

Ireneusz MARKIEWICZ

PROJEKTOWANIE METODĄ SADSF I ANALIZY WŁASNOŚCI SPRĘŻYSTYCH I ZMĘCZENIOWYCH PASM ROZCIĄGANYCH Z OTWOREM

APPLICATION OF SADSF METHOD TO DESIGN AND ANALYSES OF ELASTIC AND FATIGUE PROPERTIES OF TENSIONED STRIP WITH HOLE

Praca przedstawia rezultaty projektowania metodą SADSF oraz wyniki liniowych analiz MES i szacowania trwałości zmęczeniowej metodą odkształceń lokalnych pasm rozciąganych z otworem w części centralnej. Podstawowym celem pracy jest potwierdzenie przydatności metody SADSF, która zakłada warunek wyrównanego wyteżenia w stanie granicznym, do projektowania elementów pracujących w zakresie sprężystym i przy obciążeniach zmiennych w czasie. Metoda SADSF bowiem, jako jedna z niewielu, pozwala efektywnie rozwiązywać zadania projektowania nawet bardzo złożonych konstrukcji. Może być tym samym konkurencyjna dla bardzo zaawansowanych metod tzw. optymalizacji topologicznej. Metoda SADSF, w odróżnieniu od nich, nie wymaga stosowania pracochłonnych procedur optymalizacyjnych i może być z łatwością wykorzystana w projektowaniu inżynierskim. Co więcej można ją stosować już w chwili, gdy dane są tylko warunki brzegowe. Z użyciem metody SADSF zbudowano całą serię rozwiązań pasm spełniających założone warunki brzegowe i posiadających otwór w części centralnej. Przeprowadzone analizy potwierdziły dobre własności zaprojektowanych elementów, a otrzymane rozwiązania wskazały takie sposoby ich konstruowania, które dają niskie koncentracje naprężenia i dużą trwałość zmęczeniową.

Słowa kluczowe: projektowanie, nośność graniczna, analizy MES, analizy zmęczeniowe.

The paper presents the results of design, by the SADSF method, of tensioned strips with holes in the central part, and the results of linear FEM analyses. Estimation of fatigue life by local strain method is also presented. The essential aim of the work is to confirm the usefulness of the SADSF method, which assumes the condition of equalized effort in limit state, to designing elements working in elastic range, and subjected to loads variable in time. The SADSF method is one of few methods which make it possible to effectively solve the design problems, also in the cases of very complex structures. Then, it can be competitive to very advanced methods of the so-called topology optimization. The SADSF method, unlike the latter ones, does not require applying laborious optimization procedures, and can be easily used in engineering design. Moreover, it can be applied already at the moment when only boundary conditions are known. Using the SADSF method, we have constructed a whole series of solutions of strips having a hole in the central part, which satisfy the assumed boundary condition. The carried-out analyses have confirmed good qualities of the designed elements, and the obtained solutions have shown how to select such design methods, which give low stress concentration and high fatigue life.

Keywords: design, limit analysis, FEA, fatigue analysis.

1. Wprowadzenie

Zagadnienia projektowania elementów konstrukcji o dobrych własnościach wytrzymałościowych (niskich koncentracjach naprężenia, dużej trwałości zmęczeniowej), a równocześnie lekkich, znajdują się w centrum uwagi inżynierów.

Zwykle wstępny projekt elementu jest dobierany na podstawie doświadczenia i intuicji konstruktora, a następnie poprawiany na podstawie wyników prowadzonych badań numerycznych lub doświadczalnych. W przypadku konstrukcji bardziej odpowiedzialnych mogą być stosowane, bardzo zaawansowane mate-

1. Introduction

The problems of designing structure elements that are light, and, at the same time, have good strength properties (low stress concentration, high fatigue life), have always been in the centre of attention of design engineers.

Usually, a initial project of an element is selected on the basis of experience and intuition of the designer, and consequently improved due to the results of numerical and/or experimental investigations carried out in the design process. In the case of high-performance constructions, one can apply more advanced mathematical and numerical methods, the so-called topology

matycznie i numerycznie, metody tzw. optymalizacji topologicznej ([1,5]), które bazują na kolejnym iteracyjnym poprawianiu.

Do wyznaczania wstępnego projektu konstrukcji może być także stosowana metoda statycznie dopuszczalnych nieciągłych pól naprężeń (ang. SADSF, [2,4,6,14-16,19]). Obecny stan rozwoju tej metody pozwala efektywnie rozwiązywać zadania projektowania nawet bardzo złożonych konstrukcji ([2,4,16,19]). Dotyczy to przede wszystkim, zbudowanych z elementów płaskich, konstrukcji cienkościennych, na projektowanie których metoda jest ukierunkowana ([2,4,19]). Konstrukcje takie są powszechnie stosowane we wszystkich dziedzinach techniki.

Zaletą metody SADSF jest także to, że jest łatwa do zastosowania przez inżyniera. Jego zadanie sprowadza się do wyboru gotowych pól z istniejących bibliotek i połączeniu ich z zachowaniem warunków równowagi. Podczas składania pól inżynier ma możliwość uwzględniania na bieżąco wszystkich narzuconych na konstrukcje ograniczeń. Metodę tę można stosować już w chwili, gdy dane są tylko warunki brzegowe ([2]).

Wymienione zalety powodują, że metoda SADSF może być konkurencyjna nawet dla metod optymalizacji topologicznej. Niestety nie jest ona jeszcze powszechnie obecna w projektowaniu inżynierskim.

Pewne opory być może budzi fakt, że metoda SADSF bazuje na wnioskach wynikających z twierdzenia o dolnej ocenie nośności granicznej. Posługuje się więc m.in. dalekim od rzeczywistości sztywno idealnie plastycznym modelem materiału, rozpatruje jedynie stan graniczny konstrukcji odpowiadający początkowi jej niszczenia oraz posługuje się polami statycznie dopuszczalnymi. Pola takie spełniają równania równowagi wewnątrz, statyczne warunki na brzegu i nie przekraczają nigdzie założonego warunku plastyczności. Nie muszą zaś spełniać równań nierozdzielności i kinematycznych warunków brzegowych. Są więc one zwykle dalekie od rzeczywistych, a w przypadku metody SADSF są to dodatkowo pola nieciągłe. Zakłada się, że linie nieciągłości są odcinkami prostych i rozdzielają jednorodne obszary naprężenia.

Podczas konstrukcji tych pól dąży się do tego, żeby założony warunek plastyczności był spełniony w jak największej liczbie obszarów.

Mimo tych ograniczeń, jak wykazują liczne wyniki dotychczas przeprowadzonych badań numerycznych i doświadczalnych, zaprojektowane metodą SADSF elementy mają dobre własności nośne w całym zakresie przykładowych obciążeń (również sprężystym) i dużą trwałość zmęczeniową ([2-3,6,9,11-12,14-16]). Niestety, nie można wykazać, że tak będzie w każdym przypadku ukształtowanego ustroju ([2]). Dlatego każdorazowo potrzebna jest weryfikacja numeryczna lub doświadczalna otrzymanych rozwiązań. Dysponowanie odpowiednio dużą ilością wyników potwierdzających dobre własności ukształtowanych ustrojów, pozwala uznać je za oczekiwane.

Celem pracy jest przedstawienie możliwości i ocena przydatności metody SADSF w projektowaniu elementów pracujących w zakresie sprężystym (zwykle eksploatacyjnym) i przy obciążeniach zmiennych w czasie.

W pracy położono akcent na zastosowania inżynierskie i rozpatrywano przypadek rozciąganych pasm z otworem (wykrojem) w części centralnej. Elementy tego typu są często spotykane w praktyce projektowej. Otwory powodują lokalne osłabienie, któremu przeciwdziała się poprzez odpowiednie projektowanie. Sprowadza się ono zwykle do zwiększenia grubości lub szerokości pasm w okolicach otworów.

optymalizacji ([1,5]), w której optymalizacja polega na wprowadzaniu poprawek w sposób iteracyjny.

Do wyznaczenia wstępnego projektu konstrukcji może być także stosowana metoda statycznie dopuszczalnych nieciągłych pól naprężeń (ang. SADSF, [2,4,6,14-16,19]). Obecny stan rozwoju tej metody pozwala efektywnie rozwiązywać zadania projektowania nawet bardzo złożonych konstrukcji ([2,4,16,19]). Dotyczy to przede wszystkim, zbudowanych z elementów płaskich, konstrukcji cienkościennych, na projektowanie których metoda jest ukierunkowana ([2,4,19]). Konstrukcje takie są powszechnie stosowane we wszystkich dziedzinach techniki.

Zaletą metody SADSF jest także to, że jest łatwa do zastosowania przez inżyniera. Jego zadanie sprowadza się do wyboru gotowych pól z istniejących bibliotek i połączeniu ich z zachowaniem warunków równowagi. Podczas składania pól inżynier ma możliwość uwzględniania na bieżąco wszystkich narzuconych na konstrukcje ograniczeń. Metodę tę można stosować już w chwili, gdy dane są tylko warunki brzegowe ([2]).

Wymienione zalety powodują, że metoda SADSF może być konkurencyjna nawet dla metod optymalizacji topologicznej. Niestety nie jest ona jeszcze powszechnie obecna w projektowaniu inżynierskim.

Pewne opory być może budzi fakt, że metoda SADSF bazuje na wnioskach wynikających z twierdzenia o dolnej ocenie nośności granicznej. Posługuje się więc m.in. dalekim od rzeczywistości sztywno idealnie plastycznym modelem materiału, rozpatruje jedynie stan graniczny konstrukcji odpowiadający początkowi jej niszczenia oraz posługuje się polami statycznie dopuszczalnymi. Pola takie spełniają równania równowagi wewnątrz, statyczne warunki na brzegu i nie przekraczają nigdzie założonego warunku plastyczności. Nie muszą zaś spełniać równań nierozdzielności i kinematycznych warunków brzegowych. Są więc one zwykle dalekie od rzeczywistych, a w przypadku metody SADSF są to dodatkowo pola nieciągłe. Zakłada się, że linie nieciągłości są odcinkami prostych i rozdzielają jednorodne obszary naprężenia.

Podczas konstrukcji tych pól dąży się do tego, żeby założony warunek plastyczności był spełniony w jak największej liczbie obszarów.

Mimo tych ograniczeń, jak wykazują liczne wyniki dotychczas przeprowadzonych badań numerycznych i doświadczalnych, zaprojektowane metodą SADSF elementy mają dobre własności nośne w całym zakresie przykładowych obciążeń (również sprężystym) i dużą trwałość zmęczeniową ([2-3,6,9,11-12,14-16]). Niestety, nie można wykazać, że tak będzie w każdym przypadku ukształtowanego ustroju ([2]). Dlatego każdorazowo potrzebna jest weryfikacja numeryczna lub doświadczalna otrzymanych rozwiązań. Dysponowanie odpowiednio dużą ilością wyników potwierdzających dobre własności ukształtowanych ustrojów, pozwala uznać je za oczekiwane.

Celem pracy jest przedstawienie możliwości i ocena przydatności metody SADSF w projektowaniu elementów pracujących w zakresie sprężystym (zwykle eksploatacyjnym) i przy obciążeniach zmiennych w czasie.

W pracy położono akcent na zastosowania inżynierskie i rozpatrywano przypadek rozciąganych pasm z otworem (wykrojem) w części centralnej. Elementy tego typu są często spotykane w praktyce projektowej. Otwory powodują lokalne osłabienie, któremu przeciwdziała się poprzez odpowiednie projektowanie. Sprowadza się ono zwykle do zwiększenia grubości lub szerokości pasm w okolicach otworów.

W pracy poszukiwano rozwiązania zadania, w którym danymi były (rys.1): obciążenie graniczne σ_n przyłożone do brzegu S_p , geometria tej części brzegu (wymiary a, b), promień otworu centralnego r (rys.1) oraz granica plastyczności σ_{pl} użytego materiału ([2,3]).

Dodatkowo zakładano, że grubość pasma jest stała i wynosi g , a pole przekroju $A_{\alpha-\alpha}$ w miejscu osłabionym otworem jest równe przekrojowi brzegu S_p . Przyjęto także, że poszukiwane rozwiązania mają dwie osie symetrii.

Rozwiązania konstruowano dla następujących danych: $a=170$, $b=25$, $r=16.6$, $g=1$ [mm], $A_{\alpha-\alpha}=2bg=50$ [mm²], $\sigma_n = \sigma_{pl} = 2k = 300$ [MPa].

Konfiguracja poszukiwanych pól powinna pozwalać na przeniesienie obciążenia z ominięciem otworu. Pola muszą więc mieć w tym miejscu wolne od naprężeń obszary. Istniejące oprogramowanie metody SADSFS ([2,4,9-11,16,19]) pozwala dość łatwo znajdować niekiedy kilka rozwiązań spełniających dane warunki brzegowe. Niejednoznaczność ta ma dodatnie skutki praktyczne – pozwala spośród otrzymanych pól wybierać te, które spełniają dodatkowe kryteria np. wyznaczają kontury o najmniejszych koncentracjach naprężenia i największej trwałości zmęczeniowej czy najmniejszej objętości (ciężarze).

Metoda SADSFS dotychczas rozwijała się właściwie tylko w Polsce. Pierwsze przykłady ukształtowania wzmocnienia wokół otworu okrągłego w rozciąganych pasmach można znaleźć już w, kluczowej dla metody, monografii [14]. Dalsze rozwiązania otrzymane dla pasm oraz innych elementów z otworami, także rozmieszczonymi w wielu rzędach, podano w [2,3,6,9,12,15,19]. Przykłady pasm, konstruowanych z wykorzystaniem metody charakterystyk, znajdują się m.in. w [20].

W pracy posługiwano się jedynie otworami okrągłymi. Czytelnicy zainteresowani doбором takiego kształtu otworu centralnego który daje najmniejsze koncentracje naprężenia lub analizą wpływu dodatkowych otworów umieszczonych wzdłuż kierunku obciążenia, mogą znaleźć informacje na ten temat w [7,17-18].

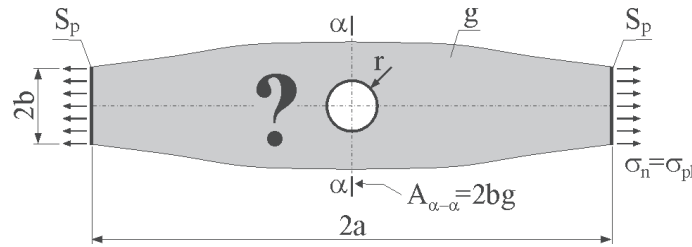
2. Rozwiązania zadania metodą SADSFS

Do konstrukcji rozwiązań zadania przedstawionego na rys.1, wykorzystano opracowany przez W.Bodaszewskiego pakiet SADSFaM1 ([2,4,19]), którego wersja demonstracyjna jest dostępna na poświęconej metodzie stronie internetowej ([19]). Pakiet ten korzysta z warunku plastyczności Treski i pozwala projektować zarówno elementy płaskie jak i nawet bardzo złożone konstrukcje cienkościennie ([2-4,19]).

2a. Rozwiązanie 1

Najprostsze rozwiązanie zadania z rys.1 można otrzymać zestawiając pola 'd1' i 'f90' tak, jak to przedstawiono na rys.2a (z uwagi na symetrię pokazano budowę tylko połówki pola). Rozwiązanie to, dla innych wartości danych, podano w pracach [2,4]. Jest ono także zamieszczone jako przykładowe w wersji demonstracyjnej pakietu SADSFaM1.

In this work, we sought for a solution to the problem, in which the known quantities were (Fig. 1): limit load σ_n applied to the border S_p , geometry of this part of the border (dimensions a and b), radius of the central hole r (Fig. 1), and the yield point σ_{pl} of the used material ([2,3]).



Rys. 1. Poglądowa ilustracja sformułowania zadania kształtowania

Fig. 1. Illustrative sketch of shaping problem formulation

Additionally, we assumed constant thickness of the strip, equal to g , and the area of cross-section $A_{\alpha-\alpha}$ in the place weakened by the hole equal to the cross-section on the border S_p . We also assumed that the sought-after solution would have two axes of symmetry.

The solutions were constructed for the following data: $a=170$, $b=25$, $r=16.6$,

$g=1$ [mm], $A_{\alpha-\alpha}=2bg=50$ [mm²], $\sigma_n = \sigma_{pl} = 2k = 300$ [MPa].

Configuration of the sought-after fields should make it possible that load transmission omits the hole. The fields must then have regions free of stress in this place. The existing software of the SADSFS method ([2,4,9-11,16,19]) allows for finding, sometimes quite easily, several solutions satisfying boundary conditions. This ambiguity has beneficial practical effects; it allows us to select from among the obtained fields such ones which satisfy additional criteria, for example determine contours of lowest stress concentrations and the highest fatigue life, or have the lowest volume (weight).

To date, the SADSFS method has practically been developed only in Poland. The first examples of shaping tensioned strips with strengthening around a round hole can already be found in the monograph [14], which is a key source for the method. Further solutions, found for strips and other elements with holes, also the strips in which the holes are arranged in many rows, are given in [2,3,6,9,12,15,19]. Examples of strips designed with the use of the method of characteristics can be found i.e. in [20].

In this work, only round holes are considered. The reader who is interested in selecting such a shape of the hole that gives lowest possible concentration of stress, or in the analysis of influence of additional holes placed along the direction of load, can find more information on these topics in [7, 17-18].

2. Solution to the problem by SADSFS method

To construct solution to the problem presented in Fig. 1, we used the software package SADSFaM1 developed by W.Bodaszewski ([2,4,19]), whose demonstration version is available on the web page dedicated to the SADSFS method ([19]). The package makes use of the Treska yield condition, and makes it possible to design both plane elements and thin-walled structures, even very complex ones ([2-4, 19]).

2a. Solution 1

The simplest solution to the problem of Fig. 1 can be found by assembling the fields 'd1' and 'f90', as presented in Fig. 2a (due to symmetry of the field, only a half of it is shown). This solution was presented in works [2, 4] for different values of the data. It is also enclosed, as an example, in the demonstration version of the package SADSFaM1.

Analizę należy rozpocząć od doboru parametrów, przylegającego do osi symetrii, pola 'f90'. Z warunków zadania wynika, że połowa szerokość pola musi wynosić: $c = r + b$. Obciążenie σ należy wyznaczyć z równania równowagi globalnej pola:

$$\sigma 2c = \sigma_{pl} 2b \quad (1)$$

Wymiar s należy dobrać tak, żeby w obszar wewnętrzny pola można było wpisać półkę okręgu o danym promieniu r (por. rys.2a).

Tak określone parametry c i σ stanowią dane dla pola 'd1'. Brakujący wymiar t wynika ze spełnienia danych warunków brzegowych na S_p i musi wynosić: $t = a - s$.

Po podstawieniu do wyprowadzonych zależności danych wartości r i b otrzymano: $\sigma=1.2k$, $c=41.6$, $s=60$, $t=110$ [mm], a pole - odpowiadające tym wartościom parametrów - pokazano na rys.2c.

Na koniec warto trochę dokładniej przeanalizować to rozwiązanie. Obciążenie brzegowe σ pola 'f90' może się zmieniać w zakresie $\sigma \in (0.8k, 2k)$. Otrzymany ze wzoru (1) przebieg wartości stosunku r/b w funkcji σ/k pokazano na rys.2b. Jak widać maksymalny promień otworu, jaki można uzyskać, wynosi $r=1.5b$ (dla $\sigma/k=0.8$), a minimalny dąży do zera (gdzie $\sigma/k \rightarrow 2$). Na rys.2b naniesiono punkty A,B,C,D, a odpowiadające im rozwiązania pokazano na rys.2d-g.

Warto zauważyć, że dla $\sigma \in (0.8k, 1.2k)$ otrzymujemy rozwiązania o szerokości c i promieniu otworu r większym od zadanego (por. rozwiązania przedstawione na rys.2d i 2e z rozwiązaniem z rys.2c). W takim przypadku w miejsce jednego, przylegającego do osi symetrii, pola 'f90' dającego większy od zadanego promień, można wprowadzić większą liczbę pól. Takie rozwiązania będą konstruowane w punkcie następnym.

The analysis should begin from selecting the parameters of the field 'f90', adjacent to the symmetry axis. It follows on the problem conditions that a half of the field's width must be equal to $c = r + b$. The load σ can be determined from the equation of global equilibrium of the field:

$$\sigma 2c = \sigma_{pl} 2b \quad (1)$$

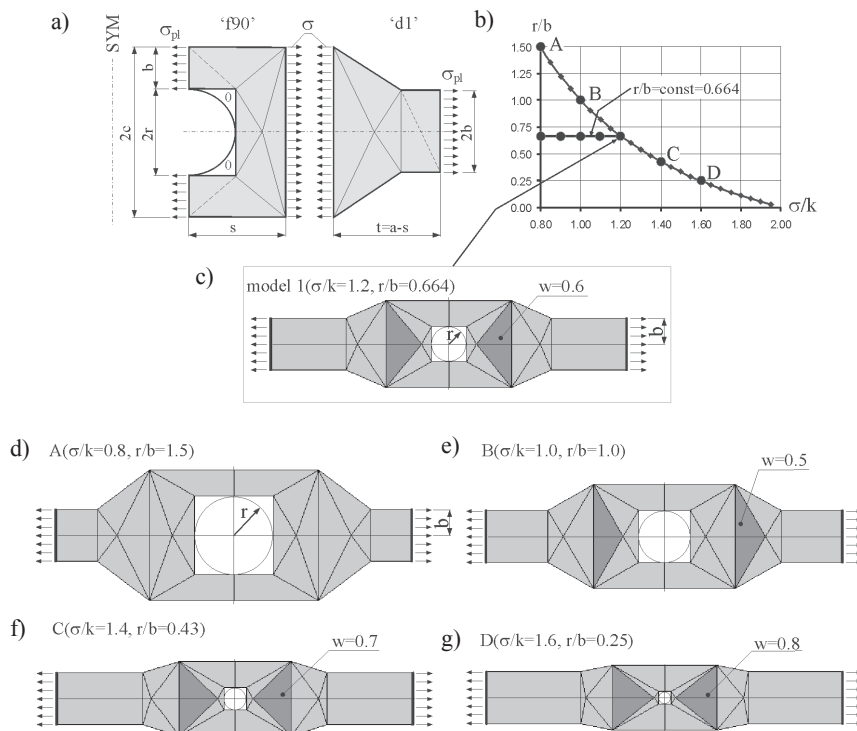
Dimension s should be selected so that a half of the circle of radius r (known from initial conditions) could be inscribed into the inner region of the field (see Fig 2a).

The parameters c and σ , defined in this way, are the data for the field 'd1'. The missing dimension t results from the assumed boundary conditions that must be satisfied on S_p , and it must take the value $t = a - s$.

After substituting the values of r and b into the derived dependencies we obtain: $\sigma=1.2k$, $c=41.6$, $s=60$, $t=110$ [mm], and the field, pertaining to these parameter values, is shown in Fig. 2c.

Finally, it is worth analyzing this solution more thoroughly. The border load σ of field 'f90' can change in the range $\sigma \in (0.8k, 2k)$. The course of the ratio r/b versus σ/k is shown in Fig. 2b. As it can be seen, the maximal radius of the hole possible to obtained equals $r = 1.5b$ (for $\sigma/k = 0.8$), and the minimal one approaches zero (when $\sigma/k \rightarrow 2$). The points A, B, C, D, marked in Fig. 2b, refer to the solutions shown in Figs. 2d-g.

It is worth noticing that for $\sigma \in (0.8k, 1.2k)$ we obtain solutions with the width c and the hole radius r greater than the assumed one (compare the solutions presented in Figs. 2d and 2e with that in Fig. 2c). In such a case, in place of one field 'f90' adjacent to the symmetry axis, which gives radius r greater than assumed, we can introduce a greater number of fields. Construction of such solutions will be described in the next section.



Rys.2. Oddziaływanie pomiędzy polami w symetrycznej połowie pola oraz seria rozwiązań otrzymana dla różnych wartości r/b
 Fig. 2. Interaction between fields in a half of symmetric field, and series of solutions found for different values of r/b

W przedstawionych na rys.2c-g rozwiązaniach obszary, w których nie udało się uzyskać granicznego wyężenia, zaciemniono, a na odnośnikach podano wartość uzyskanego tam wyężenia $w = \sigma_{eq} / \sigma_{pl}$ (σ_{eq} - napężenie zredukowane w sensie Treski).

2b. Rozwiązania 2

Na podstawie rozwiązania 1, w bardzo prosty sposób, można zbudować pola z większą liczbą otworów w przekroju $\alpha-\alpha$. Rozwiązania te skonstruowano podczas poszukiwania nowych pól statycznie dopuszczalnych, które wyznaczałyby kontury elementów o większej trwałości zmęczeniowej. Uzyskane pola charakteryzują się jednak trochę większą objętością.

Sposób konstrukcji tych rozwiązań przedstawiono na rys.3a. Zamiast jednego pola wprowadzono tutaj trzy pola 'f90', przylegające do przekroju $\alpha-\alpha$. Żeby otrzymać otwór centralny o zadanym promieniu, należy poszukiwać rozwiązań w zakresie $\sigma \in (0.8k, 1.2k)$, czyli dla przypadków, które, jak wspomniano w punkcie poprzednim, dawały promienie otworu większe od założonego.

Seria 4 rozwiązań otrzymanych dla $\sigma/k = 0.8, 0.9, 1.0$ i 1.1 , które oznaczono na wykresie z rys.2b nieoznaczonymi punktami, pokazano na rys.3c-f. Podstawowe wymiary tych rozwiązań można odczytać z wykresu zamieszczonego na rys.3b.

Wymiary s' zewnętrznych pól 'f90' są mniejsze od wymiaru s pola centralnego, dlatego w wolne miejsce wprowadzono pola 'Ns'. Pola te realizują stan jednoosiowego rozciągania napężeniami σ , które są mniejsze od granicy plastyczności. Stan graniczny nie jest w nich osiągnięty, więc na rys.3c-f pola te zaciemniono. Podobnie zaciemniono obszary trójkątne pól 'f90', w których wyężenie również jest mniejsze od granicznego.

In Figs. 2c-g, the darkened areas are the regions of the solutions in which the limit effort was not reached; the actually obtained effort values $w = \sigma_{eq} / \sigma_{pl}$ are given in reference marks (σ_{eq} – equivalent stress, in Treska's sense).

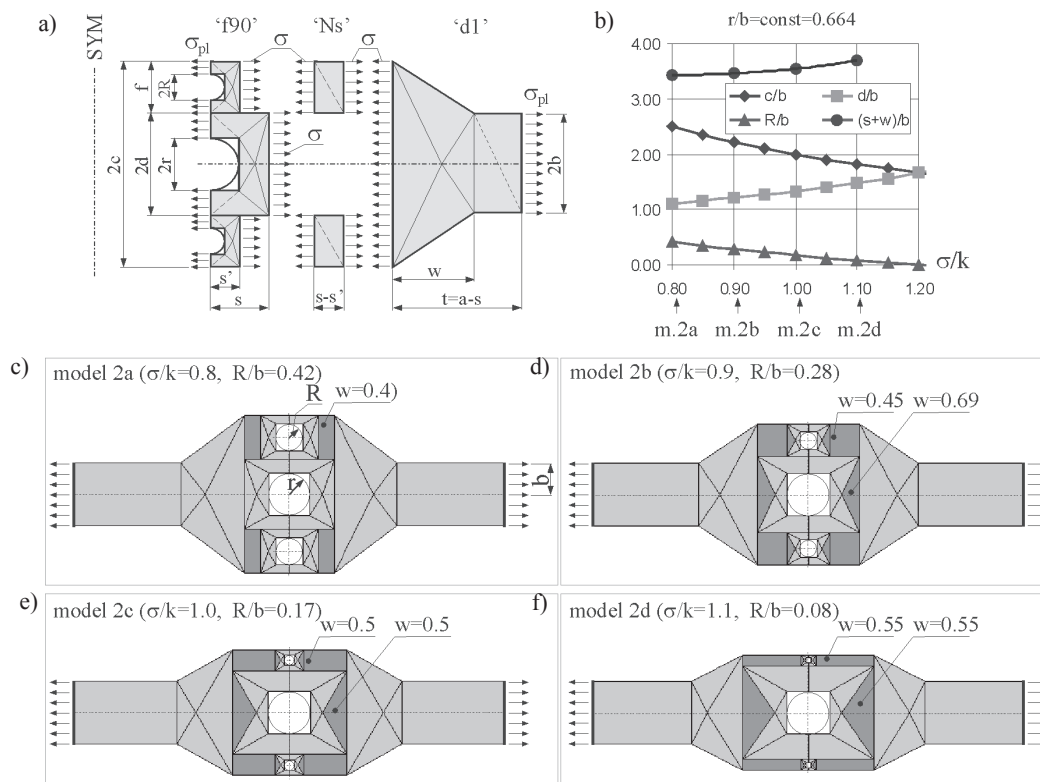
2b. Solutions 2

On the basis of Solution 1, we can, in a very simple way, construct fields with a greater number of holes in the section $\alpha-\alpha$. These solutions have been constructed during the quest for the new statically-admissible fields, which would determine contours of elements of greater fatigue life. The obtained fields are characterized, however, by a slightly greater volume.

The method of constructing such fields is shown in Fig. 3a. Instead of one field, we have introduced here three fields 'f90' adjacent to the section $\alpha-\alpha$. In order to obtain the central hole of assumed radius, we need to look for solutions in the range $\sigma \in (0.8k, 1.2k)$, i.e. for the cases which, as it was previously mentioned, give the hole radii greater than the assumed one.

The series of four solutions, obtained for the values $\sigma/k = 0.8, 0.9, 1.0$ and 1.1 which are marked in the graph of Fig. 2b, are presented in Figs. 3c-f. The basic dimensions of these solutions can be read from the graph in Fig. 3b.

The dimensions s' of outer fields 'f90' are smaller than the dimension s of the central field, so the fields 'Ns' are introduced into the free area. The latter realize the state of uniaxial tension with the stresses σ having values below the yield point. The limit state is not reached in these fields, so that in Figs. 3c-f these fields are darkened. Similarly, the triangular regions of fields 'f90', in which effort is lower than the limit one, are also darkened.



Rys.3. Sposób konstrukcji pola i seria rozwiązań z dodatkowymi otworami w przekroju $\alpha-\alpha$
 Fig. 3. Method of field construction and series of solutions with additional holes in section $\alpha-\alpha$

2c. Rozwiązanie 3

Inny, bardziej złożony ale dający mniejszą objętość, przykład rozwiązania zadania z rys.1 pokazano na rys.4. Rozwiązanie to zostało zaczerpnięte z prac [2,3] oraz z pakietu SADSFaM1, gdzie rozwiązanie podano dla innych wartości danych.

Do konstrukcji tego rozwiązania wykorzystano pole 'A1', którego schemat jest widoczny na rys.4a, oraz pola 'Ns', które są obciążone naprężeniami równymi granicy plastyczności σ_{pl} i pole 'z0', w którym założono graniczne dwuosiowe (izotropowe) rozciąganie. Na rys.4a pokazano symetryczną ćwiartkę rozwiązania.

Przy ustalonym wymiarze b pola 'A1', wymiar r_1 (tożsamy z założonym promieniem otworu r) zależy od kąta α , który jest jednym z parametrów zadawanych pola. Zmieniając wartości kąta $\alpha \in (118^\circ, 180^\circ)$, otrzymujemy różne wymiary $r=r_1$. Przebieg r/b w funkcji α przedstawiono na rys.4b. Poszukiwany stosunek $r/b=0.664$ otrzymuje się dla kąta $\alpha=165^\circ$. Pozostałe wymiary: f , u , t wynikają z warunków łączenia pól i spełnienia danych warunków brzegowych. Otrzymane rozwiązanie przedstawiono na rys.4c.

Z rys.4b wynika, że maksymalny stosunek r/b , jaki można dla tego rozwiązania osiągnąć, wynosi 2.88 (dla $\alpha=118^\circ$), a minimalny promień wynosi 0 (gdy $\alpha \rightarrow 180^\circ$). Rozwiązania odpowiadające punktom A,B,C,D z wykresu pokazano na rys.4d-e.

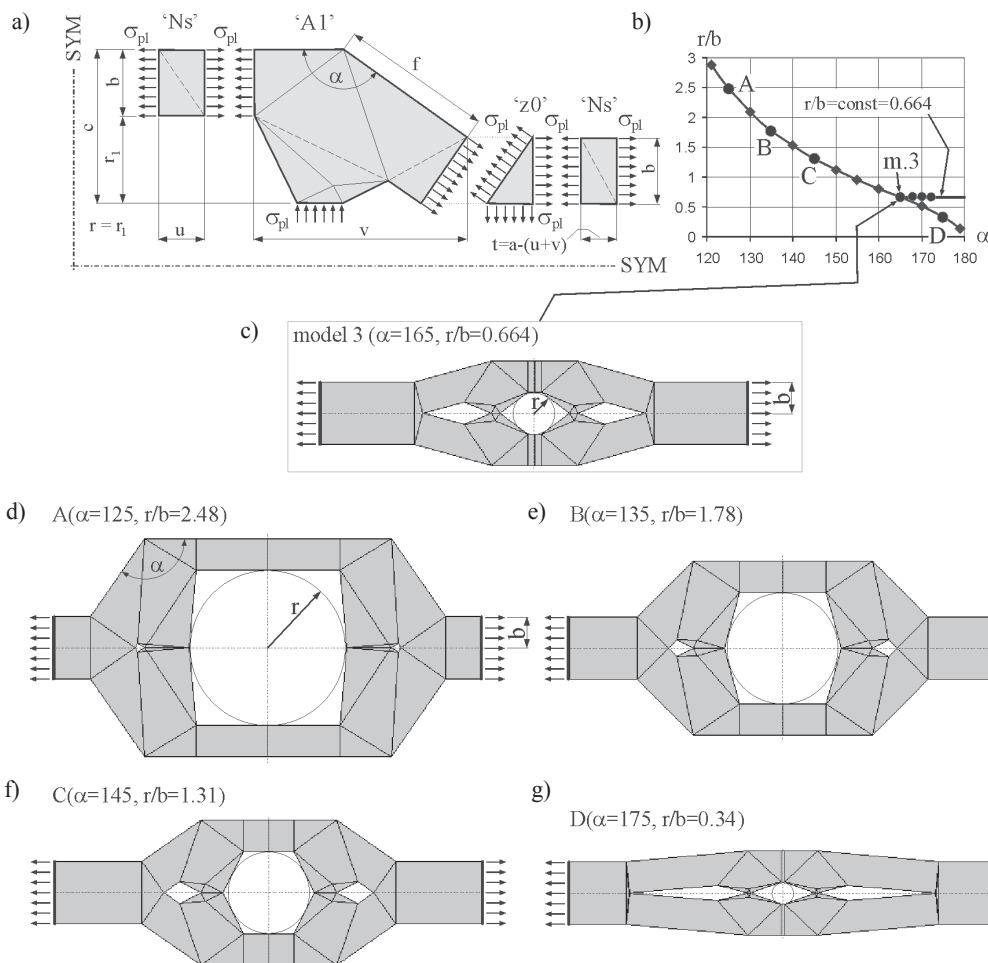
2c. Solution 3

Another example of solution to the problem of Fig. 1, which is more complicated but leads to a lower volume, is presented in Fig. 4. This solution was taken from works [2, 3], it can also be found in the package SADSFaM1, where it is given for different values of the data.

To construct this solution, we used the field 'A1', whose scheme is shown in Fig. 4a, the fields 'Ns' loaded with stresses equal to the yield point σ_{pl} , and the field 'z0', in which we assume biaxial (isotropic) limit tension. Fig. 4a depicts a symmetric quarter of this field.

With settled dimension b of field 'A1', the dimension r_1 (identical with the hole radius r) depends on the angle α , which is one of the assumed parameters of the field. Assuming that the angle values change in the interval $\alpha \in (118^\circ, 180^\circ)$, we obtain different dimensions $r = r_1$. The course of r/b versus angle α is shown in Fig. 4b. The required ratio $r/b = 0.664$ is obtained for the angle $\alpha=165^\circ$. The remaining dimensions: f , u , t result from the conditions of assembling the fields, and from the fulfillment of the assumed boundary conditions. The obtained solution is presented in Fig. 4c.

According to what is presented in Fig. 4b, the maximal ratio r/b which can be reached in this solution equals 2.88 (for $\alpha = 118^\circ$), and the minimal radius is equal to zero (when



Rys.4. Oddziaływanie pomiędzy polami w symetrycznej ćwiartce pola oraz seria rozwiązań otrzymana dla różnych wartości r/b
 Fig. 4. Interactions between fields in a symmetric quarter of field, and series of solutions obtained for different values of r/b

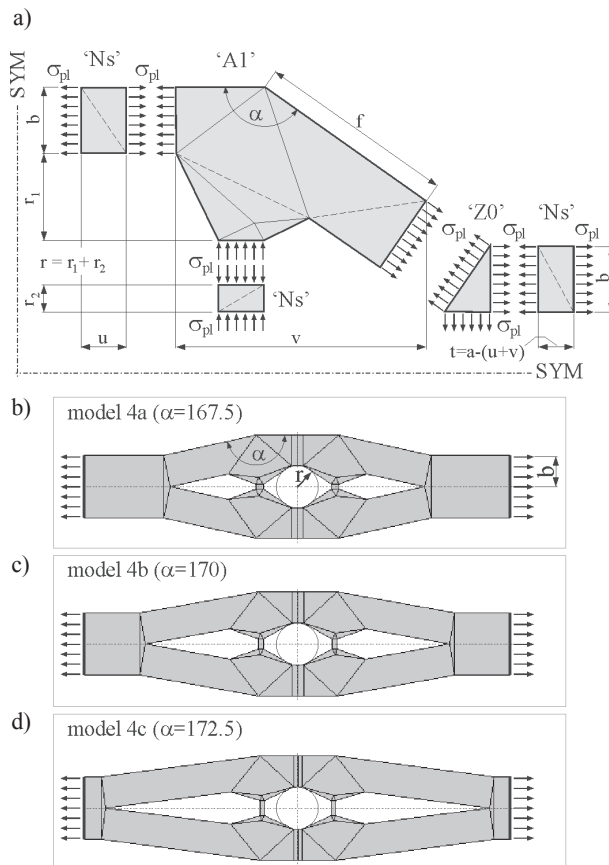
Jak widać we wszystkich przypadkach otrzymano stan graniczny w całej objętości.

W rozwiązaniach tych otrzymano dodatkowe obszary nieobciążone. Podczas analiz MES w obszarach tych będą wpisywane okrągłe otwory stycznie do krawędzi pól.

2d. Rozwiązania 4

Na podstawie pola, wyznaczonego w poprzednim punkcie, skonstruowano rozwiązania, które pokazano na rys.5. Zasadnicza zmiana polega na dodaniu pola 'Ns' o długości r_2 . Dodanie tego pola pozwoliło 'odsunąć' pole 'A1' od osi poziomej i, przy ustalonych b i α , otrzymywać rozwiązania o większym niż poprzednio promieniu: $r=r_1+r_2$. Punkty odpowiadające tym rozwiązaniom leżą powyżej krzywej przestawionej na rys.4b. Dla poszukiwanego stosunku r/b , punkty te będą leżeć na odcinku $r/b=const=0.664$, który naniesiono na wykresie z rys.4b. Jak widać rozwiązanie można skonstruować dla każdej wartości kąta z przedziału $\alpha \in (165^\circ, 180^\circ)$. W pracy ograniczono się tylko do trzech przypadków, które na rys.4b zaznaczono nieoznaczonymi punktami. Odpowiadają one wartościom kąta $\alpha=167.5, 170, 172.5$. Wymiar u należy dobrać tak, aby można było wpisać okrąg o promieniu r w kształt otrzymany w części centralnej. Odpowiednio należy też zwiększyć wymiar f pola 'a1' i ustalić pozostałe parametry. Schematy otrzymanych rozwiązań przedstawiono na rys.5b-d.

Ten typ pola daje najbardziej łagodną zmianę szerokości pasma i dodatkowe otwory na osi obciążenia co, jak pokazano dalej, jest korzystne ze względu na koncentrację naprężeń i wytrzymałość zmęczeniową.



Rys.5. Sposób konstrukcja rozwiązania i seria otrzymanych rozwiązań
 Fig. 5. Method of constructing solutions, and series of obtained solutions

3. Analizy sprężyste MES i szacowanie trwałości zmęczeniowej

Dla wszystkich rozwiązań przedstawionych na rys.2-5, które spełniają dane warunki brzegowe (pola obrysowane prostokątami) oraz dla zwykłej próbki prostokątnej z otworem, przeprowadzono analizy MES (pakiet CosmosM) i wyznaczono m.in. współczynnik koncentracji naprężenia K_t :

$$K_t = \sigma_{max} / \sigma_n \quad (2)$$

gdzie: σ_{max} - max. naprężenie normalne w miejscu największej koncentracji (tu na krawędzi otworu w przekroju $\alpha-\alpha$), σ_n - na-

$\alpha \rightarrow 180^\circ$). The solutions pertaining to the points A, B, C, D, marked in the graph, are shown in Figs. 4d-g. As it can be seen, in all cases we obtain the limit state in the whole volume.

In these solutions, one obtains additional unloaded regions. During the FEM analyses, round holes tangent to the field borders will be inscribed into these regions.

2d. Solutions 4

On the basis of the field described in the previous section, we constructed solutions shown in Fig. 5. The main difference consists in adding the field 'Ns' of length r_2 . Introduction of this field allowed for 'shifting' the field 'A1' away from the horizontal axis, and, with the assumed values of b and α , obtain solutions with a radius greater than in the previous case: $r = r_1 + r_2$. The points referring to these solutions lie above the curve shown in Fig. 4b. For the sought-after ratio r/b , these points will lie on the segment $r/b = const = 0.664$, which is drawn in the graph of Fig. 4b. As one can see, the solution can be constructed for an arbitrary angle value from the interval $\alpha \in (165^\circ, 180^\circ)$. In this work, it was limited to three cases, which in Fig. 4b are marked with points without denotations. These refer to the angle values of $\alpha = 167.5, 170, \text{ and } 172.5$. The dimension should be selected in such a way that a circle of radius r could be inscribed into the shape obtained in the central part. The dimension f of field 'a1' must also be appropriately increased, and other parameters must be settled. The schemes of the obtained solutions are presented in Figs. 5b-d.

This type of field allows for the gentlest change of the strip width, and for introducing additional holes on the load axis, which, as will be shown later, is advantageous with regard to stress concentration and fatigue life.

3. Elastic FEM analyses and estimation of fatigue life

The FEM analyses (using software package CosmosM) were carried out for solutions presented in Figs. 2-5 which satisfy the assumed boundary conditions (the fields outlined with rectangles), and for an ordinary rectangular specimen with a hole. Among other things, the stress concentration factor K_t was determined:

$$K_t = \sigma_{max} / \sigma_n \quad (2)$$

where: σ_{max} – maximal normal stress at the place of greatest concentration (here – on the contour of hole in cross-section $\alpha-\alpha$),

prężenie średnie w przekroju $\alpha-\alpha$ równe naprężeniu nominalnemu przyłożonemu z zewnątrz do pasma (poza przypadkiem zwykłej próbki prostokątnej).

Następnie przeprowadzono szacowania trwałości zmęczeniowej z wykorzystaniem metody odkształceń lokalnych (metoda $\epsilon-N$).

W obliczeniach MES zakładano m.in.: liniowo-sprężysty model fizyczny materiału, małe przemieszczenia, płaski stan naprężenia i elementy typu SHELL3. Rozpatrywano jedynie symetryczną ćwiartkę pasm, a przyjęte warunki brzegowe przedstawiono na rys.6 dla przypadku rozwiązania z rys.2c. Węzłom leżącym na osiach symetrii zadawano odpowiednie warunki brzegowe, a obciążenie naprężeniami $\sigma_n=150$ MPa przykładano równomiernie do krawędzi zewnętrznej. Linie załomu wygładzono krzywymi Beziera na zewnątrz otrzymanych konturów pola, a w nieobciążone obszary wewnętrzne wpisano otwory stycznie do krawędzi.

Każdorazowo zakładano więc dodawanie materiału do kształtów otrzymanych z SADSf. Z wniosków z twierdzenia o dolnej ocenie nośności granicznej wynika, że takie postępowanie nie zmniejsza założonej nośności granicznej - w miejscach, w których dodano materiał, można założyć stan beznaprężeniowy i pole pozostaje statycznie dopuszczalnym.

W okolicach otworów i krzywych Beziera zastosowano zagęszczony podział na elementy skończone.

Szacowanie trwałości zmęczeniowej przeprowadzono z wykorzystaniem programu FALIN ([8,13]). Pozwala on wyznaczać m.in. liczbę cykli N_i potrzebnych do inicjacji pęknięć dla przypadku jednoosiowego stanu naprężenia. Analizy wykonywano dla punktów na krawędziach otworów, w których taki właśnie stan się realizuje, i w których podczas analiz MES stwierdzono największe koncentracje. W tych miejscach spodziewano się, że pęknięcia będą się inicjowały w pierwszej kolejności.

Analizy przeprowadzono zakładając m.in.: materiał pasm stal, która w programie ma oznaczenie A36; a jej własności zmęczeniowe pokazano na rys.7a i 7b; obciążenie naprężeniami nominalnymi σ_n w postaci przedstawionej na rys.7c; wykorzystanie hipotezy Neubera do wyznaczenia odkształceń w analizowanych punktach.

Otrzymane rozkłady naprężeń zredukowanych ze wskazanymi punktami max. koncentracji pokazano na rys.8. Dla modeli z dodatkowymi otworami, w nawiasach, podano wartości max. naprężeń dla przypadku, w którym te otwory zostały usunięte. Na planie każdego rozwiązania podano również wartości: współczynnika K_p , liczby cykli N_i oraz objętości pasma V podanego jako ułamek objętości zwykłej próbki prostokątnej z otworem.

Jak widać większość rozwiązań SADSf ma bardzo zbliżone wartości K_p i N_i do otrzymanych dla zwykłej próbki prostokątnej, ale mniejszą objętość - na przykład model 1 o ok. 20%, model 3 o ok. 38%, a model 4a o ok. 30%.

Najkorzystniejsze własności (najmniejszy K_p , największe N_i) stwierdzono, mimo istnienia dodatkowych otworów w przekroju centralnym, w przypadku modeli serii 2 (rys.8c-e). Trwałość zmęczeniowa tych rozwiązań jest ponad 2-krotnie większa od modelu zwykłej próbki prostokątnej, a ich objętość o 10-20%

σ_n - average stress in cross-section $\alpha-\alpha$, equal to nominal stress applied to the strip from the outside (except of the case of ordinary rectangular specimen).

Next, we carried out estimation of fatigue life utilizing the method of local strain (the $\epsilon-N$ method).

In FEM calculations, one assumed, among other things, linearly-elastic physical model of the material, small displacements, plane state of stress, and the elements type SHELL3. One considered only a quarter of the symmetric strip. The assumed boundary conditions are presented in Fig. 6 for the case of solution from Fig. 2c. Adequate boundary conditions were imposed for the nodes lying on the symmetry axis, and the load stress of $\sigma_n = 150$ MPa was assumed uniformly distributed over the outer border. The broken lines were smoothed by means of Bezier curves outside of the obtained field contours, and holes, internally-tangent to region borders, were inscribed into unloaded inner regions. Then, in each case, one assumed that some material would be added to the shapes determined by the SADSf method. It follows on the lower-bound theorem of limit analysis that in doing so one does not decrease the assumed limit load capacity, and at the places where the material is added one can assume a zero-stress state, so the field remains statically-admissible one.

In the neighbourhood of the holes and the Bezier curves, we applied a denser mesh of finite elements.

Estimation of fatigue life was performed with the use of the FALIN program ([8, 13]).

The program makes it possible to determine, among other things, the number N_i of cycles necessary for crack initiation in uniaxial state of stress. The analyses were carried out for the points on the contours of holes, where such a state of stress was realized, and where the greatest

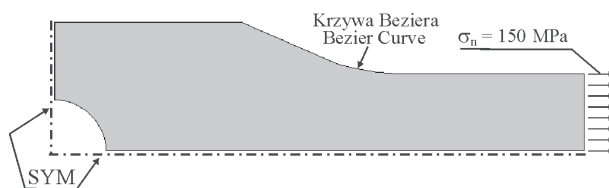
stress concentration was found during FEM analyses. One could expect that in these places the cracks would be initialized first.

The analyses were performed assuming, among other things, that the strip was made of steel, whose grade was denoted in the program as A36, and had fatigue properties of the material as shown in Figs. 7a and 7b. The load, equal to the nominal stress σ_n , had the form shown in Fig. 7c. One used the Neuber rule to determine strains in the analyzed points.

The obtained distributions of equivalent stress are shown in Fig. 8, where marked points denote maximal stress concentration. Their values, written in parentheses, refer to the cases of multi-hole models in which the additional holes were removed. The following data are also given on the plane of each solution: the stress concentration factor K_p , the number of cycles N_p , and the volume of strip V expressed as a fraction of volume of the ordinary rectangular specimen with a hole.

As one can see, the majority of the SADSf solutions give the values of K_p and N_i very close to those obtained for the ordinary specimen with a hole, however, they have lower volume - for example, by approx. 20% in model 1, approx. 38% in model 3, and by approx. 30% in model 4a.

The most advantageous properties (the lowest K_p , the highest N_i) were found, despite the presence of additional holes in the specimen's central cross-section, in the cases of models of the second series (Figs. 8c-e). Fatigue life of these models is over two times greater than that of the ordinary rectangular specimen



Rys. 6. Założone podczas analiz MES warunki brzegowe

Fig. 6. Boundary conditions assumed for FEM analyses

mniejsza. Usunięcie otworów dodatkowych zmienia nieznacznie wartości maksymalnych naprężeń (wartości w nawiasach).

Dla modelu 3 i serii modeli 4 otrzymano najbardziej równomierne rozkłady wyężenia w całej objętości. Stwierdzono też dla nich pozytywny wpływ dodatkowych otworów usytuowanych wzdłuż kierunku obciążenia. Obniżają one znacznie max. koncentrację i mają charakter otworów odciążających. Najlepsze własności otrzymano w przypadku modelu 4c, dla którego max. naprężenia na krawędzi otworu centralnego i dodatkowego są prawie identyczne i tylko niewiele większe od max. naprężeń dla modeli serii 2. Jego objętość jest ponad 30% mniejsza od zwykłej próbki prostokątnej, a trwałość zmęczeniowa prawie dwa razy większa. Model ten ma najbardziej łagodną zmianę szerokości pasma.

Z otrzymanych rezultatów wynika, że najlepsze efekty z punktu widzenia koncentracji naprężenia i wytrzymałości zmęczeniowej daje zwiększenie szerokości pasma wraz z wprowadzeniem dodatkowych otworów w przekroju poprzecznym (modele serii 2). Korzystne jest również wprowadzenie dodatkowych otworów odciążających wzdłuż osi działania obciążenia w połączeniu z jak najbardziej łagodną zmianą szerokości pasma (model 4c).

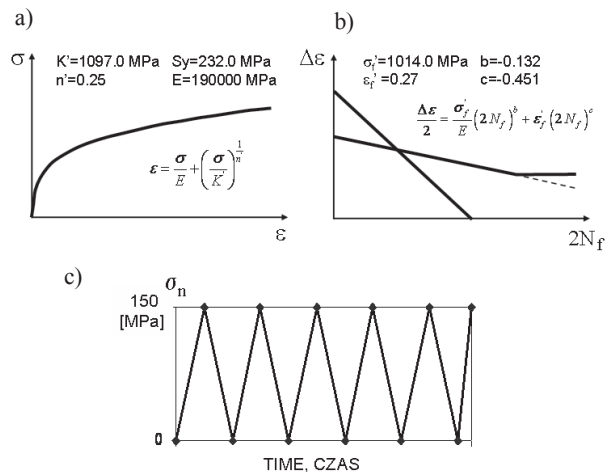
4. Podsumowanie i wnioski

W pracy wykazano, że zaprojektowane SADSf elementy mają dobre własności w zakresie sprężystym, a w szczególności niskie koncentracje naprężeń i w konsekwencji dużą trwałość zmęczeniową. Należy się też spodziewać uzyskania własności, które wynikają z samej metody SADSf, tzn. plastycznego płynięcia dużych obszarów po osiągnięciu obciążenia granicznego [2,3,11].

Metoda SADSf daje więc dobre oszacowanie kształtów pasm. Nie wymaga przy tym stosowania zaawansowanych matematycznie procedur iteracyjnych. Rozwiązania konstruuje się bardzo prosto i można je znajdować już w chwili, gdy dane są jedynie warunki brzegowe. Metoda SADSf pozwala ponadto znajdować całe serie rozwiązań. W pracy skonstruowano ich 9 i to z wykorzystaniem zaledwie kilku pól bibliotecznych, które są dostępne w wersji demonstracyjnej pakietu SADSfAM1. Spośród otrzymanych rozwiązań można wybierać te, które najlepiej spełniają kryteria dodatkowe.

Otrzymane z SADSf rozwiązania wskazują takie sposoby konstruowania pasm, które pozwalają zmniejszyć max. koncentrację i zwiększyć trwałość zmęczeniową.

Z wykorzystaniem podanych w pracy rezultatów łatwo można uzyskać rozwiązania pasm dla innych wartości stosunków r/b .



Rys. 7. Własności zmęczeniowe materiału pasm oraz założony przebieg obciążenia: a) krzywa cyklicznego rozciągania, przybliżona równaniem Ramberga-Osgooda; b) krzywa trwałości, oparta na zależności Mansona-Coffina; c) założony przebieg obciążenia

Fig. 7. The cyclic and fatigue material properties used in the fatigue analyses and the nominal stress history: a) cyclic stress-strain curve approximated by the Ramberg-Osgood expression; b) Coffin-Manson fatigue strain-life curve; c) assumed course of load

with a hole, and the volume is lower by 10-20%. The removal of additional holes only insignificantly changes the values of maximal stress concentration (the values in parentheses).

The most uniform distributions of effort in the whole volume were obtained for model 3 and models of series 4. In these models, we found a positive influence of additional holes located along the load direction on model's properties. These holes decrease significantly maximal stress concentration, so they have a character of stress-lightening holes. The best properties were obtained in the case of model 4c, in which maximal stresses on the contours of the central hole and the additional one were almost identical, and only insignificantly greater than maximal stresses in models of series 2. However, its volume

was over 30% lower than that of the ordinary rectangular specimen, and fatigue life was almost twice greater. In this model, the change of strip's width was the smoothest among all models.

It follows on the presented results that the best effects, from the point of view of stress concentration and fatigue life, can be obtained by increasing the strip's width and, simultaneously, introducing additional holes in the transverse cross-section (models of series 2). Introduction of additional holes along the axis of action of the load is also advantageous, if it is accompanied by a possibly smoothest change of the strip's width (model 4c).

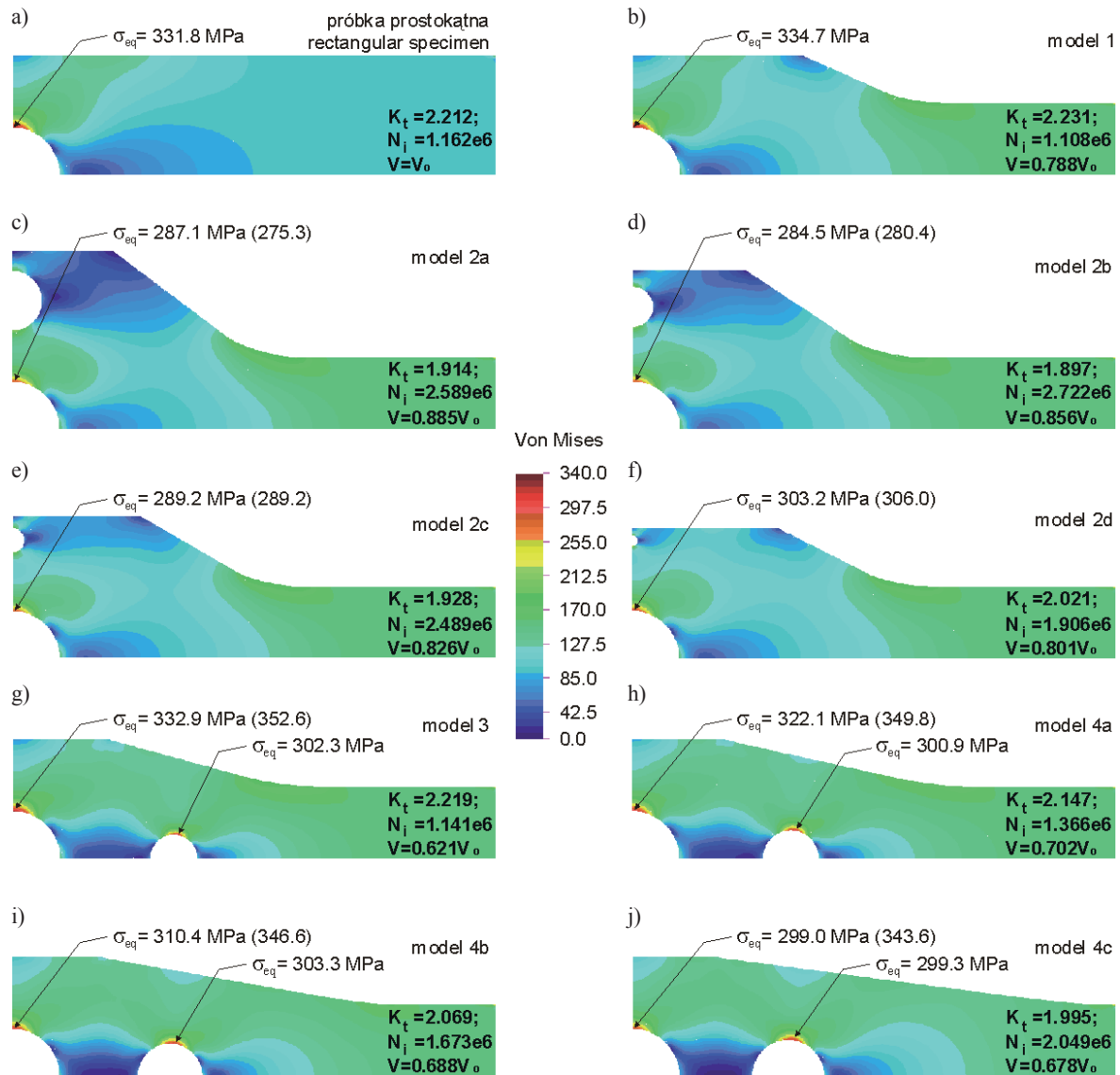
4. Summary and conclusions

In this study, we have shown that the designed elements have good properties in the elastic range, in particular they exhibit low stress concentration, and in consequence have high fatigue life. One can expect obtaining properties resulting from the SADSf method itself, e.g. plastic flow of large areas after reaching the limit load [2,3,11].

Therefore, the SADSf method gives good estimation of shape of the strips. In this task, one does need to apply advanced mathematical iterative procedures. The solutions are constructed in a very simple way, and can be found already at the moment when only boundary conditions are given. Additionally, the SADSf method makes it possible to find whole series of solutions. In this work, we have constructed nine such solutions using only a couple of the library fields, which are available in the demonstration version of the software package SADSfAM1. From among the obtained solutions, one can select only these which satisfy additional criteria in a most optimal way.

Then, the solutions obtained by the SADSf method facilitate designing the strips in the way allowing for decreasing maximal stress concentration and increasing fatigue life.

Using the results presented in this work, one can easily obtain solutions for the strips with different values of the r/b ratio.



Rys. 8. Rozkłady naprężeń zredukowanych w analizowanych modelach oraz wyniki analiz szacowania trwałości zmęczeniowej
 Fig. 8. Equivalent stress distributions in analyzed models, and results of analyses of fatigue life estimation

5. References

1. Bendsoe M P, Sigmund O. Topology Optimization: Theory, Methods, and Applications, Springer, 2003.
2. Bodaszewski W, Szczepiński W. Kształtowanie elementów konstrukcji metodą nieciągłych pól naprężeń. Warszawa: BEL Studio, 2005; PWN, 2006.
3. Bodaszewski W, Rozenau A, Orzechowski T. Dissipation fields of the energy of plastic flow in elements shaped by the SADSf method. XVII Sympozjum Mechaniki Eksperymentalnej Ciała Stałego 1998.
4. Bodaszewski W. Ujęcie aplikacyjne metody SADSf. Konstruowanie pól o wielkim stopniu złożoności. Int. J. Mechanics and Mechanical Engineering 2003; 6.
5. Cea J, Garreau S, Guillaume P, Masmoudi M. The shape and topological optimizations connection. Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 2000; 188: 713-726.
6. Dietrich L, Miastkowski J, Szczepiński W. Nośność graniczna elementów konstrukcji. Warszawa: PWN, 1970.
7. Erickson P E, Riley W F. Minimizing Stress Concentrations Around Circular Holes in Uniaxially Loaded Plates. Experimental Mechanics 1978; 18(3): 97-100.
8. Glinka G, Jakubczak H. Fatigue Software Package FALIN, Stress and Fatigue-Fracture Design Inc. (SaFFD, Inc.).
9. Gomoliński P. Komputerowo wspomaganie projektowanie elementów konstrukcji z wykorzystaniem kryterium nośności granicznej. Warszawa: Politechnika Warszawska 1995, rozprawa doktorska.

10. Markiewicz I. Numeryczne wyznaczanie statycznie dopuszczalnych układów linii nieciągłości naprężeń w polach granicznych, spełniających warunek plastyczności Hubera-Misesa. Warszawa: Politechnika Warszawska 1996, rozprawa doktorska.
11. Markiewicz I, Bodaszewski W, Glinka G. Global and Local Design Method for Fatigue Resistant Structures. SAE Transactions, Journal of Materials and Manufacturing 2003; 5(112): 467-477.
12. Markiewicz I. Analysis of Hole Arrangement in Tensile Plate by Means of The SADSf Method and Fatigue Life Predictions. Eksploatacja i Niezawodność - Maintenance and Reliability 2009; 3(43): 24-31.
13. Sobczykiewicz W, Glinka G, Jakubczak H. Fatigue Design of Earthmoving Machines. International Symposium on Fatigue Design 1992.
14. Szczepiński W. Projektowanie elementów maszyn metodą nośności granicznej. Warszawa: PWN, 1968.
15. Szczepiński W, Szlagowski J. Plastic Design of Complex Shape Structures. Warszawa-Chichester: Ellis Horwood & PWN, 1990.
16. Szlagowski J. Metodyka kształtowania wytrzymałościowego elementów konstrukcji wg kryterium nośności granicznej. Warszawa: Prace IPPT PAN 1990; 25.
17. Tran D, Nguyen V. Optimal hole profile in a finite plate under uniaxial stress by finite element simulation of Durelli's photoelastic stress minimization method. Finite Elements in Analysis and Design 1999; 32: 1-20.
18. Wilczyński B. Shape optimisation for stress reduction around single and interacting notches based on the fictitious stress method. Engineering Analysis with Boundary Elements 1997; 19: 117-128.
19. Witryna internetowa www.sadsf.net.
20. Zowczak W. Projektowanie wytrzymałościowe metodą linii poślizgu. Kielce: Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej, 2004.

Dr inż. Ireneusz MARKIEWICZ
Katedra Mechaniki
Politechnika Świętokrzyska
Al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7
25-314 Kielce, Polska
e-mail: zwmim@tu.kielce.pl
