



GRZEGORZ LUDWIK
GOLEWSKI

Politechnika Lubelska

Współczynnik intensywności naprężeń jako podstawowy parametr oceny odporności na pękanie kompozytów betonowych

Wraz z dynamicznym rozwojem gałęzi nauki, jaką jest mechanika zniszczenia materiałów kruchych, rozpoczęto badania mające na celu ocenę pracy kompozytów betonowych w aspekcie wytycznych mechaniki pę-

kania. Możliwa była analiza betonów metodami opisującymi destrukcję materiałów w kontekście powstawania i propagacji rys występujących wewnątrz ich struktury, a wyniki dawały zadowalające rezultaty głównie, dzięki temu, iż beton zachowuje się podczas pracy jak materiał kruchy. W pracy [1] szczegółowo opisano cechy materiałów kruchych i dokonano podziału kompozytów o matrycach cementowych w zależności od ich zachowania się podczas działającego obciążenia.

Poniższy artykuł jest kontynuacją tematyki związanej z analizą pracy betonów w aspekcie liniowej i nieliniowej mechaniki pękania i zniszczenia. Należy bowiem mieć na uwadze fakt, iż w materiałach niejednorodnych i heterogenicznych, do których zaliczane są kompozyty betonowe (o różnych matrycach), zniszczenie konstrukcji bądź jakiegoś jej elementu może nastąpić przy poziomie obciążeń wywołujących w przekrojach naprężenia o wiele niższe od naprężeń średnich. Stąd też znajomość standardowych parametrów mechaniczno – wytrzymałościowych opisujących beton a więc np. wytrzymałości średnich na ściskanie czy rozciąganie lub modułów sprężystości staje się niewystarczająca do oceny i prognozowania poziomów obciążeń, przy których może nastąpić destrukcja materiału a w konsekwencji katastrofalne zniszczenie całej konstrukcji. Takie możliwości daje dopiero znajomość parametrów mechaniki pękania na podstawie, których dość szczegółowo można określić próg naprężeń powodujących rozwój w strukturze kompozytu pierwotnych defektów, rzutuujących później na jego końcową nośność.

Podstawowym parametrem w mechanice pękania jest współczynnik intensywności naprężeń (WIN), gdyż jego znajomość pozwala na oszacowanie obciążeń wywołujących w przekrojach niekontrolowany rozwój pęknięć. W artykule zaprezentowano w szerokim spektrum zagadnienia związane z możliwością zastosowania WIN do oceny odporności na pękanie betonów. Szacowanie wartości WIN przedstawiono korzystając zarówno z metod doświadczalnych analitycznych, jak i numerycznych. Praktyczną stroną dysertacji stanowią przykłady pokazujące korelację podstawowych parametrów wytrzymałościowych betonów cementowych z WIN określanymi przy I [1] i II [2] modelu pękania.

Zjawisko kruchego pękania w betonie

Proces niszczenia struktury kompozytów betonowych jest zjawiskiem trój etapowym. Poszczególne fazy destrukcji materiału można wyodrębnić dokonując analizy tzw. poziomów naprężeń krytycznych [3], które charakteryzują procesy po-

wstawiania i propagacji uszkodzeń wewnątrz materiałowych w betonie. Sukcesywny rozwój rys w kompozycie, pod wpływem działających obciążeń oznacza, że zmagazynowana energia odkształceń ulega przekształceniu w energię powierzchniową nowo tworzonych powierzchni rys. Konsekwencją rozwoju zarysowania jest redukcja pola powierzchni przenoszonego obciążenia tak, że naprężenia lokalne stają się większe od naprężeń średnich. Rodzaj i szybkość propagacji rys zależy m.in. od własności składników kompozytu betonowego, wartości i rodzaju działających obciążeń (statyczne, dynamiczne, cykliczne) oraz temperatury i środowiska (klasy ekspozycji), w jakich pracuje konstrukcja.

Modelowanie procesów rozwoju pękania w kompozytowych materiałach konstrukcyjnych można przeprowadzać na poziomie wielu skal odniesienia [4]. W liniowej mechanice pękania i analizie na poziomie mikroskali materiał traktuje się jako układ atomów, tworzących sieć krystalograficzną. Atomy te w stanie bezobciążeniowym znajdują się w pewnych odległościach od siebie, wynikających ze spełnienia warunków równowagi. Defekty materiałowe są natomiast nieciągłościami budowy sieci krystalicznej materiału. Oddziaływanie obciążeń mechanicznych powoduje chwilowe zaburzenie stanu równowagi w strukturze materiału, a na brzegach lub w wierzchołkach nieciągłości pojawiają się spiętrzenia naprężeń. W tych punktach powstaje lokalny przestrzenny stan naprężenia. W przypadku defektów typu szczeliny (o ostrych zakończeniach) rozkład tych naprężeń wyrażany jest poprzez tzw. WIN , których wartości zależą od sposobu obciążania materiału, wymiarów analizowanego elementu konstrukcyjnego oraz jego cech mechanicznych. Wyróżnia się wówczas tzw. modele pękania, bowiem trójwymiarowy stan naprężenia występujący w pobliżu wierzchołka szczeliny pierwotnej można rozłożyć na trzy podstawowe schematy [5,6]. Modele pękania opisują sposób obciążania krawędzi szczelin pierwotnych (I model – rozciąganie szczeliny, II model – ścianie podłużne do krawędzi szczeliny, III model – ścianie poprzeczne do krawędzi szczeliny) i pozwalają opisywać ich propagację.

W kontekście powyższych rozważań należy zwrócić szczególną uwagę na występujące w betonie rodzaje defektów struktury przytoczone np. przez J. Penga i współautorów w pracy [7]. Uwzględniając pory, mikropęknięcia, dyslokacje i inkluzje występujące głównie w matrycy cementowej, oraz w warstwie stykowej kruszywo – zaprawa, można określić krytyczną wartość naprężeń powodujących pękanie kompozytów betonowych.

Definicja współczynnika intensywności naprężeń

Hipotezy wytężeniowe oparte o globalne rozkłady naprężeń i odkształceń, występujące w materiale pod wpływem obciążenia, odnoszą się do opisu zachowania się kompozytów

w makroskali. Umożliwiają one określenie stanów makroskopowego zniszczenia materiału, jednak proces jego destrukcji poprzedzony jest zjawiskami inicjacji i rozwoju mikrodefektów, które odnoszone są do niższych poziomów skali. Procesy te opisywane są na poziomie mikroskali poprzez przyjęcie odpowiednich kryteriów pęknięcia. Wg klasyfikacji zaprezentowanej w pracy [8] podstawą do analizy materiałów kruchych zawierających defekty jest tzw. siłowe kryterium pęknięcia o charakterze lokalnym. Wykorzystuje się tu koncepcję *WIN* oznaczanego jako K_α za pomocą, którego opisuje się pola naprężeń wokół wierzchołka szczeliny:

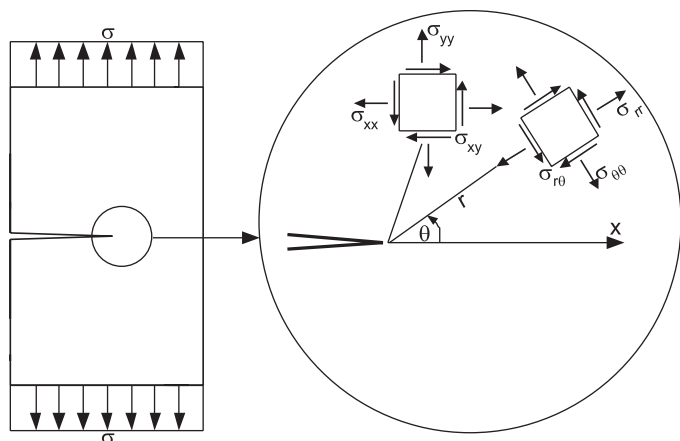
$$K_\alpha = (\sigma, a, Y) \quad (1)$$

w którym:

- α – określa sposoby obciążenia elementu,
- σ – zewnętrzne obciążenie próbki,
- a – długość szczeliny,
- Y – funkcja charakteryzująca geometrię elementu.

Z definicji *WIN*, jest granicą iloczynu naprężenia normalnego do powierzchni szczeliny działającego w jej wierzchołku $\sigma(r, \theta)$ i pierwiastka kwadratowego odległości od wierzchołka pęknięcia r , pomnożonej przez 2π (rys. 1) [5]:

$$K_\alpha = \lim_{r \rightarrow 0, d\theta = 0} \sqrt{2\pi r} \sigma(r, \theta) \quad (2)$$



Rys. 1. Schemat zewnętrznego obciążenia próbki z oznaczeniem składowych naprężeń wokół wierzchołka szczeliny w układzie kartezjańskim (x, y) i biegunowym (r, θ)

WIN przyjmuje wartości skończone. Gdy rozpatrzy się nieograniczony ciągły ośrodek sprężysty zawierający szczelinę pierwotną lub element konstrukcyjny o dużych wymiarach, poddany jednoosiowemu rozciąganiu z intensywnością σ , wartość K wyraża się wówczas zależnością:

$$K = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (3)$$

W przypadku elementów konstrukcyjnych o wymiarach skończonych (np. pasm o szerokości W) wprowadza się do wzoru (3) funkcję kształtu $Y(a/W)$, która przyjmuje zazwyczaj postać wielomianów:

$$K = \sigma \sqrt{\pi a} Y(a/W) \quad (4)$$

Jeżeli zatem rozpatrzmy próbkę materiału zawierającą pierwotną szczelinę i poddamy ją monotonicznemu wzrostowi obciążenia, to doprowadzimy ją do stanu krytycznego, po przekroczeniu którego, nastąpi w materiale niekontrolowany proces zniszczenia. Obciążenie takie nazywa się obciążeniem krytycznym, a parametr K w tym przypadku krytycznym współczynnikiem intensywności naprężeń (critical stress intensity factor) K_c . Miarą odporności na pęknięcie materiału jest następujące kryterium:

$$K = K_c \quad (5)$$

Metody wyznaczania krytycznej wartości *WIN*

Metody badawczo-obliczeniowe

Metody badawczo-obliczeniowe w mechanice pęknięcia, w odniesieniu do kompozytów betonowych, odnoszą się głównie do wyznaczenia krytycznych *WIN* dla I bądź II modelu pęknięcia.

Krytyczne wartości K_{Ic} można wyznaczyć za pomocą jednej z kilku przytoczonych poniżej metod:

a) na podstawie pomiarów wytrzymałościowych elementów z zamodelowanymi wcześniej szczelinami pierwotnymi.

Najczęściej stosuje się w badaniach belki trójpunktowo zginane. Badania z wykorzystaniem takich próbek przytoczono w pracy [1]. Dla takiego schematu obciążenia K_{Ic} wyznaczony jest wg ogólnego wzoru:

$$K_{Ic} = \frac{6M_c}{B(W-a)} \sqrt{\pi a} Y \quad (6)$$

w którym:

M_c – krytyczny moment zginający.

Innymi typami próbek wykorzystywanymi do szacowania wartości K_{Ic} są belki czteropunktowo zginane, próbki określane jako podwójne wsporniki lub też próbki osiowo rozciągane. Szczegółowy ich opis znaleźć można w pracy [8].

b) na podstawie pomiaru powierzchniowej energii pęknięcia (pracy pęknięcia) γ .

W tej metodzie określa się K_{Ic} jako całkę pola pod wykresem siła F – przemieszczenie f wg zależności (8) na podstawie znajomości energii pęknięcia γ danej wzorem (7).

$$\gamma = Y \int_0^{f_{\max}} F df \quad (7)$$

w którym:

f_{\max} – maksymalne przemieszczenie.

$$K_{Ic} = \sqrt{2\gamma E} \quad (8)$$

w którym:

E – moduł sprężystości betonu przy zginaniu.

c) na podstawie pomiaru twardości betonu metodą Vickersa.

W metodzie tej, rzadziej stosowanej do oceny odporności na pęknięcie betonu, wartość K_{Ic} wyznacza się z wzoru (9) do-

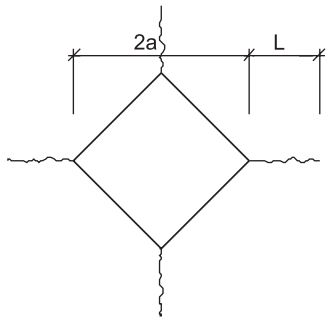
konując wcześniej analizy odcisku wgłębnika na specjalnie przygotowanej powierzchni próbki i oceniając jej twardość – H_v – wzór (10), [9]. Obecnie wraz z rozwojem nowych technik pomiaru mikrotwardości w kompozytach betonowych, tzw. metod indentacji (ocena mikro i nano mechanicznych parametrów materiałów; prace [10], [11], [12]) istnieje możliwość szerszego zastosowania tej metody do oceny odporności na pękanie kompozytów o matrycach cementowych. Obraz odcisku wgłębnika Vickersa pokazano na rysunku 2.

$$K_{Ic} = 0,035 \frac{H_v a}{\Phi \sqrt{L}} \left(\frac{\Phi E}{H_v} \right)^{0,4} \quad (9)$$

$$H_v = 1,8544 \frac{F}{(2a)^2} \quad (10)$$

w których:

Φ – bezwymiarowy współczynnik równy w przybliżeniu 3,0,
 H_v – twardość wg Vickersa,
 a, L – zgodnie z rys. 2.



Rys. 2. Obraz odcisku piramidki Vickersa

d) na podstawie analizy porowatości betonu

Najbardziej skomplikowana ze wszystkich czterech metod wymaga wnikliwej znajomości struktury porów w betonie m. in. ich kształtu, wielkości oraz rozkładu w materiale [13]. Wartość K_{Ic} wyznaczyć można z wzoru (11).

$$K_{Ic} = C_1 \delta_{fs} (\pi \phi)^{0,5} \left(\frac{\rho}{\rho_s} \right)^{3/2} \quad (11)$$

w którym:

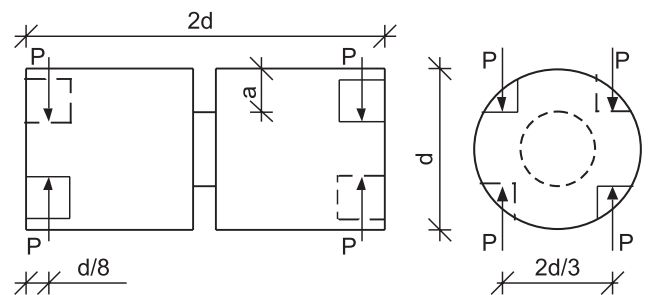
$C_1 = 0,65$ – stała empiryczna,
 δ_{fs} – wytrzymałość na zginanie materiału ścianki pora,
 ϕ – średnica pora,
 ρ – gęstość pozorna betonu,
 ρ_s – gęstość kompozytu na ściankach porów.

Z uwagi na bardzo zróżnicowaną strukturę porowatą kompozytów betonowych metoda ta w praktyce nie jest stosowana. Często natomiast wykorzystuje się ją do analizy innych materiałów porowatych np. ceramicznych.

Wyznaczenie krytycznych wartości K_{Ic} jest szczególnie istotne gdyż pod wpływem obciążeń ścinających działających na próbkę występują w niej złożone stany naprężeń powodujące powstawanie i rozwój tzw. pęknięć typu skrzydłowego, np. [8], [14]. Wzrost tych uszkodzeń odbywa się przy

mieszanym modelu pęknięcia, w którym uwzględnia się jednocześnie (dwuwymiarowy stan naprężenia) model I i II, bądź wszystkie modele (I, II i III), gdy rozpatruje się trójwymiarowy stan naprężenia w wierzchołku szczeliny. Najczęściej stosowaną próbką do wyznaczenia K_{Ic} jest kostka sześcienna z dwiema szczelinami pierwotnymi przedstawiona w pracy [2]. Innymi typami próbek wykorzystywanymi do szacowania wartości K_{Ic} są próbki typu push – off, cylindryczne z czterema szczelinami pierwotnymi lub też ze szczeliną występującą poza osią przyłożenia siły. Szczegółowy ich opis znaleźć można w pracy [8].

III model pęknięcia w przypadku badania kompozytów betonowych ma mniejsze praktyczne znaczenie w zastosowaniach inżynierskich. Na uwagę zasługują jednak ciekawe wyniki eksperymentów uzyskane przez Z. P. Bazanta i współautorów [15], [16], [17]. Do oceny odporności na pękanie autorzy stosowali próbki walcowe z wstępną szczeliną pierwotną umiejscowioną w środku wysokości cylindrów o głębokości $a = d/4$ i średnicy d . Schemat zastosowanych próbek w pracy [15] przedstawiono na rysunku 3. W Polsce jak dotąd badania odporności na pękanie kompozytów betonowych z zastosowaniem III modelu pęknięcia nie były prowadzone.



Rys. 3. Schemat próbki cylindrycznej do badania przy III modelu pęknięcia [15]

Metody numeryczne

WIN jak i inne parametry mechaniki pęknięcia można również wyznaczyć na podstawie analizy numerycznej przy zastosowaniu takich programów jak np. ABAQUS, ANSYS, SOLIDWORKS czy T-FLEX.

Przykłady szacowania WIN przy wszystkich modelach pęknięcia zostaną przedstawione na podstawie analiz uzyskanych w programie SolidWorks Simulation (rys. 4). Szerokie możliwości jego zastosowania w obliczeniach inżynierskich, z wykorzystaniem metody elementów skończonych (MES), przedstawili autorzy w pracy [18]. Do oceny wielkości potrzebnych do wyznaczenia K_{ac} służy w tym programie specjalny moduł – badania statyczne, dzięki któremu w aspekcie mechaniki pęknięcia można ustalić np. przemieszczenia w belce ze szczeliną pierwotną, szerokość rozwarcia szczeliny lub naprężenia powodujące jej niekontrolowany rozwój (rys. 4).

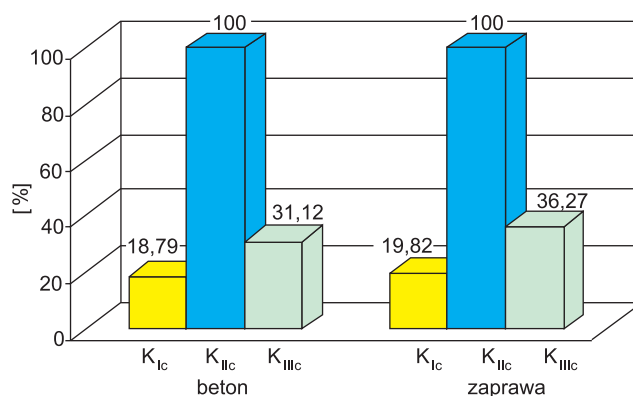
Symulacje komputerowe przedstawione na rysunku 4 wykonano przyjmując, że próbki betonowe wykonane są z materiału liniowo – sprężystego o charakterystykach sprężystych (moduł sprężystości i współczynnik Poissona).

$f_{cm215/30} = 38,88 \text{ MPa}$. Kompozyt był wykonany na kruszywie łamanym wapiennym o maksymalnym uziarnieniu 12,7 mm, w którym wskaźnik w/c wynosił 0,6.

Tabela 1. Porównanie wartości K_{ac}

Analizowany materiał	Współczynniki intensywności naprężeń K_{ac}		
	K_{Ic} [MN/m ^{3/2}]	K_{IIc} [MN/m ^{3/2}]	K_{IIIc} [MN/m ^{3/2}]
beton	1,095	5,828	1,814
zaprawa	0,841	4,243	1,539

Analizując tabelę 1 można stwierdzić, że najwyższą odporność na pękanie posiada beton przy II modelu natomiast najniższą przy I. Na rysunku 5 przedstawiono, jaki jest procentowy spadek K_{Ic} i K_{IIIc} w porównaniu do K_{IIc} . K_{Ic} było niższe o około 80%, natomiast K_{IIIc} o około 70% analizując wyniki dla betonu i zaprawy.



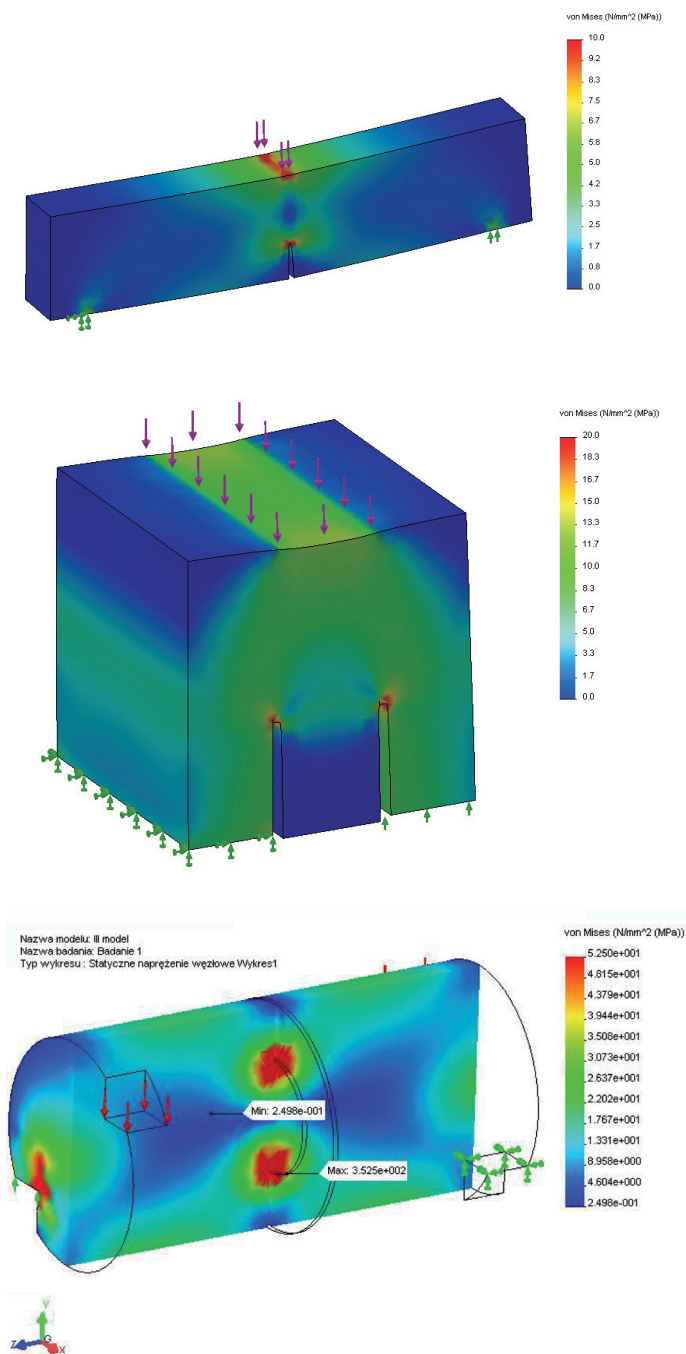
Rys. 5. Procentowe porównanie wartości WIN dla betonu i zaprawy

Korelacja K_{ac} z podstawowymi parametrami wytrzymałościowymi betonu

Krytyczne wartości WIN K_{ac} traktowane są jako wielkości stałe charakteryzujące badany materiał. W tabeli 2 zestawiono dla dwóch kompozytów betonowych wartości K_{Ic} i K_{IIc} w ze-

Tabela 2. Porównanie parametrów wytrzymałościowych betonu z wartościami K_{Ic} i K_{IIc}

Analizowane parametry betonu	Rodzaj betonu	
	Ż-8	G-16
f_{cm15} [MPa]; s[MPa]; v[%]	35,16; 1,24; 3,52	43,99; 3,41; 7,74
$f_{cm215/30}$ [MPa]; s[MPa]; v[%]	32,72; 0,40; 1,23	38,73; 1,63; 4,20
f_{ctm}^{spl} [MPa]; s[MPa]; v[%]	2,44; 0,14; 5,92	3,13; 0,26; 8,28
$f_{ctm}^{flex,1}$ [MPa]; s[MPa]; v[%]	4,01; 0,26; 6,58	5,57; 0,37; 6,68
$f_{ctm}^{flex,2}$ [MPa]; s[MPa]; v[%]	3,56; 0,31; 8,67	5,02; 0,37; 7,42
E_{cm} [MPa]; s[MPa]; v[%]	30169; 1452; 4,81	31915; 2114; 6,62
K_{Ic} [MN/m ^{3/2}]; s[MPa]; v[%]	0,66; 0,106; 16,03	1,15; 0,13; 11,25
K_{IIc} [MN/m ^{3/2}]; s[MPa]; v[%]	3,71; 0,31; 8,44	5,07; 0,68; 13,42



Rys. 4. Naprężenia krytyczne powodujące rozwój szczeliny w próbce przy: a) I modelu, b) II modelu, c) III modelu pękania

Porównanie wartości K_{ac} przy zastosowaniu różnych modeli pękania

W tabeli 1 zestawiono wartości K_{ac} dla betonu i zaprawy cementowej na podstawie wyników eksperymentów zaprezentowanych w pracy [15]. Są to jedne z nielicznych danych literaturowych, które porównują wartości energii pękania – G_F [8,19] (dla, których wyznaczono K_{ac}) we wszystkich trzech modelach pękania. Na ich podstawie można ocenić jak różną odpornością na pękanie wykazują kompozyty betonowe w zależności od sposobu obciążania elementu. Autorzy wyznaczali parametry dla betonu o wytrzymałości średniej .

stawieniu ze standardowymi parametrami wytrzymałościowymi betonu tj.: wytrzymałością na ściskanie – $f_{cm \square 15}$ i $f_{cm \circ 15/30}$, wytrzymałością na rozciąganie przy rozluźnianiu – f_{ctm}^{spl} i zginaniu belki (trójpunktowym – $f_{ctm}^{flex,1}$ i czteropunktowym – $f_{ctm}^{flex,2}$), oraz modułem sprężystości przy ściskaniu – E_{cm} . Prezentowane wyniki dotyczą kompozytu na kruszywie żwirowym o uziarnieniu do 8 mm (Z-8) oraz na kruszywie granitowym o uziarnieniu do 16 mm (G-16). W obydwu mieszankach zastosowano ten sam cement – CEM I 42,5 R, oraz to samo $w/c = 0,40$. Przedstawione parametry były analizowane po 28 dniach dojrzewania betonu.

Na podstawie analizy tabeli 2 widać, że wartości parametrów mechaniki pęknięcia są ściśle związane z wartościami charakterystyk wytrzymałościowych betonu. Istotny jest również fakt, iż K_{Ic} oraz K_{IIc} mają znacznie większe współczynniki zmienności – v , co świadczy o większych rozrzutach wyników w tych badaniach, stąd przy ocenie odporności na pęknięcie kompozytów betonowych należy poddawać analizie duże partie próbek w liczbie minimum 6–8.

Czynniki mające wpływ na wartości WIN

Wartości krytycznych WIN zależne są zarówno od: wymiarów próbek badawczych, wielkości szczelin pierwotnych, składu kompozytów oraz ich wieku. Do chwili obecnej przeprowadzono szereg badań oceniających wpływ różnych czynników na zmianę wartości K_{Ic} i K_{IIc} . Wyniki niektórych eksperymentów przedstawił A. M. Brandt w pracy [20]. Na podstawie analizy tej publikacji oraz własnych doświadczeń sformułowano poniższe wnioski. Z ich treści wynika, że wzrost wartości K_{Ic} i K_{IIc} , a co za tym idzie większa odporność kompozytów betonowych na pęknięcie ma miejsce, gdy:

- rysa pierwotna w próbce przygotowana jest poprzez nacięcie, a nie zabetonowanie odpowiedniej wkładki a jej szerokość znajduje się w przedziale od 0,5 do 3,5 mm (przy rysach cieńszych nie obserwuje się żadnych zmian),
- zmniejsza się głębokość względna rysy czyli stosunek a/W ,
- zwiększa się szerokość próbki B (długość frontu rysy), oraz jej wysokość W ,
- zwiększa się wytrzymałość betonu oraz wzrasta wiek badanego kompozytu,
- zmniejsza się współczynnik w/c oraz obniża się porowatość betonu,
- wzrasta wielkość maksymalnego ziarna kruszywa D_{max} w stosie okruszonym oraz zwiększa się procentowa ilość kruszywa grubego w stosunku do ciężaru betonu,
- stosuje się kruszywa łamane a szczególnie reaktywne (np. wapienie lub dolomity) zamiast otoczakowych żwirów, zastosowano dodatek włókien stalowych.

Podsumowanie

Jednym z ważnych zadań współczesnej inżynierii materiałowej w zakresie projektowania nowych betonów jest ustalenie optymalnego składu komponentów tych kompozytów, spełniających nałożone normami wymogi bezpieczeństwa pracy konstrukcji budowlanych. Oprócz spełnienia kryteriów wytrzymałościowych materiałów konstrukcyjnych dla różnych

stanów naprężenia istotna jest wiedza o: procesach inicjacji defektów i ich stabilnego wzrostu, oraz poziomie obciążenia materiału, przy którym rozpoczyna się niekontrolowany rozwój uszkodzeń prowadzący do zniszczenia jego struktury. Szczególnie ważne jest określenie momentu rozpoczęcia niestabilnego rozwoju rys, które definiuje się jako odporność na pęknięcie materiału. Odporność na pęknięcie jest jednym z najistotniejszych kryteriów, jakie należy wziąć pod uwagę, projektując nowe kompozyty betonowe. Ta charakterystyka określana jest na podstawie badań eksperymentalnych, analitycznych bądź numerycznych jako tzw. krytyczna wartość współczynnika intensywności naprężenia.

Bibliografia

- [1] Golewski G., Sadowski T.: *Odporność na pęknięcie betonów przy zginaniu*. Drogownictwo, nr 9/10, 2006, 307-311
- [2] Golewski G., Sadowski T.: *Wpływ uziarnienia kruszywa grubego na charakter uszkodzeń i pęknięcia betonów wapiennych*. Drogownictwo, nr 8, 2006, 272-275
- [3] Golewski G. L.: *Ocena rozwoju uszkodzeń betonu przy ściskaniu w świetle hipotezy naprężeń krytycznych*. Drogownictwo, nr 1, 2008, 28-34
- [4] Sadowski T. (ed.): *Multiscale model ling of damage and fracture processes In composite materials*. CISM courses and lectures no. 474, 2005, Springer, Wien New York, 309
- [5] Bochenek A.: *Elementy mechaniki pęknięcia. Część pierwsza. Podręcznik dla materiałoznawców*. Wydawnictwa Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa 1998
- [6] Neimitz A.: *Mechanika pęknięcia*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1998
- [7] Peng J., Wu Z., Zhao G.: *Fractal analysis of fracture in concrete*. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, vol. 27, 1997, 135-140
- [8] Golewski G. L., Sadowski T. S.: *Rola kruszywa grubego w procesie destrukcji kompozytów betonowych poddanych obciążeniom doraźnym*. Wydawnictwo IZT Sp. z o.o., Lublin 2008
- [9] Świącicki Z., Polesiński Z., Rečko W. M.: *Niszczanie mechaniczne materiałów kruchych (cz. II)*. Szkło i Ceramika, nr 4, 1994, 1-3
- [10] Brandt A. M., Kasperkiewicz J. i inni: *Metody diagnozowania betonów i betonów wysokowartościowych na podstawie badań strukturalnych*. Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN, Warszawa 2003
- [11] Glinicki M. A., Kasperkiewicz J., Sobczak M., Zieliński M.: *Badanie mikrotrwałości betonu za pomocą węgelnika Vickersa*. XLIX Konferencja Naukowa Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN i Komitetu Nauki PZITB, Poznań – Krynica 2003, t. 3, s. 139-146
- [12] Pichór W., Dyczek J.: *Wybrane metody badań granicy kruszywo – zaczyn w betonie*. Cement Wapno Gips, nr 6, 1995, 193-195
- [13] Świącicki Z., Polesiński Z., Rečko W. M.: *Niszczanie mechaniczne materiałów kruchych (cz. III)*. Szkło i Ceramika, nr 1, 1995, 1-4
- [14] Golewski G., Sadowski T.: *Effect of aggregate kind and graining on modelling of plain concrete under compression*. Computational Materials Science, vol. 43, 2008, s. 119-126
- [15] Bazant Z. P., Prat P. C., Tabbara M. R.: *Antiplane shear fracture tests (mode III)*. ACI Materials Journal, vol. 87, 1990, 12-19
- [16] Bazant Z. P., Prat P. C.: *Measurement of mode III fracture energy of concrete*. Nuclear Engineering and Design, vol. 106, 1988, 1-8
- [17] Bazant Z. P., Pfeiffer P. A.: *Determination of fracture energy from size effect and brittleness number*. ACI Materials Journal, vol. 84, 1987, 463-480
- [18] Golewski P., Golewski G. L.: *Przykłady zastosowania programu Solidworks w obliczeniach inżynierskich MES*. Materiały Budowlane, nr 12, 2008, 3-6
- [19] Słowik M.: *Sposoby określania energii pęknięcia w elementach z betonu*. Inżynieria i Budownictwo, nr 8, 1996, 466-468
- [20] Brandt A. M.: *Badania doświadczalne w mechanice zniszczenia kompozytów o matrycach cementowych*. Prace IPPT PAN, 29, Warszawa 1979.