktów pośrednich położonych na 1. części łuku (między punktami  $I$  i  $K$ ) otrzymuje się:

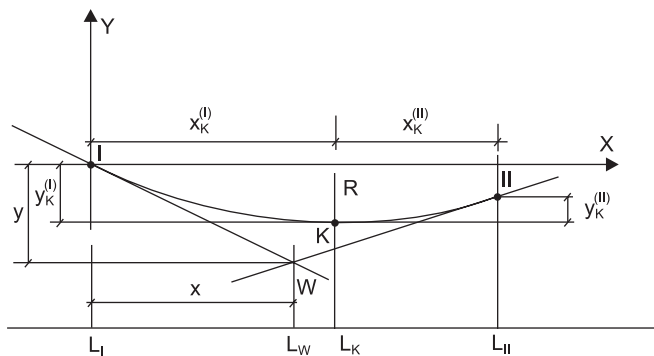
$$L_i^{(I)} = L_W - x + x_i^{(I)}$$

$$z_i^{(I)} = z_W - y + y_i^{(I)}$$

gdzie  $y_i^{(I)}$  określa się na podstawie równania krzywej dla  $x_i^{(I)} = L_i - L_I$ .

Dla punktów pośrednich na 2. części łuku (między punktami  $K$  i  $II$ ) uzyskuje się:

$$L_i^{(II)} = L_W - x + x_K^{(I)} + x_K^{(II)} - x_i^{(II)}$$



Rys. 5. Łuk pionowy wklęsły złożony z dwóch krzywych wielomianowych

$$z_i^{(II)} = z_W - y + y_K^{(I)} - y_K^{(II)} + y_i^{(II)}$$

gdzie  $y_i^{(II)}$  określa się na podstawie równania krzywej dla  $x_i^{(II)} = L_{II} - L_I$ .

Jeśli projektowany łuk wyokrąglający byłby łukiem wklęsłym (rys. 5), to z pochyłeń niwelety zaprojektowanej jako poligon stycznych wynikają wartości:

$$\operatorname{tg} u_p^{(I)} = -s_I \quad (32)$$

$$\operatorname{tg} u_p^{(II)} = s_{II} \quad (33)$$

Równania obydwu stycznych w lokalnym układzie współrzędnych jak na rysunku 5 zapiszemy jako:

- pierwsza styczna

$$y = -\operatorname{tg} u_p^{(I)} \cdot x \quad (34)$$

- druga styczna

$$y = \operatorname{tg} u_p^{(II)} \cdot (x - x_{II}) + y_{II} \quad (35)$$

W rezultacie podobnych rozważań jak dla łuków wypukłych wynika, że odcięta  $x$  punktu przecięcia stycznych jest opisana za pomocą równania analogicznego jak (24) ew. (26). Rzędna  $y$  punktu W wynika zaś z (34) jako:

$$y = -R \frac{(5C + 1)\operatorname{tg} u_p^{(I)} + (5C - 1)\operatorname{tg} u_p^{(II)}}{10C^2} \operatorname{tg} u_p^{(I)} \quad (36)$$

(w przypadku krzywych (1) o gładkim wykresie krzywizny) albo

$$y = -R \frac{(6C + 1)\operatorname{tg} u_p^{(I)} + (6C - 1)\operatorname{tg} u_p^{(II)}}{12C^2} \operatorname{tg} u_p^{(I)} \quad (37)$$

(w przypadku krzywych (3) o niegładkim wykresie krzywizny).

W rezultacie, nieznane położenie początkowego punktu I łuku jest opisane równaniem (28) oraz równaniem:

$$z_I = z_W + y \quad (38)$$

w którym wartość  $y$  wynika z (36) lub (37).

Położenie punktu II opisujemy zaś za pomocą (30) oraz:

$$z_{II} = z_W + y - y_K^{(I)} + y_K^{(II)} \quad (39)$$

Dla punktów pośrednich otrzymamy zaś:

- część łuku między punktami I i K

$$L_i^{(I)} = L_W - x + x_K^{(I)}$$

$$z_i^{(I)} = z_W + y - y_i^{(I)}$$

- część łuku między punktami K i II

$$L_i^{(II)} = L_W - x + x_K^{(I)} + x_K^{(II)} - x_i^{(II)}$$

$$z_i^{(II)} = z_W + y - y_K^{(I)} + y_K^{(II)} - y_i^{(II)}$$

przy czym wartości  $y_i^{(I)}$  i  $y_i^{(II)}$  określa się na podstawie równania krzywej dla  $x_i^{(I)} = L_i - L_I$  oraz  $x_i^{(II)} = L_{II} - L_I$ .

## Uwagi końcowe

W świetle wyników przedstawionych w niniejszym artykule można stwierdzić, że przy stosowaniu wielomianowych krzywych przejściowych aspekty ekonomiczne związane z możliwą redukcją zużycia paliwa uzasadniają zmianę podejścia do wyokrąglenia załamania niwelety zaprojektowanej jako poligon stycznych. Należy przy tym zauważyć, że ewentualna redukcja zużycia paliwa może również przekładać się na odpowiednią redukcję emisji spalin, co jest istotne w świetle kryteriów ekologicznych.

Zgodnie z proponowanym podejściem, do projektowania łuków wyokrąglających mogą służyć wielomianowe krzywe przejściowe (1) lub (3), które są szczególnie korzystne dla większych wartości parametru  $C$  odpowiednio z przedziałów  $\langle 4/10; 6/10 \rangle$  lub  $\langle 1/3; 2/3 \rangle$ . Przedstawione wyżej procedury projektowe umożliwiają sprawne obliczenie punktów położonych na odpowiednich łukach pionowych utworzonych przez te krzywe. Dlatego też, zdaniem autora, wielomianowe krzywe przejściowe mogą stanowić interesującą alternatywę dla tradycyjnego podejścia do projektowania łuków pionowych, szczególnie w przypadku niwelety tras przebiegających przez tereny o urozmaiconej rzeźbie, gdzie z reguły mamy do czynienia z większymi pochyleniami niwelety.

## Bibliografia

- [1] Grabowski R.J. (1984): *Gładkie przejścia krzywoliniowe w drogach kołowych i kolejowych*. Zeszyty Naukowe AGH, Geodezja nr 82, Kraków
- [2] Kobryń A. (2002a): *Koncepcja doboru geometrycznych elementów niwelety tras drogowych z uwzględnieniem minimalizacji zużycia paliwa*. Projekt badawczy KBN nr 8 T12C 022 21, Białystok. (Raport z badań, maszynopis)
- [3] Kobryń A. (2002b): *Wielomianowe krzywe przejściowe w projektowaniu niwelety tras drogowych*. Wydawnictwa Politechniki Białostockiej, Rozprawy Naukowe nr 100, Białystok
- [4] Kobryń A. (2007): *Projektowanie niwelety tras drogowych metodami ścisłymi*. Drogownictwo nr 1, Warszawa
- [5] Nowaczyk G. (1997): *Niektóre aspekty projektowania odwodnienia jezdni na łukach pionowych*. Drogownictwo nr 7, Warszawa.
- [6] Stoffel F.: *Geometrische und kinematische Probleme der Gestaltung von Straßen im Grund- und Aufriss*. Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität, Bonn 1969. (Dissertation)
- [7] Empfehlungen für Wirtschaftlichkeitsuntersuchungen an Straßen. Aktualisierung der RAS-W 86. Forschungsgesellschaft für Straßen- und Verkehrswesen, Köln 1997 ■