Andrzej KORNACKI
Ewa SOKOŁOWSKA

OCENA CZASU POPRAWNEJ PRACY DO USZKODZENIA ZA POMOCĄ KRYTERIUM INFORMACYJNEGO AKAIKE

THE ESTIMATION OF SMOOTH OPERATION TIME UNTIL FAILURE WITH THE APPLICATION OF THE AKAIKE INFORMATION CRITERION (AIC)

Artykuł przedstawia zastosowanie kryterium informacyjnego Akaike do testowania hipotez dotyczących średnich. Zaprezentowana metoda stanowi alternatywę wobec tradycyjnych metod testowania hipotez o średniej, wymagających ustalenia poziomu istotności. W pracy wykorzystano dane eksperymentalne z rozprawy habilitacyjnej W. Piekarskiego [12], dotyczące czasu pracy ciągników C355-360 do pierwszego uszkodzenia. Przedstawione rezultaty stanowią skuteczne narzędzie umożliwiające wybór odpowiedniego modelu statystycznego wśród modeli dotyczących eksploatacji i niezawodności maszyn.

Słowa kluczowe: *kryterium informacyjne Akaike, testowanie hipotez statystycznych, ciągniki C355-360.*

The article presents the application of the Akaike Information Criterion (AIC) to test hypothesis concerning mean values. The presented method offers an alternative to traditional hypothesis testing methods requiring the establishment of the significance level. In the article, we used the experimental data from a postdoctoral thesis by W. Piekarski [12] concerning the operation time of C355-360 tractors until the first failure. The obtained results provide a useful tool enabling the choice of a more suitable statistical model from the models relating to the operation and reliability of machines.

Keywords: *the Akaike Information Criterion (AIC), Statistical hypothesis testing, C355-360 tractors.*

1. Wprowadzenie

Ważnym zagadnieniem teorii niezawodności jest odkrycie praw rządzących różnymi zjawiskami, tak aby możliwe było przewidywanie ich przyszłego zachowania. Przez niezawodność, zwaną również nieuszkadzalnością, rozumie się zdolność maszyn do wypełniania odpowiednich funkcji w danych warunkach i w określonym przedziale czasu [15]. Liczbowej oceny sprawności urządzeń dokonuje się w oparciu o wartości, które pochodzą z obserwacji urządzenia podczas eksploatacji. Mają one charakter losowy. Przykładowo, możemy oceniać wskaźnik zawodności lub wskaźnik niezawodności, intensywność uszkodzeń, średni czas pracy do uszkodzenia bądź średni czas pracy miedzy uszkodzeniami. Problem losowości zjawisk możemy rozwiązać przez budowanie odpowiednich modeli statystycznych. Aby odnaleźć odpowiedni model opisujący dane zjawisko należy wykonać przynajmniej dwie czynności. Po pierwsze, należy zbudować model, który przybliża rzeczywistość w możliwie dobry sposób. Po drugie, musimy skonstruować odpowiednie kryterium oceniające dopasowanie tego modelu do rzeczywistości. Jednym z takich kryteriów jest Kryterium Informacyjne Akaike (AIC). W niniejszej pracy wskazujemy kryterium wyboru między modelami dotyczącymi średniego czasu pracy do pierwszego uszkodzenia urządzenia na przykładzie ciągników C355-360.

Pojęcie AIC ma swoje źródło na gruncie teorii informacji [3-11]. Wywodzi się ono od pojęcia informacji Kullback-Leibler'a. Rozważmy ciągłe rozkłady prawdopodobieństwa. Niech $g(x)$ będzie funkcją gęstości prawdziwego rozkładu prawdopodobieństwa oraz $f(x)$ będzie funkcją gęstości rozkładu teoretycznego. Wtedy informacja Kullback-Leibler'a (K-L) jest dana wzorem [1]

1. Introduction

An important problem of science is to find laws influencing different kinds of phenomena which help to forecast their feature behavior. By reliability we understand the ability of machines to function in given conditions and in a given period of time [6]. The numerical estimation of machines reliability is based on random values which are obtained during the observation of a machine in operation. For instance, we can estimate the index of unreliability or the index of reliability, the intensity of failures, the mean operation time until failure or the mean time between successive failures. The problem of randomness can be solved by building suitable statistical models. Two appropriate steps should be taken to find a suitable model of a given phenomenon. First of all, we should build a model which approximates reality in the best possible way. In the second place, a good criterion of comparing two models ought to be found. One of such criterions can be the Akaike Information Criterion (AIC). In the present paper, we indicate the criterion for choosing between the models concerning the mean operation time until the first failure using the example of C355-360 tractors.

The concept of AIC has its source in the theory of information.[3-11] This notion is based on the concept of Kullback-Leibler (K-L) information. Let us consider a continuous probability distributions. Let $g(x)$ be the true density function and $f(x)$ be a model density function. Then the Kullback-Leibler information is given by [1]

$$I(g,f)=\int_{-\infty}^{+\infty}\log\frac{g(x)}{f(x)}g(x)dx \qquad (1.1)$$

gdzie log oznacza logarytm naturalny. $I(g,f)$ opisuje odległość dwóch rozkładów prawdopodobieństwa i posiada następujące własności [9]

- $I(g,f)\geq 0$,
- $I(g,f)=0 \Leftrightarrow f(x)=g(x)$ prawie wszędzie.

Oczywiście, im mniejsza wartość $I(g,f)$, tym lepsze dopasowanie modelu do rzeczywistości. Zauważmy, że wielkość $I(g,f)$ zależy od rozkładu $g(x)$, którego zazwyczaj nie znamy. W związku z tym do oceny dopasowania modelu potrzebny jest estymator $I(g,f)$. Z definicji informacji K-L mamy

$$I(g,f)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\log g(x)dx-\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\log f(x)dx$$

Ponieważ pierwsza wielkość w powyższej równości nie zależy od teoretycznego rozkładu $f(x)$, to minimalizacja wielkości informacji K-L jest równoważna maksymalizacji wielkości

$$\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\log f(x)dx \qquad (1.2)$$

którą nazywamy oczekiwanym logarytmem wiarygodności. Jeśli posiadamy n niezależnych obserwacji $\{X_1,\dots,X_n\}$, to wartość

$$\sum_{i=1}^{n}\log f(x_i) \qquad (1.3)$$

nazywamy logarytmem wiarygodności modelu. Można pokazać, że oczekiwany logarytm wiarygodności można w tym przypadku aproksymować przez wielkość (1.3) pomnożoną przez $1/n$ [14]. Zatem im większa wartość (1.3) tym lepsze dopasowanie modelu do rzeczywistego rozkładu.

Załóżmy, że $f(x_1,\dots,x_n\,|\,\theta)$ jest łączną funkcją gęstości wektora $(X_1,\dots,X_n)$, gdzie θ jest parametrem rozkładu. Jeśli posiadamy n obserwacji $\{x_1,\dots,x_n\}$, to funkcję $L(\theta)=f(x_1,\dots,x_n\,|\,\theta)$ nazywamy funkcją wiarygodności. Zauważmy, że jeśli zmienne losowe $\{X_1,\dots,X_n\}$ są niezależne, to $L(\theta)=f(x_1\,|\,\theta)\cdot\ldots\cdot f(x_n\,|\,\theta)$, gdzie $f(x_i\,|\,\theta)$ jest funkcją gęstości zmiennej losowej X_i. Możemy zdefiniować logarytm wiarygodności jako $l(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\log f(x_i\,|\,\theta)$.

Funkcja wiarygodności jest wykorzystywana do estymacji parametrów za pomocą metody największej wiarygodności. Estymator otrzymany tą metodą nazywamy estymatorem największej wiarygodności. Model, który używa tego estymatora nazywamy modelem największej wiarygodności. Wartość logarytmu wiarygodności w modelu największej wiarygodności nazywamy logarytmem największej wiarygodności.

Niech $g(x)=f(x|\,\theta^*)$, gdzie f jest rozkładem o k parametrach oraz θ^* jest wektorem prawdziwych parametrów. Zdefiniujmy oczekiwany logarytm wiarygodności rozkładu $f(\cdot\,|\,\theta)$ jako [14]

$$E_Z\{\log f(Z\,|\,\theta)\}=\int f(z\,|\,\theta^*)\log f(z\,|\,\theta)dz$$

gdzie Z jest zmienną losową o takim samym rozkładzie jak X_i oraz niezależną od X_i. Niech $l^*(\theta)=E_z[\log f(Z\,|\,\theta)]$. Z poprzednich rozważań wynika, że wartość ta jest miarą dopasowania modelu. Im większa wartość $l^*(\theta)$, tym lepsze dopasowanie modelu. Niech $\hat{\theta}$ będzie estymatorem maksymalizującym funkcję wiarygodności $l(\theta)$. Jakość dopasowania modelu największej wiarygodności możemy wyrazić w terminach $l^*(\hat{\theta})$. Jednak wartość ta

$$I(g,f)=\int_{-\infty}^{+\infty}\log\frac{g(x)}{f(x)}g(x)dx \qquad (1.1)$$

where log denotes the natural logarithm. $I(g,f)$ describes the distance between two probability distributions and has the following properties [2]

- $I(g,f)\geq 0$,
- $I(g,f)=0 \Leftrightarrow f(x)=g(x)$ almost everywhere.

Obviously, the lower the value of $I(g,f)$, the better the goodness of fit of the model. Notice that the value of $I(g,f)$ depends on the distribution of $g(x)$ which is usually unknown. So we need an estimator of $I(g,f)$. From the definition of K-L information we have

$$I(g,f)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\log g(x)dx-\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\log f(x)dx$$

The first term in the last equality does not depend on the model distribution $f(x)$, so finding the minimum of K-L information is equivalent to finding the maximum of the value

$$\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\log f(x)dx \qquad (1.2)$$

which is called an expected log likelihood. If we have n independent realizations $\{X_1,\dots,X_n\}$, then the value

$$\sum_{i=1}^{n}\log f(x_i) \qquad (1.3)$$

is called the log likelihood of the model. It is easy to prove that an expected log likelihood can be approximated by (1.3) times 1/n [5]. So, the higher the value of (1.3), the better the goodness of fit of the model.

Assume that $f(x_1,\dots,x_n\,|\,\theta)$ is a joint distribution function of the vector $(X_1,\dots,X_n)$, where θ is a parameter of the distribution. If we have n observations $\{x_1,\dots,x_n\}$ then the function $L(\theta)=f(x_1,\dots,x_n\,|\,\theta)$ is called the likelihood function. When we consider the independent random variables $\{X_1,\dots,X_n\}$, then $L(\theta)=f(x_1\,|\,\theta)\cdot\ldots\cdot f(x_n\,|\,\theta)$, where $f(x_i\,|\,\theta)$ is a density function of X_i. We can define the log likelihood function as $l(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\log f(x_i\,|\,\theta)$.

The log likelihood function is used to estimate the distribution parameters by the maximum likelihood method. The estimator obtained from this method is called the maximum log likelihood estimator. The model with this estimator is called the maximum likelihood model. The value of the log likelihood in the maximum likelihood model is called the maximum log likelihood.

Let us identify $g(x)=f(x|\,\theta^*)$, where f is a model with k parameters and θ^* is a vector of true parameters. Then the expected log likelihood of the distribution $f(\cdot\,|\,\theta)$ is given by [14]

$$E_Z\{\log f(Z\,|\,\theta)\}=\int f(z\,|\,\theta^*)\log f(z\,|\,\theta)dz$$

where Z is a random variable with the same distribution as X_i and independent of X. Let $l^*(\theta)=E_z[\log f(Z\,|\,\theta)]$. As we said, this value is a criterion of fitting of the distribution. The higher the value of $l^*(\theta)$, the better the goodness of fit of the model.
Let $\hat{\theta}$ be the maximum likelihood estimator of the parameters of the model maximizing the log likelihood function $l(\theta)$. So the goodness of fit of the model can be expressed in terms of $l^*(\hat{\theta})$. Observe that this value is dependent on the realization of the ran-

jest zależna od realizacji zmiennej losowej X. W związku z tym zdefiniujmy średni oczekiwany logarytm wiarygodności jako

$$l_n^*(k) = E_X[l^*(\hat{\theta})] = \int l^*(\hat{\theta}) \prod_{i=1}^{n} g(x_i)dx$$

Tak jak poprzednio, im większa wartość $l_n^*(k)$ tym lepsze dopasowanie modelu. Wydaje się, że najlepszym estymatorem $l_n^*(k)$ jest logarytm największej wiarygodności. Jest to jednak estymator obciążony, a jego obciążenie jest równe liczbie parametrów modelu. Akaike pokazał, że nieobciążonym estymatorem średniego oczekiwanego logarytmu wiarygodności jest [14]

AIC(k) = logarytm największej wiarygodności – liczba parametrów modelu.

Ze względów historycznych [13] przyjęło się , że:

$$AIC(k) = -2l(\hat{\theta}) + 2k$$

Podsumowując, im mniejsza wartość AIC(k) tym lepsze dopasowanie modelu do prawdziwego rozkładu.

2. Estymacja parametrów rozkładu normalnego za pomocą metody największej wiarygodności

Niech $X_1, X_2, \dots, X_n$ będzie próbą pobraną z rozkładu normalnego $N(\mu,\sigma^2)$, gdzie $\mu \in R$, $\sigma^2 > 0$. Rozważmy funkcję gęstości zmiennej losowej X_i: $f(x_i \mid \mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$

Funkcja wiarygodności dana jest wzorem

$$L(\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right)^n} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}$$

Stąd

$$l(\mu,\sigma^2) = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - \frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{n}{2}\log\sigma^2$$

Zatem

$$\frac{\partial l}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial l}{\partial \sigma^2} = \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - \frac{n}{2\sigma^2}$$

Załóżmy, że parametry rozkładu nie są znane. Szukamy maksimum funkcji $l(\cdot,\cdot)$ oraz odpowiadającego mu argumentu funkcji. Warunek konieczny istnienia ekstremum możemy zapisać jako $\frac{\partial l}{\partial \mu} = 0$ oraz $\frac{\partial l}{\partial \sigma^2} = 0$. Rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - n\sigma^2 = 0 \end{cases}$$

otrzymujemy $\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ oraz $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$.

Możemy zapisać rozwiązanie układu równań jako

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu})^2 \tag{2.1}$$

Należy jeszcze sprawdzić, czy funkcja $l(\cdot,\cdot)$ osiąga maksimum w punkcie $(\hat{\mu},\hat{\sigma}^2)$ .W tym celu sprawdzimy czy spełniona jest nierówność $l(\hat{\mu},\hat{\sigma}^2) - l(\mu,\sigma^2) \geq 0$. Rozważmy różnicę

dom variable X. Therefore, in order to lose this dependence, define the mean expected log likelihood by

$$l_n^*(k) = E_X[l^*(\hat{\theta})] = \int l^*(\hat{\theta}) \prod_{i=1}^{n} g(x_i)dx$$

As before, the higher the value of $l_n^*(k)$, the better the fitting of the model. At first sight, it would seem that the maximum log likelihood is a good estimator of the mean expected log likelihood. However, as Akaike has shown, it is a biased estimator of this value and its bias is equal to the number of the parameters. Akaike has also shown that the asymptotically unbiased estimator of the mean expected log likelihood is [14]

AIC(k) = the maximum log likelihood – number of estimated parameters.

By historical reasons [13] we take:

$$AIC(k) = -2l(\hat{\theta}) + 2k$$

Summarizing, the model which has the minimal value of AIC(k) is considered to be the most appropriate model.

2. Estimation of parameters of normal distribution by the maximum likelihood method.

Let $X_1, X_2, \dots, X_n$ be the independent *n* observations of the normal distribution $N(\mu,\sigma^2)$, where $\mu \in R$, $\sigma^2 > 0$. Let us consider the normal density function of the random variable X_i: $f(x_i \mid \mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$.

The likelihood function is given by

$$L(\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right)^n} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}$$

Thus

$$l(\mu,\sigma^2) = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - \frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{n}{2}\log\sigma^2$$

We also have

$$\frac{\partial l}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) \quad \text{and} \quad \frac{\partial l}{\partial \sigma^2} = \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - \frac{n}{2\sigma^2}$$

Assume that the parameters of the distribution are unknown. We will find the maximum value of the function $l(\cdot,\cdot)$ and the corresponding maximum argument. The necessary condition for the existence of the maximum of this function is $\frac{\partial l}{\partial \mu} = 0$ and $\frac{\partial l}{\partial \sigma^2} = 0$. Solving the system

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - n\sigma^2 = 0 \end{cases}$$

we get $\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ and $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$.

We can write the solution of the above system as

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu})^2 \tag{2.1}$$

Now, we should check if the function $l(\cdot,\cdot)$ has the maximum in $(\hat{\mu},\hat{\sigma}^2)$. We will check if $l(\hat{\mu},\hat{\sigma}^2) - l(\mu,\sigma^2) \geq 0$. Let us consider the difference

$$l(\hat{\mu},\hat{\sigma}^2) - l(\mu,\sigma^2) == -\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu})^2 - \frac{n}{2}\log\hat{\sigma}^2 + \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - \frac{n}{2}\log\sigma^2 =$$

$$= -\frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu})^2 - \frac{n}{2}\log\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu})^2 + n(\hat{\mu}-\mu)^2\right] =$$

$$= -\frac{n}{2}\log\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} + \left(\frac{1}{2\sigma^2} - \frac{1}{2\hat{\sigma}^2}\right)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu})^2 + \frac{n(\hat{\mu}-\mu)^2}{2\sigma^2} = \frac{n}{2}\left(\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} - 1 - \log\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\right) + \frac{n(\hat{\mu}-\mu)^2}{2\sigma^2}.$$

Ponieważ ostatni wyraz w otrzymanym wyrażeniu nie zależy od $\hat{\sigma}^2$ ani $\hat{\mu}$, to możemy badać funkcję $f(x)=\log x - x$. Funkcja f posiada maksimum w punkcie $x = 1$ oraz $f(1)=-1$. Zatem $\log x - x \leq -1$ dla $x>0$.

Stąd mamy $l(\hat{\mu},\hat{\sigma}^2) - l(\mu,\sigma^2) \geq 0$, co implikuje że funkcja $l(\mu,\sigma^2)$ osiąga maksimum dla $\mu = \hat{\mu}$ i $\sigma^2 = \hat{\sigma}^2$. Podsumowując, $\hat{\mu}$ i $\hat{\sigma}^2$ są estymatorami największej wiarygodności parametrów μ i σ^2. Dodatkowo

$$l(\hat{\mu},\hat{\sigma}^2) = -\frac{n}{2}\log 2\pi\hat{\sigma}^2 - \frac{n}{2}$$

Załóżmy, że X_i ma rozkład normalny $N(\mu,\sigma^2)$, gdzie wartość parametru μ jest znana oraz $\mu = \mu_0$. Wtedy funkcja wiarygodności ma postać

$$l(\mu_0,\sigma^2) = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2 - \frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{n}{2}\log\sigma^2$$

Stąd $\frac{\partial l}{\partial\sigma^2} = \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2 - \frac{n}{2\sigma^2}$. Powtarzając rozumowanie, jakiego użyto poprzednio otrzymujemy $\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2$ jako estymator największej wiarygodności nieznanego parametru. Dodatkowo

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \hat{\mu}^2 + (\mu_0-\hat{\mu})^2 = \hat{\sigma}^2 + (\mu_0-\hat{\mu})^2 \quad (2.2)$$

Niech X_i posiada rozkład normalny $N(\mu,\sigma^2)$, ale wartość parametru σ^2 jest znana oraz $\sigma^2 = \sigma_0^2$. Wtedy funkcję wiarygodności możemy zapisać jako

$$l(\mu,\sigma_0^2) = -\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - \frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{n}{2}\log\sigma_0^2$$

Stąd $\frac{\partial l}{\partial\mu} = \frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)$. Zatem, podobnie jak w pierwszym przypadku, estymatorem największej wiarygodności parametru μ jest

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i = \hat{\mu} \quad (2.3)$$

3. Weryfikacja hipotezy H_0: $\mu = \mu_0$ za pomocą Kryterium Informacyjnego Akaike

Załóżmy, że wartość parametru σ^2 nie jest znana. Weryfikacja hipotezy H_0: $\mu = \mu_0$ będzie polegała na porównaniu wielkości AIC dla dwóch modeli. Pierwszy z nich będzie zakładał, że cecha ma rozkład normalny $N(\mu,\sigma^2)$. W drugim modelu cecha posiada rozkład normalny $N(\mu,\sigma^2)$, gdzie wartość μ jest różną od μ_0 wartością parametru średniej.

The last term in the equation does not depend on $\hat{\sigma}^2$ or $\hat{\mu}$, so we can observe the function $f(x)=\log x - x$. The function f has a maximum in $x = 1$ and $f(1)=-1$. Thus $\log x - x \leq -1$ for $x>0$.

So we have $l(\hat{\mu},\hat{\sigma}^2) - l(\mu,\sigma^2) \geq 0$, which implies that function $l(\mu,\sigma^2)$ has the maximum at $\mu = \hat{\mu}$ and $\sigma^2 = \hat{\sigma}^2$. To summarize, $\hat{\mu}$ and $\hat{\sigma}^2$ are the maximum likelihood estimators of the parameters μ and σ^2. Also the maximum log likelihood is given by

$$l(\hat{\mu},\hat{\sigma}^2) = -\frac{n}{2}\log 2\pi\hat{\sigma}^2 - \frac{n}{2}$$

Assume now that X_i has the normal distribution $N(\mu,\sigma^2)$ but we know the value of μ and $\mu = \mu_0$. Then the maximum log likelihood function is given by

$$l(\mu_0,\sigma^2) = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2 - \frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{n}{2}\log\sigma^2$$

Differentiation over σ^2 gives $\frac{\partial l}{\partial\sigma^2} = \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2 - \frac{n}{2\sigma^2}$. Using the same method as before we get $\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2$ as the maximum log likelihood estimator. We have also

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \hat{\mu}^2 + (\mu_0-\hat{\mu})^2 = \hat{\sigma}^2 + (\mu_0-\hat{\mu})^2 \quad (2.2)$$

Let X_i have a normal distribution $N(\mu,\sigma^2)$, but now we assume that the parameter σ^2 is known and $\sigma^2 = \sigma_0^2$. Then the maximum log likelihood function is given by

$$l(\mu,\sigma_0^2) = -\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - \frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{n}{2}\log\sigma_0^2$$

Differentiation over μ gives $\frac{\partial l}{\partial\mu} = \frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)$. So the maximum log likelihood estimator of μ is given by

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i = \hat{\mu} \quad (2.3)$$

and is the same as in the first case.

3. Verification of the hypothesis H_0: $\mu = \mu_0$ with the Akaike Information Criterion

Let us consider that the value of the parameter σ^2 is unknown. The verification of the hypothesis H_0: $\mu = \mu_0$ is equivalent to the comparison of AIC of two models. The first of them assumes that fitted distribution of the feature in population is $N(\mu,\sigma^2)$. The second assumes that it is the normal distribution $N(\mu,\sigma^2)$ with another mean μ different from μ_0.

Niech $f(x\mid\mu,\sigma^2)$ będzie funkcją gęstości rozkładu normalnego:

$$f(x\mid\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

Wtedy

$$l(\mu,\sigma^2)=-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2-\frac{n}{2}\log 2\pi-\frac{n}{2}\log\sigma^2=$$

$$=-\frac{n}{2}\log 2\pi-\frac{n}{2}\log\sigma^2-\frac{n}{2\sigma^2}\left\{\left(\mu-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right\}$$

Zatem logarytm wiarygodności może być zapisany ogólnie jako

$$l(\mu,\sigma^2)=-\frac{n}{2}\log 2\pi-\frac{n}{2}\log\sigma^2-\frac{n}{2\sigma^2}\left\{\left(\mu-\hat{\mu}\right)^2+\hat{\sigma}^2\right\}\qquad(3.1)$$

Rozważmy pierwszy ze wspomnianych modeli

Model (1): $$f(x\mid\mu_0,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{(x-\mu_0)^2}{2\sigma^2}\right\}\qquad(3.2)$$

Z rozważań w części 2 wynika, że estymatorem największej wiarygodności parametru σ^2 jest

$$\hat{\sigma}_1=\hat{\sigma}^2+(\mu_0-\hat{\mu})^2$$

Wstawiając do wzoru (3.1) dla μ równego μ_0 i σ^2 równego $\hat{\sigma}_1^{\,2}$ otrzymujemy logarytm największej wiarygodności dla Model(1)

$$l(\mu_0,\hat{\sigma}_1^{\,2})=-\frac{n}{2}\log 2\pi-\frac{n}{2}\log\hat{\sigma}_1^{\,2}-\frac{n}{2\hat{\sigma}_1^{\,2}}\left\{\left(\mu_0-\hat{\mu}\right)^2+\hat{\sigma}^2\right\}=-\frac{n}{2}\log 2\pi-\frac{n}{2}\log\hat{\sigma}_1^{\,2}-\frac{n}{2}$$

Zatem, zgodnie z rozważaniami w części 1, wartość AIC dla tego modelu wynosi

$$AIC(1)=n(\log 2\pi+\log\hat{\sigma}_1^2+1)+2\cdot 1\qquad(3.3)$$

Rozważmy drugi model

Model(2): $$f(x\mid\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}\qquad(3.4)$$

Funkcja wiarygodności dla tego modelu została przedstawiona w części 2. Estymatorami największej wiarygodności są $\hat{\mu}$ i $\hat{\sigma}^2$. Stosując (3.1) ponownie otrzymujemy logarytm największej wiarygodności dla tego modelu

$$l(\hat{\mu},\hat{\sigma}^2)=-\frac{n}{2}\log 2\pi-\frac{n}{2}\log\hat{\sigma}^2-\frac{n}{2}\qquad(3.5)$$

Zatem AIC dla Model(2) wynosi

$$AIC(2)=n(\log 2\pi+\log\hat{\sigma}^2+1)+2\cdot 2\qquad(3.6)$$

Model (1) i Model (2) opisują sytuację, kiedy wartość σ^2 nie jest znana. W tym przypadku należy porównać AIC(1) oraz AIC(2). Jeśli pierwsza z tych wartości jest niższa niż druga, to powinniśmy przyjąć hipotezę H_0. Twierdzimy wtedy, że wartość średnia prawdziwego rozkładu wynosi μ_0. Jeśli wartość AIC(2) jest niższa niż AIC(1), to nie możemy twierdzić, że wartość średnia prawdziwego rozkładu wynosi μ_0.

Rozważmy teraz przypadek, w którym wartość σ^2 jest znana i $\sigma^2=\sigma_0^2$. Chcemy zweryfikować hipotezę H_0: $\mu=\mu_0$ z tym dodatkowym założeniem. Zdefiniujmy model Model(3):

Let $f(x\mid\mu,\sigma^2)$ be the normal density function :

$$f(x\mid\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

Then

$$l(\mu,\sigma^2)=-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2-\frac{n}{2}\log 2\pi-\frac{n}{2}\log\sigma^2=$$

$$=-\frac{n}{2}\log 2\pi-\frac{n}{2}\log\sigma^2-\frac{n}{2\sigma^2}\left\{\left(\mu-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\right\}$$

So, we can write log likelihood function in the following form:

$$l(\mu,\sigma^2)=-\frac{n}{2}\log 2\pi-\frac{n}{2}\log\sigma^2-\frac{n}{2\sigma^2}\left\{\left(\mu-\hat{\mu}\right)^2+\hat{\sigma}^2\right\}\qquad(3.1)$$

Let us consider the first of the above mentioned models

Model (1): $$f(x\mid\mu_0,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{(x-\mu_0)^2}{2\sigma^2}\right\}\qquad(3.2)$$

From the section 2 we know that the maximum likelihood estimator of σ^2 is

$$\hat{\sigma}_1=\hat{\sigma}^2+(\mu_0-\hat{\mu})^2$$

By the equation (3.1) for μ equals μ_0 and σ^2 equals $\hat{\sigma}_1^{\,2}$ we get the maximum log likelihood for the Model(1)

So, using the method described in section 1, the value of AIC for this model is equal

$$AIC(1)=n(\log 2\pi+\log\hat{\sigma}_1^2+1)+2\cdot 1\qquad(3.3)$$

Let us consider the second model.

Model(2): $$f(x\mid\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}\qquad(3.4)$$

The log likelihood function for this model was described in section 2. The maximum likelihood estimators are $\hat{\mu}$ and $\hat{\sigma}^2$. Using (3.1) again we get the maximum log likelihood for this model

$$l(\hat{\mu},\hat{\sigma}^2)=-\frac{n}{2}\log 2\pi-\frac{n}{2}\log\hat{\sigma}^2-\frac{n}{2}\qquad(3.5)$$

So, the AIC for this model equals

$$AIC(2)=n(\log 2\pi+\log\hat{\sigma}^2+1)+2\cdot 2\qquad(3.6)$$

Model (1) and Model (2) describe the situation when the value σ^2 was unknown. In this case, we should compare the values of AIC(1) and AIC(2). When the first is lower than the second, we should take the hypothesis H_0, so we claim that the mean value of the true distribution is equal μ_0. If AIC(2) is lower than AIC(1), we cannot say that the mean value of the true distribution is μ_0.

Let us consider two different models. Suppose that the value σ^2 is known and $\sigma^2=\sigma_0^2$. In this case, we can also verify the hypothesis H_0: $\mu=\mu_0$ but with this extra assumption. Define the model

$$f(x \mid \mu_0, \sigma_0^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right\}$$

gdzie μ_0 oraz σ_0^2 są znanymi wartościami parametrów μ i σ^2. Model ten charakteryzuje sytuację, w której twierdzimy, że wartość średnia prawdziwego rozkładu wynosi μ_0. Podobnie jak poprzednio możemy wyznaczyć logarytm największej wiarygodności ze wzoru (3.1) :

$$l(\mu_0, \sigma_0^2) = -\frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{n}{2}\log\sigma_0^2 - \frac{n}{2\sigma_0^2}\left\{\left(\mu_0 - \hat{\mu}\right)^2 + \hat{\sigma}^2\right\}$$

Zatem

$$AIC(3) = n\left(\log 2\pi + \log\sigma_0^2 + \frac{1}{\sigma_0^2}\left((\mu_0 - \hat{\mu})^2 + \hat{\sigma}^2\right)\right) + 2\cdot 0$$

Rozważmy ostatni z możliwych modeli, w którym zakładamy, że μ przyjmuje inną wartość niż μ_0.Możemy zapisać ten model jako

Model(4): $f(x \mid \mu, \sigma_0^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_0^2}\right\}$.

Ponieważ estymatorem największej wiarygodności parametru μ jest w tym przypadku $\hat{\mu}_1$ oraz $\hat{\mu}_1 = \hat{\mu}$ (z części 2), to

$$l(\hat{\mu}_1, \sigma_0^2) = -\frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{n}{2}\log\sigma_0^2 - \frac{n\hat{\sigma}^2}{2\sigma_0^2}$$

Ponownie obliczamy wartość AIC

$$AIC(4) = n\left(\log 2\pi + \log\sigma_0^2 + \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}\right) + 2\cdot 1$$

Jeśli zatem chcemy sprawdzić hipotezę H_0, to powinniśmy w tym przypadku porównać wartości AIC(3) i AIC(4). Jeśli ostatnia jest większa niż pierwsza to możemy twierdzić, że wartość średnia prawdziwego rozkładu jest równa μ_0. W przeciwnym razie brak jest podstaw do przyjęcia hipotezy H_0.

Rozważając powyższe modele powinniśmy pamiętać o dwóch zasadach. Po pierwsze, liczba estymowanych parametrów nie może być większa niż $2\sqrt{n}$, gdzie n oznacza liczebność próby. Jest to istotne dla pewnych własności estymatora, jakim jest AIC. Poza tym powinniśmy upewnić się czy różnica wartości AIC dla porównywanych modeli nie jest mniejsza niż 1. Jeśli różnica jest zbyt mała, to nie możemy powiedzieć, który z modeli jest lepszy. Może się zdarzyć, że dopasowanie obu modeli do rzeczywistości jest równie złe.

4. Przykład zastosowania Kryterium Informacyjnego Akaike

Niezawodność urządzeń rolniczych stanowi ważne zagadnienie w procesie ich eksploatacji ze względu na koszty spowodowane brakiem ich sprawności w okresach agrotechnicznych. Do kosztów tych zaliczamy koszty napraw oraz koszty w przypadku niedotrzymania terminów agrotechnicznych czy strat plonów. Potrzeba oceny stanu technicznego maszyn rolniczych jest spowodowana koniecznością ich wysokiej dyspozycyjności w trakcie użytkowania. Jednym w kryteriów takiej oceny może być średni czas do pierwszego uszkodzenia, który szacujemy na podstawie danych eksperymentalnych. Przestawione poniżej dane zostały zaczerpnięte z pracy W. Piekarskiego „Analiza Oddziaływania agregatów ciągnikowych na środowisko przyrod-

Model (3): $f(x \mid \mu_0, \sigma_0^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right\}$

where μ_0 and σ_0^2 are well known values of the parameters μ and σ^2. This model characterizes the situation when we claim that the mean value of the true distribution is equal μ_0. We can write the maximum log likelihood as

$$l(\mu_0, \sigma_0^2) = -\frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{n}{2}\log\sigma_0^2 - \frac{n}{2\sigma_0^2}\left\{\left(\mu_0 - \hat{\mu}\right)^2 + \hat{\sigma}^2\right\}$$

Thus

$$AIC(3) = n\left(\log 2\pi + \log\sigma_0^2 + \frac{1}{\sigma_0^2}\left((\mu_0 - \hat{\mu})^2 + \hat{\sigma}^2\right)\right) + 2\cdot 0$$

Consider the last possible model where we assume that μ has any different value than μ_0. We can write

Model(4): $f(x \mid \mu, \sigma_0^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_0^2}\right\}$.

Because the maximum likelihood estimator of μ in this case is $\hat{\mu}_1$ and $\hat{\mu}_1 = \hat{\mu}$ (from the part 2), we obtain

$$l(\hat{\mu}_1, \sigma_0^2) = -\frac{n}{2}\log 2\pi - \frac{n}{2}\log\sigma_0^2 - \frac{n\hat{\sigma}^2}{2\sigma_0^2}$$

As before, we can calculate the value of AIC

$$AIC(4) = n\left(\log 2\pi + \log\sigma_0^2 + \frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}\right) + 2\cdot 1$$

Now, if we want to verify the hypothesis H_0, we should compare the value of AIC(3) and AIC(4). If the former is lower than the latter, we can claim that the mean of true distribution is μ_0. Otherwise we cannot claim that it equals μ_0.

We should remember about two rules when considering the above models. First of all, numbers of the estimated parameters must be lower than $2\sqrt{n}$ because it is important for some properties of AIC. We should also make sure that the difference of AIC for the considered models is not less than 1. Then the difference is too small, we cannot say which of the models is better. The fits of both models are much the same. In such a case, it is possible that neither of the models is good.

4. The example of application of the Akaike Information Criterion

Reliability of agricultural machines constitutes an important issue in their use because of the costs incurred due to their unavailability during agro-technical periods. These costs includes repair costs, fines for not meeting the agro-technical deadlines or crop losses. The necessity of ready availability of agricultural machines during their operation creates the need of technical condition assessment. One of the criterions of such assessment can be the mean operation time until the first failure which is estimated on the basis of experimental data. The data which is presented below was taken from a thesis by W. Piekarski 'An analysis of the environmental impact of farm tractors. Postdoctoral thesis.' [12]. From the study presented in the thesis we choose nicze. Rozprawa habilitacyjna." [12]. Z badań przedstawionych w rozprawie wybieramy badanie ciągników C355 i 360 dotyczące czasu ich pracy do pierwszego uszkodzenia. Próbka obejmuje 30 ciągników znajdujących się w procesie użytkowania. Dane pochodzą z dokumentacji eksploatacyjnej. Zebrano je z kart drogowych (liczba godzin pracy pojazdów) oraz książek pojazdów (przeglądy techniczne, naprawy).

the research on C355 and 360 tractors concerning their time of operation until the first failure. The sample contains 30 tractors in use. The data comes from operation documentation and was collected from log books (the number of hours of work of a vehicle) and vehicle maintenance record books (MOT tests, repairs).

Tab. 1. Zestawienie liczbowe dotyczące czasu pracy ciągników C355-360
Tab. 1. Numerical data concerning the operation time of C355-360 tractors

Kolejny ciągnik Tractor	Czas pracy do pierwszego uszkodzenia Operation time until the first failure (mth)		Kolejny ciągnik Tractor	Czas pracy do pierwszego uszkodzenia Operation time until the first failure (mth)
1	648		16	549
2	473		17	466
3	512		18	491
4	694		19	417
5	421		20	527
6	536		21	593
7	461		22	439
8	414		23	486
9	575		24	521
10	613		25	444
11	523		26	491
12	487		27	583
13	516		28	453
14	676		29	691
15	443		30	533

Na podstawie danych empirycznych chcemy testować hipotezę zerową H_0: $\mu = 525$ przeciwko hipotezie alternatywnej H_1: $\mu \neq 525$. Zakładamy, że czas pracy do pierwszego uszkodzenia ciągników C355-360 ma rozkład normalny z nieznanym parametrem σ^2. Zastosowanie tradycyjnego testu dla średniej wymaga ustalenia a priori poziomu istotności α, czyli prawdopodobieństwa odrzucenia hipotezy prawdziwej. Wartość ta jest w dużej mierze ustalana w sposób subiektywny. Aby uniknąć tych ograniczeń proponujemy zastosowanie Kryterium Informacyjnego Akaike.

Rozważmy Model(1). W modelu tym zakładamy, że wartość średniego czasu pracy do pierwszego uszkodzenia wynosi 525 (mth). Ponieważ wartość parametru σ^2 nie jest znana, to stosujemy estymator tego parametru dany wzorem (2.2). Stąd $\hat{\sigma}_1^2 = 6317{,}93$.

Następnie obliczamy AIC(1) ze wzoru (3.3):

AIC(1)=169,96

Weźmy teraz pod uwagę Model(2). W modelu tym zakładamy, że wartość średniego czasu pracy do pierwszego uszkodzenia jest inna niż 525 (mth). Ponieważ nie znane są wartości obu parametrów rozkładu, to stosujemy estymatory tych parametrów dane wzorem (2.1):

$\hat{\mu} = 522{,}53$ oraz $\hat{\sigma}^2 = 6311{,}85$

Następnie obliczamy wartość AIC(2) ze wzoru (3.6):

AIC(2)=171,95

Porównując wartości AIC(1) i AIC(2) stwierdzamy, że Model(1) lepiej opisuje rzeczywisty rozkład. Zatem brak jest pod-

On the basis of empirical data we would like to test zero hypothesis H0: $\mu = 525$ against the alternative hypothesis H1: $\mu \neq 525$. We assume that the operation time of C355-360 tractors until the first failure has a normal distribution with an unspecified parameter σ^2. The application of a traditional test for a mean requires that the significance level α, that is the probability of rejection the true hypothesis, should be defined a priori. That value is established to a great extent in a subjective manner. In order avoid these limitations, we suggest the application of the Akaike Information Criterion.

Let us consider Model (1). In this model we assume that the value of the mean operation time until the first failure equals 525 (mth). Since the value of the parameter σ^2 is unknown, we use the estimator of that parameter defined by the formula (2.2). Therefore $\hat{\sigma}_1^2 = 6317{,}93$.

Next, we calculate AIC(1) applying the formula (3.3):

AIC(1)=169,96

Let us consider Model (2) now. In this model we assume that the value of the mean operation time until the first failure is different than 525 (mth). Since both values of factorization parameters are unknown, we use the estimators of these parameters defined by the formula (2.1):

$\hat{\mu} = 522{,}53$ and $\hat{\sigma}^2 = 6311{,}85$

Then we calculate the value of AIC(2) applying the formula (3.6):

AIC(2)=171,95

Comparing the values AIC(1) and AIC(2), we conclude that Model(1) describes the normal factorization more accurately. Therefore, there are no grounds for rejection the zero hypothesis staw do odrzucenia hipotezy zerowej i możemy twierdzić, że średni czas pracy do pierwszego uszkodzenia wynosi 525 (mth).

Testy określające średni czas pracy maszyny do pierwszego uszkodzenia umożliwiają ustalenie strategii eksploatacyjnej. Powinna ona być modyfikowana w zależności od ilości godzin przepracowanych przez maszynę. W badaniach eksploatacyjnych interesuje nas zatem czas eksploatacji maszyn, jak i obserwowanych zdarzeń eksploatacyjnych, w tym średni czas do uszkodzenia.

and we can claim that the mean operation time until the first failure equals 525 (mth).

Tests defining the mean operation time until the first failure enable the development of operation strategy. It should be modified depending on the number of hours the machine was used. In operation research we are interested then in the operation time as well as in the observed operation events including the mean operation time until failure.

5. References

1. Akaike H. Information theory and an extension of the maximum likelihood principle, 2nd International Symposium on Information Theory. Eds. Petrov B. N.,Csaki, Akademia Kiado Budapest, 1973, 267-281.
2. Akaike H. A new look at the statistical model identification. IEEE.Trans.Autom.Contr, 1974, AC-19, 716-723.
3. Ash R. B. Information Theory. New York. Dover Publications, 1965.
4. Billingsley P. Ergodic Theory and Information. New York. John Wily & Sons, 1965
5. Cover T. M., Thomas J. A. Elements of Information Theory. New York. John Wily & Sons, 1991.
6. Fujikoshi Y, Satoh K. Modified AIC and C_p in multivariate linear regression. Biometrika 84, 1997, 707-716.
7. Jones G. A., Jones M. J. Information and Coding Theory. Springer, 2000.
8. Johnson O. Information Theory and Central Limit Theorem. Imperial College Press, 2004.
9. Kullback S. Information Theory and Statistics. New York: John Wily & Sons, 1959.
10. Li M., Vitanyi P. An Introduction to Kołmogorov Complexity and Its Applications. Springer, 1997.
11. Mackay D. J. C. Information Theory, Inference and Learning Algorithms. Cambridge University Press, 2003.
12. Piekarski W. Analiza Oddziaływania agregatów ciągnikowych na środowisko przyrodnicze. Rozprawa habilitacyjna. Rozprawy Naukowe Akademii Rolniczej w Lublinie 1997.
13. Rao C.R. Linear statistical inference and its applications. New York: John Wily & Sons, 1965.
14. Sakamoto Y., Ishiguro M., Kitagawa G. Akaike Information Criterion Statistics. Tokyo: D. Reidel Publishing Company, 1986.
15. Zając S., Izdebski W., Kusz D. Dopuszczalne przestoje ciągników z powodu awarii w wybranych okresach agrotechnicznych. Motorol 2007; 9, 193-199.

Dr hab. Andrzej KORNACKI
Katedra Zastosowań Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Przyrodniczy w Lublinie
ul. Akademicka 13, 20-950 Lublin, Polska
e-mail: andrzej.kornacki@up.lublin.pl

Mgr Ewa SOKOŁOWSKA
Katedra Zastosowań Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Przyrodniczy w Lublinie
ul. Akademicka 13, 20-950 Lublin, Polska
e-mail: ewa.magiera@poczta.fm