

ZASTOSOWANIE METODY BROWNA DO PROGNOZOWANIA ZNISZCZENIA KOMPOZYTU WARSTWOWEGO

APPLYING THE BROWN METHOD TO FORECAST THE FAILURE OF A LAMINATE COMPOSITE

Przeprowadzono badania wytrzymałościowe polegające na rozciąganiu ze stałą prędkością aż do momentu zniszczenia trzydziestu próbek kompozytu warstwowego wzmocnionego włóknem szklanym, formowanego metodą RTM. Dane empiryczne charakteryzowały się dużym rozrzutem, co wymagało wykonania analizy statystycznej. Dla uzyskanych danych zaproponowano metodę umożliwiającą wyznaczenie prognozy naprężeń niszczących próbkę. Prognoza powstaje w oparciu o analizę relacji empirycznej pomiędzy odkształceniem a naprężeniem w stanach poprzedzających zniszczenie próbki z zastosowaniem metody Browna.

Słowa kluczowe: kompozyt warstwowy, zniszczenie, modelowanie, metoda Browna.

A fiberglass-reinforced laminate composite material formed by resin transfer molding (RTM) was tested for tensile strength. Thirty samples were stretched with a constant velocity until they failed. As there was a large scatter of empirical data, a statistical analysis was performed. The data were used to forecast stresses that lead to the material failure. The forecast was based on the stress-strain relationship immediately before failure. The forecasting involved simple exponential smoothing using the Brown method.

Keywords: laminate composite, failure, modeling, the Brown method.

1. Wprowadzenie

Kompozyty złożone z włókien wzmacniających i matrycy polimerowej wymagają coraz większej informacji o ich własnościach mechanicznych zaspokajających wymagania przemysłu w zakresie jakości i powtarzalności produkowanych wyrobów [8]. Mechanika kompozytów rozwijała się w stworzeniu teorii deformacji i zniszczenia na bazie strukturalnych rozważań [1]. Przy tworzeniu modeli obliczeniowych dążymy do związania charakterystyk komponentów kompozytu z wytrzymałością wyrobu.

Do opisanego wpływu wszystkich dostępnych, fizycznych charakterystyk konieczne są związki pomiędzy własnościami włókna kompozytu jednokierunkowego czy kompozytu warstwowego [10, 13-14].

W przypadku kompozytów polimerowych niszczeniu ulegają komponenty kompozytowe poprzez pęknięcia w matrycy, delaminację, zniszczenie wzmocnienia, pojawienie się mikro-pęknięcia i jego rozwoju aż do zniszczenia [15, 19]. Potrzeba określenia trwałości statycznej, czy zmęczeniowej elementów konstrukcji z materiałów na osnowie polimerowej, wymusza na nas poszukiwanie innych niż opartych na czystym opisie fizycznym, sposobów oceny trwałości. Do nich zaliczyć można przede wszystkim te, które oparte są na mniej lub bardziej fizycznie uzasadnionych, fenomenologicznych hipotezach kumulacji uszkodzeń.

Poza hipotezami fenomenologicznymi spotkać także można hipotezy statystyczne oparte na związkach statystycznych pomiędzy wynikami badań uzyskanymi w warunkach stałych obciążeń, a wynikami dla obciążeń eksploatacyjnych czy im odpowiadających [5, 12].

Statystyczne teorie wytrzymałości rozwijały się w pracach Daniela [9], Bolotina [3], Rozena [16], Tamuz, Teterca [11],

1. Introduction

It is essential that the properties of laminate composites be thoroughly investigated because of the increasing requirements of industry for high quality and repeatable products [8]. The theory of deformation and failure developed according to the mechanics of composites involves meso- and nano-scale structure modeling [1]. Calculation models need to take into account the properties of composites, the adhesion phenomena and the fiber orientation. The literature on the subject [10, 13-14] describes numerous concepts of such models based on the relationships between the characteristics of the particular constituents and the overall strength. The failure taking place in polymer-based composites is a multi-stage phenomenon starting with matrix cracking followed by delamination and failure of reinforcement, then microcrack initiation and propagation, and finally overall failure [15, 19]. It is necessary that the durability of structural polymer-composite elements subjected to static or fatigue loads be determined using methods other than those based on purely physical description. The alternative methods are based on more or less physically justifiable phenomenological hypotheses of damage accumulation.

Apart from the phenomenological hypotheses, there exist statistical hypotheses based on the relationships between experimental results obtained under constant and variable load conditions, with the latter simulating real service conditions [5, 12].

The statistical theory of strength has been discussed, for instance, by Daniels [9], Bolotin [3], Rozen [16], Tamuz and Teterca [11], Kleinhof [7], and Tai [17]. These works deal with the strength of fibers in laminate composites established at different loads acting on the matrix and the interface. Adhesive strength was also considered. There was a considerable scatter

Kleinhoffa [7], Tai [17] i innych. Ogólnie mówiąc badano wytrzymałość włókna w kompozycie przy różnych dopuszczeniach pracy matrycy i pogranicznej warstwy między komponentami kompozytu (wytrzymałość adhezyjna).

Niniejsza praca jest próbą przedstawienia wybranego fragmentu zachowania się komponentów kompozytu na podstawie polimerowej uwzględniając wpływ parametrów technologii na starzenie.

2. Metodyka i przebieg badań

Materiałem badanym jest kompozyt warstwowy wzmocniony włóknem szklanym wykonany metodą RTM (ang. Resin Transfer Moulding) w Centrum Kompozytów w firmie „BELLA”, którego parametry technologiczne ilustruje tabela 1 [1, 4].

Tab. 1. Parametry technologiczne formowanego techniką RTM kompozytu

Tab. 1. Technological parameters of the composite produced with the RTM method.

Kompozyt Composite	Współczynnik wzmocnienia [%] (objętościowy) Strength coefficient,% (volumetric) Syncoglass 5375/k500/375	Żywica Resin	Utwardzacz Stiffener Peroxan M50L [ml]	Ciśnienie wtrysku Pressure [atm]	Czas utwardzania Additional hardening [min]	Czas odformowania Deforming time [min]
A	41,0	Polimal 109-32K	40	1,0	15	95

Z uzyskanej płyty laminatu (z żywicy Polimal 109-32K i wzmocnienia w postaci maty szklanej Syncoglass 5375/k500/375) o grubość ok. $1.8 \pm 2,0$ mm wycięto próbki według normy PN – EN 10002 – 1 +AC1, 1997, które poddano statycznej próbie rozciągania.

Statyczna próba rozciągania została przeprowadzona na maszynie wytrzymałościowej INSTRON 4502 w Laboratorium Wytrzymałości Materiałów – Centrum Laserowych Technologii Metali Politechniki Świętokrzyskiej.

Technologia wykonania polegała na ułożeniu dwóch warstw maty szklanej pomiędzy górną i dolną częścią formy, a następnie po szczelnym zamknięciu formy wtłoczono ciekłą mieszkankę żywicy pod ciśnieniem ok. 100 kPa (1 atm), którą pozostawiono do utwardzenia.

Jednym z celów tworzenia kompozytów warstwowych jest hamowanie procesów powstawania i propagacji szczelin w materiale. Odporność kompozytu na pęknięcie jest tym większa im więcej warstw włókna szklanego zawiera kompozyt, którego mikrostrukturę ilustruje rysunek 1.

Kierunek ułożenia włókien szklanych jest typu 2D. Udział włókien w przenoszeniu obciążeń jest zależny od procentowej objętości włókien V_f w materiale, od stosunku modułów odkształcalności włókien i matrycy E_f/E_m , oraz od wytrzymałości adhezyjnej pomiędzy komponentami. Z badań własnych [6] wynika, że wytrzymałość kompozytu zależy także od niedotrzymania parametrów technologicznych i tzw. efektów krawędziowych.

Przyjmuje się, że w statycznej próbie rozciągania kompozytu warstwowego zachodzi trzy etapowy proces zniszczenia. W pierwszym etapie zniszczeniu ulega matryca, w której można zaobserwować liczne mikropęknięcia w całej objętości materiału (rys. 2).

of results; the calculation data did not coincide with the results of the laboratory tests. It is vital that the new models take account of the forecast theory from the point of view of mathematical statistics.

2. Material

The material under analysis was a fiberglass-reinforced laminate composite produced by resin transfer molding (RTM) at the BELLA Composite Centre with the following composition [1, 4]:

From the produced laminate plate (with Polimal 109-32K epoxy and reinforced with the glass mat Syncoglass 5375/k500/375) of height ca. $1.8 \pm 2,0$ mm samples were cut according to PN-EN 10002-1+AC1, which underwent static tensile strength tests.

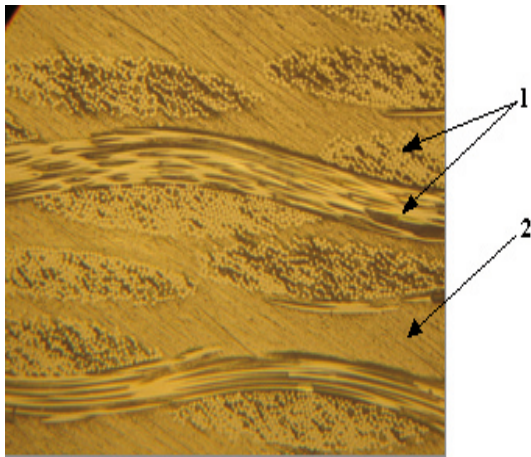
Static tensile strength tests underwent on the strength machinery INSTRON 4502 in the laboratory of Material Strength the Centre for Laser Technologies of Metals a unit of the Kielce University of Technology.

The composite was produced by placing two layers of glass mat in a mold, one on the upper part and the other on the bottom. After the mold was closed, a vacuum was created by allowing the air to escape. A liquid resin mixture was injected into the mold at a pressure of approximately 100 kPa (1 atm) and left to harden.

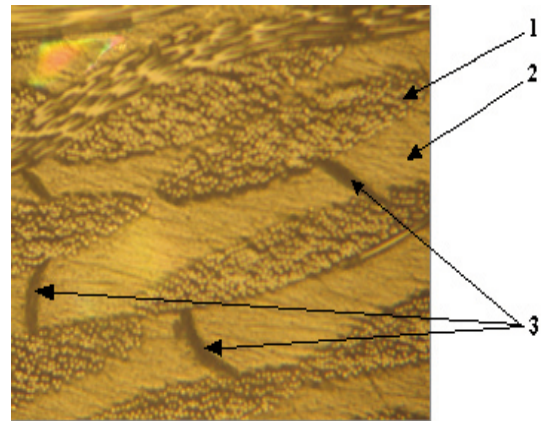
A major advantage of laminate composites is that the processes of crack formation and propagation can be prevented. The fracture toughness of this composite can be improved by increasing the number of fiberglass plies. The composite microstructure is presented in fig. 1.

A two-dimensional orientation of the fiber axes was used. The load that the fibers can transfer is dependent on the fiber volume fraction V_f , the fiber-to-matrix ratio E_f/E_m , and the adhesive strength between the components. The experiment results presented in [6] show that the composite failure is due to non-optimal technological parameters and the so-called edge effects.

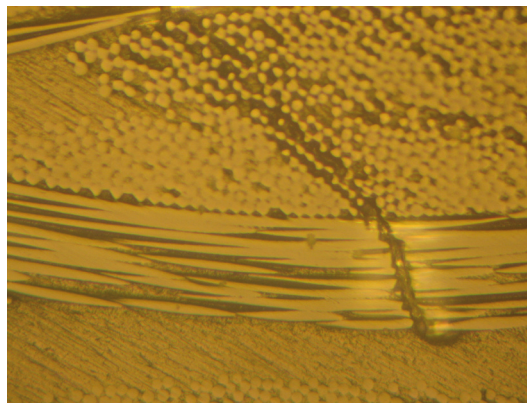
It is assumed that there are three modes of static tensile failure of the laminate composite material. First, the matrix failure is observed. There are numerous microcracks in the whole volume of the sample (fig. 2).



Rys. 1. Struktura kompozytu warstwowego: 1 – włókna, 2 – osnowa
 Fig. 1. Structure of the laminate composite: 1 – fibers, 2 – matrix



Rys. 2. Struktura z mikropęknięciami w osnowie kompozytu: 1 – włókna, 2 – osnowa, 3 – mikropęknięcia
 Fig. 2. Structure with microcracks in the composite matrix: 1 – fibers, 2 – matrix, 3 – microcracks



Rys. 3. Mikrostruktura z lokalnym zniszczeniem matrycy i włókna szklanego
 Fig. 3. Microstructure with local failures of the matrix and the fibers.

Wykruszenie matrycy powoduje przeniesienie naprężeń na włókna. Zrywanie kolejnych włókien kompozytu tworzy drugi etap zniszczenia. Na rysunku 3 ukazano lokalne zniszczenie osnowy i włókna. Powstanie szczeliny we włóknie może wywołać przegrupowanie stycznich naprężeń w otoczeniu włókna. Dalszy wzrost naprężeń uruchamia lawinowe pękanie kompozytu.

Trzeci etap zniszczenia tworzą zjawiska wywołane dalszym narastającym odkształceniem próbki. Rozpoczyna się proces oddzielenia włókien od osnowy i ich wyciąganie. Zjawiska te są opisywane w teorii wytrzymałości adhezyjnej [6].

Z badań [7, 8] wynika, że zniszczenie kompozytu może przebiegać zarówno w trzy etapowym procesie lub z pominięciem etapu drugiego. Taka interpretacja zjawisk wskazuje, że dla tego materiału nie zachodzi czyste ścinanie, zaś własności wytrzymałościowe kompozytu w dużej mierze zależą od wartości i rozkładu sił adhezji między komponentami kompozytu oraz od wytrzymałości zastosowanej żywicy. Przebieg zjawiska dekohezji - jako jednej z przyczyn zniszczenia kompozytu - zależy także od sposobu obciążania próbki.

The cracking causes stress transfer from the matrix to the fibers. Then, gradual rupture of fibers takes place (mode two). Figure 3 shows local failure of the matrix and the fibers. Fiber cracking may lead to changes in the tangential stresses. An increase in the stresses results in avalanche-like failure processes. In the third mode of failure, more deformations are observed. The process of the fiber-matrix separation is followed by the fiber elongation. The phenomena are described in the theory of adhesive strength [6].

It has been found that the failure [7, 8] of a composite material may also occur in two stages, instead of three, with the second stage missing. This interpretation shows that no pure shear occurs, and that the composite properties depend on the distribution of adhesive forces in the components as well as the resin strength. The decohesion process, which is one of the causes of the composite failure, is governed by the sample loading.

3. Przebieg badań i wyniki

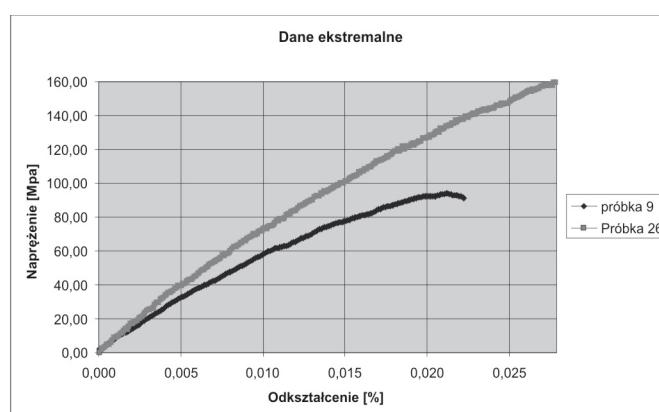
Z otrzymanego kompozytu w postaci płyty o grubości 0,003 m wycięto 30 próbek do statycznej próby rozciągania według normy PN – EN 10002 – 1 +AC1, 1997. Badania wytrzymałościowe przeprowadzono na maszynie wytrzymałościowej Serii IX firmy „INSTRON 8501” w Centrum Laserowych Technologii Metalu Politechniki Świętokrzyskiej w Kielcach. Próby rozciągania próbek przeprowadzono aż do momentu zniszczenia ze stałą prędkością wynoszącą 0,18 m/h (3 mm/min). Określono empiryczną zależność naprężeń rozciągających σ [MPa] od względnych odkształceń liniowych ε [%] dla każdej próbki. Na rysunku 4 przedstawiono wykres badanej zależności dla dwóch próbek o ekstremalnych wartościach naprężeń niszczących:

$$\begin{aligned}\sigma_{max} &= 94,5 \text{ MPa dla } \varepsilon_{max} = 0,0214 \%, \\ \sigma_{max} &= 159,5 \text{ MPa dla } \varepsilon_{max} = 0,0278 \%.\end{aligned}$$

3. Experiment and results

Thirty samples were cut from a composite plate with a thickness of 0.003 m to study the material tensile strength according to the PN-EN 10002-1+AC1: 1997 standard. The tensile properties of the laminate composite material were tested at the Centre for Laser Metal Technologies of the Kielce University of Technology using an INSTRON 8501 materials testing machine equipped with Seria IX software. The testing was performed at a constant velocity of 0.18 m/h (3 mm/min). The empirical relationship was determined between the tensile stress σ [MPa] and the relative linear strain ε [%] for each sample. Figure 4 shows the stress-strain curve for two samples with extreme breaking stresses:

$$\begin{aligned}\sigma_{max} &= 94,5 \text{ MPa dla } \varepsilon_{max} = 0,0214 \%, \\ \sigma_{max} &= 159,5 \text{ MPa dla } \varepsilon_{max} = 0,0278 \%.\end{aligned}$$



Rys. 4. Dane empiryczne statycznej próby rozciągania kompozytu warstwowego dla próbek o ekstremalnych naprężeniach niszczących
Fig. 4. Empirical data concerning the static tensile strength of the laminate composite samples with extreme tensile stresses

Wartości naprężeń i odkształceń niszczących dla pozostałych dwudziestu ośmiu próbek zawierają się w przedziałach wyznaczonych przez dane dla próbek prezentowanych na rysunku 4. Rozstęp wartości odkształceń maksymalnych dla tych próbek wynosi 0,0064 %, zaś przyrost względny liczony jako stosunek rozstępu do wartości minimalnej wynosi 0,299 [-]. Dla naprężeń ekstremalnych rozstęp i przyrost względny dla tych samych próbek wynoszą odpowiednio: 65 MPa i 0,688 [-]. Wyniki badań pozostałych dwudziestu ośmiu próbek charakteryzowały się dość dużym rozrzutem, co wymagało wykonania analizy statystycznej otrzymanych wyników.

Stosując statystykę opisową [2] wyróżniono następujące dane o naprężeniach niszczących, które dzielą zbiór w szeregu uporządkowanym rosnąco na cztery części:

- kwartyl dolny (25-ty percentyl) wynosi 109,7 MPa,
- mediana (50-ty percentyl) wynosi 114,1 MPa,
- kwartyl górny (75-ty percentyl) wynosi 128,5 MPa.

Dla danych empirycznych odstęp międzykwartylowy wynosi 18,8 MPa, co oznacza, że jest to wartość rozstępu naprężeń niszczących dla 50% ilości próbek o wartościach naprężeń skupionych wokół wartości medialnej.

Wyznaczono także następujące miary tendencji centralnej zbioru naprężeń niszczących:

- wartość modalna (dominanta) wynosi 113 [MPa],
- średnia w próbie wynosi 119,5 [MPa].

The values of breaking stresses and strains for the other twenty eight samples were determined on the basis of the data presented in fig. 4. The difference in maximum strains was 0.0064 %, while the relative growth rate calculated as the ratio of the difference and the minimum value was 0.299 [-]. In the case of extreme stresses, the range and the relative growth rate for the same samples were 65 MPa and 0.688, respectively [-]. Due to a large scatter of results, it was necessary to conduct a statistical analysis for the other twenty eight samples.

Using descriptive statistics [2], we distinguish the following data concerning breaking stresses, which divide the set in the series of ascending order into four parts:

- lower quartile (25-th percentile): 109.7 MPa,
- median (50-th percentile): 114.1 MPa,
- upper quartile (75-th percentile): 128.5 MPa.

For the empirical data, the interquartile range is 18.8 MPa, which means that it is the difference in breaking stresses for 50% of samples with stress values concentrated around the median.

The measures of the central tendency of the set of breaking stresses are:

- the modal value (a dominant): 113 [MPa],
- the sample mean: 119.5 [MPa].

J. W. Tukey [18] proponuje przeprowadzenie wstępnej analizy danych (ang. *exploratory data analysis*) z zastosowaniem metody stem–leaves („łodyga–liście”), którą przeprowadzono dla naprężeń i odkształceń niszczących (tab. 2). Metoda przypomina przedstawienie danych za pomocą histogramu, lecz posiada przewagę na uniknięciu utraty informacji, która w histogramie wynika z agregowania danych w podprzedziały. Metoda pozwala uzyskać wgląd do wszystkich danych oraz pozwala wstępnie oszacować rozkład.

W zestawieniu łodyga – liście, łodygą jest liczba, która powstała przez opuszczenie ostatniej cyfry – liścia. Liczba „łodyga” pisana jest z lewej strony pionowej kreski, zaś z prawej kolejne liczby „liście”. W tabeli 2 przedstawiono dwa zestawienia danych. W zestawieniu dla maksymalnych naprężeń użyto 30 wartości po zaokrągleniu ich do wartości całkowitych. W pierwszym wierszu jest zapisana wartość najmniejsza naprężenia niszczącego wynosząca 94 (przed zaokrągleniem 94,5), dla której „łodygą” jest liczba 9, a „liściami” 4. W drugim wierszu zapisano wartości sześciu następnych naprężeń. Dla przedstawienia odkształceń zaokrąglono je do czwartego miejsca po przecinku.

J.W. Tukey [18] proposes that the exploratory data analysis be conducted using stem-and-leaf plots. In our study, we analyze the breaking stresses and strains (table 2). The data are presented in a graphical format, similar to a histogram. In stem-and-leaf plots, the original data are retained, while in histograms, the data are aggregated into subintervals. Stemplots are useful for displaying the data and giving a quick overview of distribution.

In a stemplot, the stem is the number obtained by leaving the last digit – the leaf. The stems are listed to the left of the vertical line, while the leaves, i.e. the next digits, to the right. Table 2 shows two stem-and-leaf plots. The stemplot presenting the maximum stresses was constructed using 30 values rounded to integers. In the first row, we write the lowest value of the breaking stress, which is 94 (94.5 before rounding). The stem is number 9, and the leaf is number 4. In the second row, the next six values of the stresses are given. The values of the strains were rounded to four decimal places.

As can be seen from table 2, the distribution of breaking stresses is right-skewed (the average value is higher than the median), and has positive excess kurtosis (leptokurtic distribution), which makes it similar to a normal distribution.

Tab. 2. Zestawienie łodyga – liście dla danych eksperymentalnych
Tab. 2. Stemplot for the experimental data

Naprężenia niszczące Breaking stresses	Odkształcenia niszczące Breaking strains
9 4	0,021 0 1 4 4 9
10 2 6 6 7 8 9	0,022 4 6 7 9
11 0 2 3 3 3 3 3 4 4 4 7 9	0,023 4 4 4 4 6 6
12 0 1 2 7	0,024 0 1 1 9
13 2 3 5 8	0,025 3 6 9
14 5 9	0,026 3 4 5 8 9
15 9	0,027 4 8
	0,028 9

Z zestawienia danych eksperymentalnych w tabeli 2 wynika, że rozkład naprężeń niszczących jest nieznacznie prawoskośny (wartość średnia jest większa od mediany), spiczasty (lepkokurtyczny), ale zbliżony do normalnego, zaś rozkład odkształceń niszczących jest spłaszczony (platokurtyczny). Pełne zestawienie par danych naprężenie-odkształcenie niszczące przedstawiono na wykresie (rys. 5). Stosując metodę najmniejszych kwadratów wyprowadzono równanie linii regresji w postaci:

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 X \quad (1)$$

gdzie: \hat{Y} – wielkość reprezentująca naprężenia niszczące σ w populacji, o wartościach obliczonych z równania regresji dla danych odkształceń $X=\varepsilon$ [%], b_0 , b_1 – estymatory parametrów regresji o wartościach: $b_0 = 9,89$ i $b_1 = 4520,3$

W dalszej części przedstawiono model statystyczny, który ma umożliwić wykonanie oszacowań dla populacji danych eksperymentalnych dla próbek kompozytu warstwowego o tym samym składzie i wykonanych identyczną technologią RTM. W tym celu niezbędne jest wykonanie czterech następujących założeń:

- 1) błędy losowe w modelu mają rozkład normalny,
- 2) średnia błędów losowych równa jest 0,
- 3) wartości błędów losowych są wzajemnie niezależne (brak korelacji),
- 4) wariancja błędów losowych ma wartość stałą.

The distribution of breaking stresses is right-skewed (the average value is higher than the median), and has positive excess kurtosis (leptokurtic distribution), which makes it similar to a normal distribution. The distribution of breaking strains, on the other hand, has negative excess kurtosis (platokurtic distribution). All the data pairs for the breaking stress-breaking strain relationship are displayed in fig. 5.

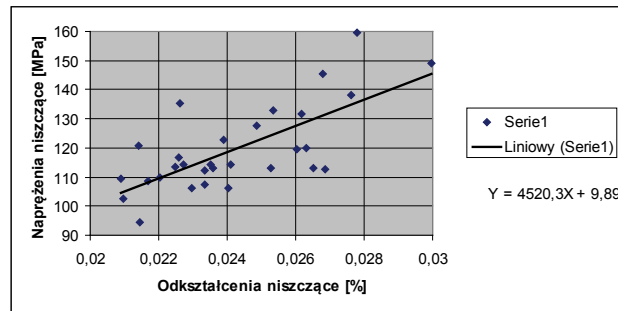
The method of least squares was applied to derive the equation of the regression line:

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 X \quad (1)$$

where: \hat{Y} – quantity representing the breaking stresses σ in the population, with values calculated from the regression equation for known values of strains $X=\varepsilon$, b_0 , b_1 – estimators of the regression parameters: $b_0 = 9.89$ and $b_1 = 4520.3$.

The regression equation was derived basing on the experimental data for laminate composite samples produced with the RTM method that had the same composition. A statistical model was then applied to make estimations for the population of the experimental data. The following four assumptions were made:

- 1) model random errors are normally distributed,
- 2) the mean of the random errors is equal to 0,
- 3) random errors are not correlated,
- 4) random error variance is constant.



Rys. 5. Dane empiryczne naprężeń i odkształceń niszczących próbki kompozytu warstwowego
Fig. 5. Empirical data of the breaking stresses and strains for a laminate composite sample

Pierwsze założenie umożliwia korzystanie z rozkładu t oraz F . Znajomość krytycznej wartości w rozkładzie t pozwala na wyznaczenie przedziałów ufności dla parametrów β_0 i β_1 równania regresji w populacji $Y = \beta_0 + \beta_1 X$. Wzory na $(1-\alpha)100\%$ przedziały ufności mają postać:

$$\text{dla parametru } \beta_0 \quad b_0 \pm t_{(\alpha/2, n-2)} s(b_0) \quad (2)$$

$$\text{dla parametru } \beta_1 \quad b_1 \pm t_{(\alpha/2, n-2)} s(b_1) \quad (3)$$

gdzie: $t_{(\alpha/2, n-2)}$ - krytyczna wartość w rozkładzie t dla zakładanego poziomu istotności α i n licznej próby, $s(b_0)$ - ocena standardowego błędu estymatora b_0 wyznaczana według wzoru (4), $s(b_1)$ - ocena standardowego błędu estymatora b_1 wyznaczana według wzoru (6).

$$s(b_0) = (s(\sum X^2)^{1/2}) / (nSS_x)^{1/2} \quad (4)$$

gdzie: X - odkształcenia niszczące [%], n - licznosc próby, SS_x - suma kwadratów odchyleń zaobserwowanych X od wartości średniej, s - standardowy błąd szacunku wyznaczany według wzoru (5)

$$s = SSE / (n-2) \quad (5)$$

gdzie: SSE - suma kwadratów odchyleń zaobserwowanych wartości naprężeń niszczących Y od ich wartości teoretycznych \hat{Y} , wyznaczonych za pomocą równania regresji, n - licznosc próby.

Ocenę standardowego błędu estymatora b_1 wyznaczono według poniższego wzoru:

$$s(b_1) = s / (SS_x)^{1/2} \quad (6)$$

gdzie: s , SS_x - wielkości objaśnione powyżej.

Za pomocą przedstawionego powyżej modelu statystycznego utworzonego na podstawie powyższych założeń i wzorów (1, ..., 6) obliczono 95 % przedział ufności dla parametrów regresji:

$$\beta_0 = [-32,6; 52,4], \beta_1 = [2776; 6264]$$

Powyższe dane interpretuje się następująco - można mieć 95 % pewność, że punkt przecięcia z osią rzędnych linii regresji dla populacji zawiera się w przedziale $[-32,6; 52,4]$ i analogicznie, że współczynnik kierunkowy linii regresji dla populacji mieści się pomiędzy wartościami z przedziału $[2776; 6264]$. Na rysunku 6 przedstawiono linie regresji dla parametrów β_0 , β_1 w populacji przy założeniu, że $\beta_0 = b_0 = 9,89$, zaś parametr β_1 przyjmuje najmniejszą i największą wartość z wyznaczonego przedziału ufności. Do oceny jak silny jest związek liniowy pomiędzy odkształceniami a naprężeniami niszczącymi, świadczący równocześnie o dopasowaniu linii regresji do danych - używany jest *współczynnik determinacji* R^2 .

From the first assumption it follows that we can use the distribution of t and F . Knowing the critical value in the distribution of t , we are able to determine the confidence intervals for parameters β_0 and β_1 of the regression equation in the population $Y = \beta_0 + \beta_1 X$. The formula for the $(1-\alpha)100\%$ confidence intervals are:

$$\text{dla parametru } \beta_0 \quad b_0 \pm t_{(\alpha/2, n-2)} s(b_0) \quad (2)$$

$$\text{dla parametru } \beta_1 \quad b_1 \pm t_{(\alpha/2, n-2)} s(b_1) \quad (3)$$

where: $t_{(\alpha/2, n-2)}$ - critical value in the distribution of t for the predetermined level of relevance α and number of samples, n , $s(b_0)$ - standard error of the estimator b_0 estimated using formula (4), $s(b_1)$ - standard error of the estimator b_1 estimated using formula (6).

$$s(b_0) = (s(\sum X^2)^{1/2}) / (nSS_x)^{1/2} \quad (4)$$

where: X - breaking strains, n - number of samples, SS_x - sum of squared deviations of the observed breaking strains X from the mean, s - standard error of estimation calculated using formula (5)

$$s = SSE / (n-2) \quad (5)$$

where: SSE - sum of squared deviations of the observed breaking stresses Y from their theoretical values \hat{Y} , calculated using the regression equation, n - number of samples.

The standard error of the estimator b_1 was estimated using the following formula:

$$s(b_1) = s / (SS_x)^{1/2} \quad (6)$$

where: s , SS_x - same as above.

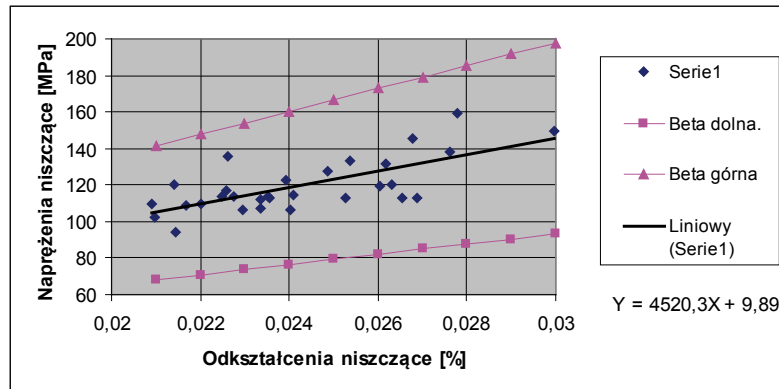
By applying the statistical model based on the above assumptions and formulae (1, ..., 6), it was possible to calculate a 95 % confidence interval for the regression parameters:

$$\beta_0 = [-32,6; 52,4], \beta_1 = [2776; 6264]$$

The above data can be interpreted as follows: there is 95 % certainty that the point of intersection of the ordinate axis and the regression line for the population is in the interval $[-32,6; 52,4]$. By analogy, the direction coefficient of the regression line for the population is in the interval $[2776; 6264]$. Figure 6 presents the regression lines for parameters β_0 and β_1 in the population assuming that $\beta_0 = b_0 = 9,89$, while parameter β_1 represents the lowest and highest value in the confidence interval. The *coefficient of determination* R^2 was used to estimate how strong the linear relationship between breaking strains and stresses is.

Współczynnik ten dla prezentowanych danych wynosi $R^2=0,5$, co znaczy, że równanie regresji wyjaśnia około 50% zmienności naprężeń niszczących, zaś pozostałe stanowią tzw. nie wyjaśnione odchylenia wartości empirycznych od wartości teoretycznych wyznaczonych równaniem regresji. Ważnym zagadnieniem w analizie badań niszczących jest analiza danych poprzedzających moment zniszczenia. Dla zobrazowania zmienności naprężeń zestawiono dane trzydziestu próbek dla wybranych czterech następujących odkształceń $\epsilon_{max} = \{0,005; 0,010; 0,015; 0,020\}$ [%] (tab. 3).

The stress-strain relationship showed that the regression lines were well fitted to the data. As the coefficient R^2 was 0.5, the regression equation explained approximately 50 % of the variance of breaking stresses. The rest is the unexplained deviations of the empirical data from the theoretical data calculated by means of the regression equation. Analyzing breaking stresses in a material, we need to focus on the stresses occurring immediately before failure. To illustrate the variance of stresses, we used data for thirty samples. Four values of strain were selected: $\epsilon_{max} = \{0.005; 0.010; 0.015; 0.020\}$ [%] (table 3).



Rys. 6. Dane empiryczne naprężeń i odkształceń niszczących próbki kompozytu warstwowego (oznaczone jako „Serie 1”) oraz trzy następujące linie regresji: dla parametru w populacji $\beta_1 = 2776$ (oznaczone jako „Beta dolna”), dla parametru w próbce $b_1 = 4520$ (oznaczone jako „Liniowy”), dla parametru w populacji $\beta_1 = 6264$ (oznaczone jako „Beta górna”)

Fig. 6. Empirical data of the breaking stresses and strains for a laminate composite sample (defined as “empirical data”) and three regression lines: for the parameter in the population $\beta_1 = 2776$ (defined as “lower beta”), for the parameter in the sample $b_1 = 4520$, for the parameter in the population $\beta_1 = 6264$ (defined as “upper beta”)

Tab. 3. Naprężenia w próbce rozciągania trzydziestu próbek dla wybranych czterech ϵ
Tab. 3. Tensile stresses for thirty samples for four selected values of strain

$\epsilon=0,005$ %	$\epsilon=0,010$ %	$\epsilon=0,015$ %	$\epsilon=0,020$ %
30 5 8	56 7 8	76 9	92 5
31 1 2 3 4 6 9	57 1 4 5	77	...
32 0 3 3 4 7 7 8	58 4 6 6 8 9	78 9	96 1 8
33 1 2 6 8 8	59 1	79 0 2	97 7
34 1 5	60 3	80 4 9	98 0 4 4
35 5 5 5	61 0 2 9 9	81	99 9
36	62 2 3 7 9	82 2 6 8	...
37 0 4 6 8	63 5 6	83 3	102 5 8
38	64	84 0 5	103 0 8
39 2	65 7 7	85 1 7 9	104 1 9 9
	66 3	86 0 9	105 3
	67 6 6	87 8	106 9 10 7 1
	68	88	...
	69 8 8	89 3 3	110 2 4 9
	70	90 2 8	...
	71 6	91 2 5	113 7 8
		92	114 3
		93 8 8 8 9	115
		...	116 2 2
		96 9	117
		...	118 1
		99 7	...
		100	122 3
		101 2	...
			124 9
			...
			126 9

W analizie zastosowano opisaną wcześniej metodę „łodyga – liście”, gdzie część całkowita naprężenia jest przed kreską, zaś za kreską jest część ułamkowa po zaokrągleniu do pierwszego miejsca po przecinku.

Z zestawienia danych eksperymentalnych w tabeli 3 wynika, że w miarę wzrostu odkształceń następuje coraz większe spłaszczenie rozkładów naprężeń (platokurtyczność), wskutek narastającej losowości kierunku i skupień lokalnych zniszczeń osnowy kompozytu.

Po analizie wykresów wszystkich próbek, postawiono hipotezę o możliwości prognozowania wartości naprężeń niszczących na podstawie danych o naprężeniach uzyskanych z pomiarów dla odkształceń $\varepsilon=0,010\%$, które dalej nazywane są danymi wejściowymi dla modelu prognostycznego. Zaproponowano przekształcenie danych wejściowych za pomocą prognostycznej metody Browna.

4. Proponowana metodyka

Metoda prognostyczny Browna [2] oparty jest na metodzie prostego wygładzenia wykładniczego. Istota metody polega na wyznaczaniu wartości prognozowanej tylko dla okresu lub momentu czasu $t+1$, tylko o jeden okres do przodu. Metoda została wybrana spośród wielu metod prognostycznych w dziedzinach zarządzania i ekonomii z uwagi na zalecenia stosowania jej w szeregach nie posiadających wyraźnego trendu i wahań sezonowych. Model Browna pozwala na wygładzenie szeregu w sposób, że rośnie wpływ ostatnich wartości szeregu na prognozę, w porównaniu do wartości przeszłych. Prognoza oparta jest na obliczeniach średniej ważonej dla aktualnej i poprzednich danych, tak aby wagi zmniejszały się geometrycznie w miarę cofania się na osi czasu, co zapisać można w następującej postaci:

$$\check{Z}_{t+1} = wZ_t + w(1-w)Z_{t-1} + w(1-w)^2Z_{t-2} + \dots + w(1-w)^nZ_{t-n} \quad (7)$$

gdzie: \check{Z}_{t+1} – prognoza dla chwili czasu $t+1$, w – waga, Z_t, Z_{t-1}, Z_{t-2} – dane wartości szeregu dla chwil czasu: $t, t-1, t-2$.

Dla ułatwienia wykonania obliczeń model wygładzenia wykładniczego zapisuje się w postaci następujących równań rekurencyjnych:

$$\begin{aligned} \check{Z}_2 &= wZ_1 + (1-w)\check{Z}_1 & (8) \\ \check{Z}_3 &= wZ_2 + (1-w)\check{Z}_2 \\ \check{Z}_4 &= wZ_3 + (1-w)\check{Z}_3 \\ &\dots\dots\dots \\ \check{Z}_n &= wZ_{n-1} + (1-w)\check{Z}_{n-1} \end{aligned}$$

W proponowanej metodyce zastosowano wygładzenie wykładnicze naprężeń dla odkształceń w zakresie $\varepsilon=0 \div 0,01\%$, dla których przypisano wartości czasu. Wartość wagi $w=0,7$ wyznaczono eksperymentalnie. Na rysunku 7 przedstawiono efekt wygładzenia dla wybranej próbki, gdzie dla krzywej wygładzenia wyznaczono równanie trendu $y_B=4754,5x$ z założeniem, że linia trendu przecina oś rzędnych w punkcie 0.

Powyższy schemat obliczeń został zastosowany dla wszystkich trzydziestu próbek. Uzyskane równania linii trendu dla każdej próbki wykorzystano do wyznaczenia prognozowanych w ten sposób teoretycznych wartości naprężeń odpowiadających zakładanemu odkształceniu $\varepsilon=0,02\%$. Wartość ta została wybrana bowiem jest najmniejszą wartością odkształcenia nisz-

The analysis was performed using the stemplot method. Below the line, we listed the integral part of stress, and above, the fractional part rounded to one decimal place. From the data presented in table 3 it follows that an increase in the strain rate causes that the stress distributions have negative excess kurtosis (platykurtic distribution) due to an increasing randomness of fiber orientation and local failure of the matrix.

After analyzing the stress-strain curves for all the samples, we proposed a hypothesis that the breaking stresses could be forecast basing on the data of stresses obtained from measurements of strains, $\varepsilon=0.010\%$, which will be hereafter referred to as the input data for the prediction model. It was proposed that the input data should be transformed using the Brown method.

4. Methodology

The Brown model [2] is based on the method of simple exponential smoothing. The forecast value is determined only for a period or moment of time $t+1$, only one period ahead. The Brown method is one of the methods used for forecasting in management and economics. It is suitable for series with no clear tendency and seasonal fluctuations. By smoothing a series, it is possible to increase the effect of the last values of the series on the forecast, compared to the previous values. The forecast requires calculating the weighed average for the actual and previous data, i.e. decreasing weights geometrically and moving backwards along the time axis, which can be written as:

$$\check{Z}_{t+1} = wZ_t + w(1-w)Z_{t-1} + w(1-w)^2Z_{t-2} + \dots + w(1-w)^nZ_{t-n} \quad (7)$$

where: \check{Z}_{t+1} – forecast for a moment of time $t+1$, w – weight, Z_t, Z_{t-1}, Z_{t-2} – known values of the series for the moments of time: $t, t-1, t-2$.

The calculations were simplified by writing the model of exponential smoothing in the form of recurrent equations:

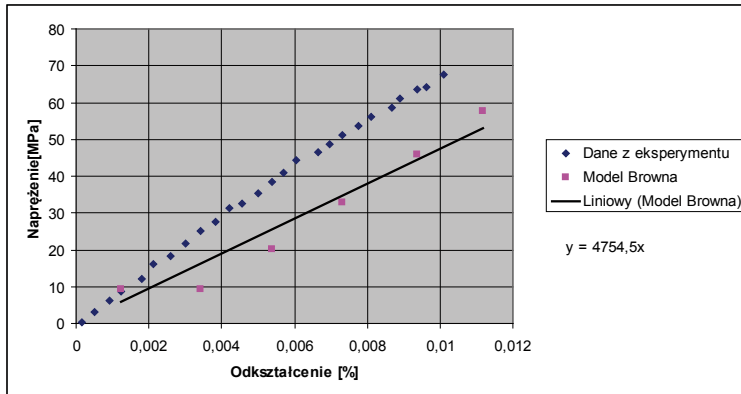
$$\begin{aligned} \check{Z}_2 &= wZ_1 + (1-w)\check{Z}_1 & (8) \\ \check{Z}_3 &= wZ_2 + (1-w)\check{Z}_2 \\ \check{Z}_4 &= wZ_3 + (1-w)\check{Z}_3 \\ &\dots\dots\dots \\ \check{Z}_n &= wZ_{n-1} + (1-w)\check{Z}_{n-1} \end{aligned}$$

The Brown model was employed to smooth the empirical data of tensile stresses for strains in the range $\varepsilon=0 \div 0.01\%$. The weight was determined experimentally: $w=0.7$. Figure 7 shows the effect of data smoothing for a selected sample, where the tendency equation, $y_B=4754.5x$ for the smoothing curve was determined assuming that the tendency line crosses the ordinate axis at point 0.

The above calculation procedure was used for all the thirty samples. The equations of the tendency line were used for each sample to determine the forecast theoretical values of stresses corresponding to the assumed strain $\varepsilon=0.02\%$. This value was the lowest value of breaking strain in the set of experimental

częcego w zbiorze danych eksperymentalnych. Wyznaczone naprężenia nazwano *prognozą wstępną naprężeń niszczących*.

Wartości prognoz wstępnych połączono w pary z danymi z eksperymentu dla wylosowanych 18 prób. Dla każdej próbki uzyskano inny błąd prognozy, co przedstawiono na wykresie poniżej (rys. 8). W równaniu regresji $y_p = 1,3465x_p - 43,701$ należy przyjąć, że y_p oznacza teoretyczne wartości naprężeń zaś x_p przyjmuje wartości prognoz wstępnych. Do oceny jak silny jest związek liniowy regresji pomiędzy prognozowanymi wstępnie naprężeniami niszczącymi a danymi empirycznymi wyznaczono współczynnik determinacji R^2 .



Rys. 7. Przykład danych empirycznych z próby rozciągania oraz danych prognozowanych metodą Browna z prostoliniowym trendem

Fig. 7. Example of the empirical data from the tensile strength test and the data forecast with the Brown method with a rectilinear tendency

Współczynnik ten dla prezentowanych danych wynosi $R^2=0,6$. Można przyjąć interpretację, że uzyskane równanie regresji wyjaśnia około 60 % zmienności empirycznych naprężeń niszczących, zaś pozostałe ok. 40 % stanowią tzw. nie wyjaśnione odchylenia wartości empirycznych od wartości teoretycznych wyznaczonych równaniem regresji.

W przypadku użycia równania regresji do prognozowania naprężenia niszczącego, według Aczel-a [2] należy liczyć się z możliwością popełnienia dużych błędów. Przyjmuje się, że wartość $R^2 > 0,8$ pozwala uzyskać prognozy dobre, zaś $R^2 > 0,6$ prognozy, które mogą być zadawalające w niektórych zastosowaniach.

Dlatego w analizowanym przypadku wydaje się stosowne zastosowanie prognozy przedziałowej. W tym celu należy wyznaczyć przedział predykcji dla teoretycznych wartości y wyznaczonych równaniem regresji, który określony jest następującym wzorem:

$$Y_p \pm t_{\alpha/2} s \{1 + (1/n) + (x_p - \bar{s})^2 / (SS_x)\}^{1/2} \quad (9)$$

gdzie: x – wartości prognoz wstępnych naprężeń niszczących, \bar{s} – średnia dla wartości x_p , pozostałe oznaczenia jak we wzorach (3, 4, 5).

Dla wyznaczenia 95 % przedziału predykcji użyto następujących wartości:

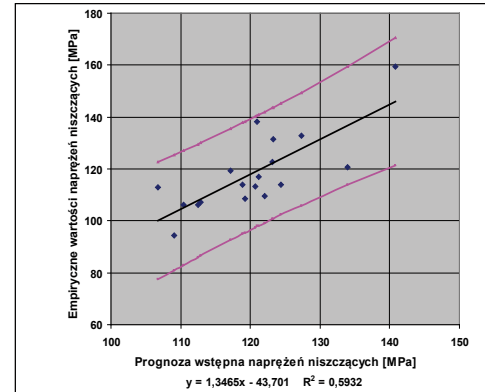
- krytyczna wartość w rozkładzie t przy 16 stopniach swobody wynosi $t_{0,025} = 2,12$;
- standardowy błąd szacunku wynosi $s = 9,78$;
- licznosc próby wynosi $n = 18$;

The obtained stresses were called the preliminary forecast of *breaking stresses*.

The values of the preliminary forecasts were combined in pairs with the experimental data for the randomly selected samples. Different forecast errors were obtained for each sample, which is illustrated in fig. 8.

In the regression equation $y_p = 1,3465x_p - 43,701$ it should be assumed that y_p represents the theoretical values, while x_p represents the values of the preliminary forecasts.

The *coefficient of determination* R^2 was calculated to assess the linear relationship of regression between the preliminarily



Rys. 8. Zestawienie wstępnych prognoz z empirycznymi danymi o naprężeniach niszczących oraz prognoza przedziałowa

Fig. 8. Comparing the preliminary forecasts with the empirical data of breaking stresses and the interval forecast

forecast of breaking stresses and the empirical data. The coefficient was $R^2=0,6$. It can be assumed that the derived regression equation explains about 60 % of variance of the empirical breaking stresses, while the other 40 % is the so-called unexplained deviations of the empirical data from the theoretical values determined by means of the regression equation. Aczel suggests [2] that if the regression equation is used to forecast breaking stresses, the errors may be large. It is assumed that if $R^2 > 0,8$, the forecasts are good, while if $R^2 > 0,6$ the forecasts can be satisfactory in certain applications.

It seemed advisable to apply an interval forecast. The forecast interval for the theoretical values of y calculated by means of the regression equation was determined by the following formula:

$$Y_p \pm t_{\alpha/2} s \{1 + (1/n) + (x_p - \bar{s})^2 / (SS_x)\}^{1/2} \quad (9)$$

where: x – values of preliminary forecasts of breaking stresses, \bar{s} – the mean of x_p , the other designations like in formulae (3, 4, 5).

The following values were used to calculate a 95 % prediction interval:

- the critical value in the distribution of t at 16 degrees of freedom: $t_{0,025} = 2,12$;
- the standard error of the estimate: $s = 9,78$;
- the number of samples: $n = 18$;

- średnia dla wartości prognoz wstępnych x wynosi $\hat{s}=120,27$ [MPa];
- suma kwadratów odchyłeń prognoz wstępnych x od średniej \hat{s} wynosi $SS_x=1230,2$.

Przyjęcie liczności próby $n=18$ o wartościach wylosowanych pozwala na sprawdzenie dokładności prognozy przedziałowej po wykorzystaniu pozostałych 12 danych o wartościach wcześniej tzw „zakrytych”, które tworzą podzbiór kontrolny. Po uwzględnieniu danych z podzbioru kontrolnego stwierdzono zgodność prognozy przedziałowej.

5. Wnioski końcowe

Na podstawie badań wytrzymałościowych rozciągania ze stałą prędkością aż do momentu zniszczenia trzydziestu próbek kompozytu warstwowego wzmocnionego włóknem szklanym, zaproponowano metodykę prognozowania naprężeń niszczących. Metoda wymaga posiadania danych eksperymentalnych naprężeń w funkcji odkształceń dla zakresu odkształceń $\varepsilon=0\div 0,01$ %. W metodzie można wyróżnić następujące etapy:

- 1) korzystając z metody Browna dokonać wygładzenia wykładniczego danych empirycznych o wartościach naprężeń dla zakresu odkształceń od 0 do 40 % odkształcenia niszczącego;
- 2) dla wygładzonej funkcji empirycznej wyznaczyć metodą najmniejszych kwadratów estymatory parametrów regresji tak zmodyfikowaną, aby prosta przecinała oś rzędnych w punkcie 0;
- 3) wstępną prognozę naprężeń niszczących uzyskuje się po podstawieniu w równaniu regresji wartości odkształcenia równą minimalnemu odkształceniu niszczącemu w próbie;
- 4) prognozę końcową uzyskuje się z prognozy przedziałowej po wyznaczeniu przedziału predykcji, w zestawieniu wstępnych prognoz z danymi empirycznymi.

Powyżej prezentowana metoda wymaga dalszych prac wyryfikacyjnych.

6. Preferences

1. Aboudi J. Micromechanical characterization of the non-linear viscoelastic behavior of resin matrix composites. *Composites Science & Technology* 1990; 38: 371-386.
2. Amir D. Aczel. *Complete Business Statistics*. Second Edition: Irwin, Burr Ridge Illinois, Boston, Sydney: Australia, © Richard D. Irwin, Inc, 1989 and 1993.
3. Болотин В.В. Объединенная модель разрушения композитных материалов при длительно действующих нагрузках. *Механика композитных материалов* 1981; 3: 405-420.
4. Chatys R. Modeling the Effect of the Mechanical and Laser Processing on Strength and the Quality of Composite Materials. *Interanational Conference 13-17.02.2006; Moscow, Russia*: 45-46.
5. Chatys R., Chatys I., Kleinhofs M. Modelling the Effect of the Service Conditions on the Strength of Fiber Glass-Reinforced Polymer-Matrix Composite Materials. *XI Seminar „Plastics in machine design” 2006; Cracow, Poland*: 123-126.
6. Chatys R., Darska J., Opala M. The Effect of the Technological Parameters on the Quality of Composite Materials Produced with the RTM Method. *Mechanics* 2005; 83: 22-28.
7. Chatys R., Kleinhofs M. Statystyczne aspekty przy określaniu własności mechanicznych kompozytu polimerowego. *X Seminarium „Plastics in Machine Design” 2003; Cracow, Poland*: 83-88.
8. Chatys R. Modeling of Mechanical Properties with the Increasing Demands in the Range of Qualities and Repeatability of Polymers Composites Elements. *Monograph „Polymers and Constructional Composites” 2008; 36-47. (ISSN 978-83-7335-541-5)*.
9. Daniel I.M., Ishai O. *Engineering mechanics of composite materials*. New York, Oxford: Oxford Univ. Press, 1994.
10. Kamiński M. Homogenized properties of n-component composite materials. *J. Engng Sci.* 2000; 38 (4): 405-427.
11. Маймейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. „Сопротивление полимерных и композитных материалов”. Рига: Зинатне, 1980.

- the mean for the preliminary forecasts x : $\hat{s}=120.27$ [MPa];
- the sum of squared deviations of the preliminary forecasts x from the mean \hat{s} : $SS_x=1230.2$.

The accuracy of the interval forecast was checked assuming that the number of samples, n was 18, and the samples had randomly selected values. The other twelve samples with previously covered values constitute a control subset. The data from the control subset demonstrate the consistency of the interval forecast.

5. Conclusions

The results of the static tensile strength tests conducted for thirty samples made of a fiberglass-reinforced laminate composite were used as the experimental data to forecast breaking stresses. The forecasting method was based on the relationship between breaking stresses and breaking strains in a given range of strains, $\varepsilon=0\div 0.01$ %. The process of forecasting the breaking stresses for the material under analysis involved:

- 1) exponential smoothing of the empirical data using the Brown method; the analysis of breaking stresses was limited to the range of 0-40% of breaking strains;
- 2) determining the estimates of the regression parameters for the smoothed empirical function by means of the method of least squares; the function was modified so that the straight line crossed the ordinate axis at point 0;
- 3) preparing a preliminary forecast of breaking stresses by using the minimum value of breaking strain in the regression equation to represent the strain in a sample.
- 4) preparing the final forecast from the interval forecast after calculating the forecast interval.

The method described above requires further verification.

12. Парамонов Ю.М. Методы математической статистики в задачах связанных с оценкой и обеспечением усталостной долговечности авиационных конструкций. Рига: РКИИГА, 1992.
13. Pipes R.B., Dally J.W. On the birefringent-coating method of stress analysis for fibre – reinforced laminated composites. *Experimental Mechanics*. 1972; 28: 272-277.
14. Rabotnov J.N. Elements of viscoelastic mechanics of solids. Moscow: Nauka Press, 1977.
15. Роботнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. Moscow: Наука, 1988.
16. Розен Б. Механика упрочнения композиций. В кн. Волокнистые композиционные материалы. Moscow: Мир, 1967.
17. Tsai S.W. and Hahn H.T. Introduction to Composite Materials. Lancaster: Technomic Publ. Co., Inc, 1980.
18. Tukey J.W. Exploratory Data Analysis. Addison-Wesley, Reading, Mass. 1977.
19. Wilczyński A., Lewiński J. Predicting the properties of unidirectional fibrous composite with monotropic reinforcement. *Composite Science and Technology* 1995; 55: 139-143.

Dr inż. Rafał CHATYS

Katedra Metaloznawstwa i Technologii Materiałów
Politechnika Świętokrzyska w Kielcach
Al. 1000-lecia P.P.7, 25-314 KIELCE
e-mail: chatys@tu.kielce.pl

Dr inż. Zbigniew SKROBACKI

Katedra Podstaw Konstrukcji Maszyn
Politechnika Świętokrzyska w Kielcach
Al. 1000-lecia P.P.7, 25-314 KIELCE
e-mail: zbig@tu.kielce.pl
