

ANALIZA ROZMIESZCZENIA OTWORÓW W ROZCIĄGANEJ TARCZY Z WYKORZYSTANIEM METODY SADSF ORAZ SZACOWANIE TRWAŁOŚCI ZMĘCZENIOWEJ

ANALYSIS OF HOLE ARRANGEMENT IN TENSILE PLATE BY MEANS OF THE SADSF METHOD AND FATIGUE LIFE PREDICTIONS

Praca przedstawia wyniki analiz sprężystych MES i szacowania trwałości zmęczeniowej rozciąganej tarczy prostokątnej osłabionej otworami. Odległości pomiędzy otworami wyznaczono metodą SADSF. Rozważono dwa przypadki, gdy otwory są rozłożone w rzędzie prostopadle do kierunku działania obciążenia oraz wzdłuż tego kierunku. Podczas analiz stwierdzono, że najlepsze minimalne odległości pomiędzy otworami - w przypadku gdy otwory są rozłożone w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku działania obciążenia - leżą bardzo blisko wartości otrzymanych przy pomocy metody SADSF. Zmniejszając rozstawy poniżej wymiarów wyznaczonych tą metodą obserwuje się bardzo szybki wzrost współczynnika koncentracji naprężenia i spadek trwałości zmęczeniowej. W drugim przypadku tak wyraźnego efektu nie stwierdzono. W miarę zmniejszania się rozstawu otworów, współczynnik koncentracji stale maleje, a trwałość zmęczeniowa rośnie.

Słowa kluczowe: projektowanie, nośność graniczna, analizy MES, analizy zmęczeniowe.

The paper presents the results of elastic FE analyses and estimations of fatigue life of a tensile rectangular plate weakened by the presence of holes. The distances between the holes were determined by means of the SADSF method. Two cases were considered: when the holes are arranged in a row perpendicularly to the direction of load, and parallel to this direction. In the case of holes lying in a plane perpendicular to the load direction, the analyses have shown that the best minimal distances between the holes are very close to those obtained by using the SADSF method. When the hole spacing is decreased below the dimensions determined by this method, one observes a rapid growth of stress concentration factor and a drop of fatigue life. In the second case, however, one does not observe such strong effects. As the hole spacing decreases, stress concentration factor continuously drops down, and fatigue life increases.

Keywords: design, limit analysis, FEA, fatigue analysis.

1. Wprowadzenie

Otwory powodują lokalne osłabienie elementów konstrukcji, wprowadzają koncentracje naprężenia i deformacji, mogą powodować powstawanie pęknięć zmęczeniowych. Na przykład pęknięcia pochodzące od otworów stanowią znaczącą część pęknięć spotykanych w konstrukcjach lotniczych.

W pracy, do poszukiwania najlepszego rozmieszczenia otworów, zastosowano metodę statycznie dopuszczalnych nieciągłych pól naprężeń (ang. SADSF, [1,4,17-19]). Metoda ta jest bardzo efektywną, a równocześnie łatwą do zastosowania przez inżyniera. W ramach istniejącego oprogramowania aplikacyjnego metody SADSF [1,2,9,19], jego zadanie sprowadza się do połączenia - z zachowaniem warunków równowagi - gotowych rozwiązań szczególnych. Rozwiązania te są dane w postaci bibliotek [1,2,9,19], a projektant musi wykazać się pomysłowością przy ich składaniu. W chwili obecnej można z pomocą metody SADSF projektować nawet konstrukcje o bardzo dużym stopniu złożoności [1-3]. Niestety metoda ta jest jeszcze mało upowszechniona wśród inżynierów.

Pewne obawy być może budzi fakt, że metoda ta bazuje na wnioskach z twierdzenia o dolnej ocenie nośności granicznej. Posługuje się więc między innymi dalekim od rzeczywistości sztywno idealnie plastycznym modelem materiału czy rozpatruje jedynie stan graniczny konstrukcji odpowiadający początkowi jej niszczenia. Wyniki dotychczas przeprowadzonych analiz numerycznych i badań doświadczalnych pokazują jednak, że obawy te są nieuzasadnione. Ukształtowane z wykorzystaniem SADSF elementy mają dobre własności nośne

1. Introduction

Holes in structure elements cause local weakening of the structure, introduce concentrations of stress and strain, and this may lead to fatigue cracks. For example, the cracks originating from the holes constitute a significant portion of cracks encountered in aviation constructions.

In this work, in the quest for the best arrangement of holes, we applied the method of statically admissible discontinuous stress fields, the SADSF method [1,4,17-19]. This is a very effective method, at the same time very easy to use by a design engineer. Owing to the existing application software of the SADSF method ([1,2,9,19]), the task of designing is reduced to connecting ready-made particular solutions, at the same time satisfying the equilibrium conditions. These solutions are given in a form of libraries ([1,2,9,19]), and the designer must show his invention in connecting them. Presently, one can design even structures of very high degree of complexity using the SADSF method ([1-3]). Unfortunately, the method is not yet well popularized among engineers.

One might have some concerns due to the fact that the method is based on the conclusions from the lower-bound theorem of limit analysis. Then, it makes use i.e. of a rigid ideally-plastic model of the material, and considers only the limit state of the structure associated with the beginning of its destruction. However, the results of already performed numerical analyses and experimental investigations have shown that these fears are unjustified. The elements shaped by means of the SADSF method have good load-carrying properties also in the elastic range, and have

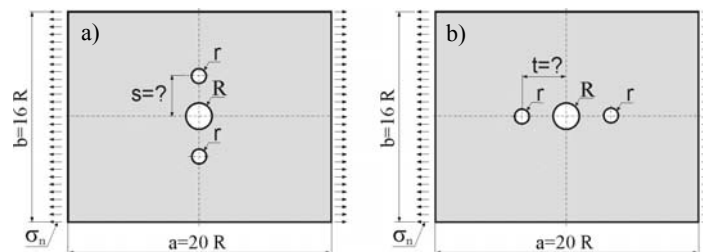
również w zakresie sprężystym i dużą trwałość zmęczeniową [1,4-5,8,10-12,17-19]. Niestety, nie można wykazać, że tak będzie w każdym przypadku ukształtowanego ustroju [1,2]. Dlatego każdorazowo potrzebna jest weryfikacja numeryczna lub doświadczalna otrzymanych rozwiązań.

W pracy przedstawiono fragment wyników prowadzonych w ostatnim czasie na dużą skalę badań mających na celu poznanie rzeczywistych własności ukształtowanych SADSFS elementów konstrukcji [10-12]. Celem tych badań jest weryfikacja praktycznej przydatności metody. Dysponowanie odpowiednio dużą ilością wyników potwierdzających dobre własności ukształtowanych ustrojów, pozwoli uznać je za oczekiwane.

W pracy rozpatrywano dwa szczególne przypadki ułożenia otworów w prostokątnej rozciąganej tarczy, które przedstawiono na rys.1. W obydwu przypadkach założono, że otwory są rozłożone w jednym rzędzie symetrycznie do osi tarczy. W przypadku pierwszym, w kierunku prostopadłym do działającego obciążenia (rys.1a), a w przypadku drugim, w kierunku zgodnym z tym obciążeniem (rys.1b). Szczególnie niekorzystny jest przypadek pierwszy, gdy otwory są wykonane w jednym rzędzie, prostopadle do kierunku działania obciążenia i w niewielkiej od siebie odległości.

Na podstawie skonstruowanych statycznie dopuszczalnych nieciągłych pól naprężeń ustalono proste zależności pomiędzy odległościami s i t , a założonymi promieniami otworów R i r . Otrzymane zależności skonfrontowano z wynikami liniowych analiz MES oraz szacowania trwałości zmęczeniowej z wykorzystaniem metody naprężeń lokalnych (ϵ -N).

Informacje na temat analiz różnych przypadków rozstawienia otworów, także w wielu rzędach oraz przypadki gdy otwory są dodatkowo obciążone - na przykład przez umieszczone w nich sworznie - można znaleźć między innymi w pracach [4-6,13-15,17-18].



Rys. 1. Sformułowanie zadania poszukiwania rozmieszczenia otworów w przekroju poprzecznym i podłużnym rozciąganej tarczy
Fig.1. Problem formulation in the quest for hole arrangement in transverse and longitudinal cross-section of tensile plate

2. Sformułowanie i rozwiązanie zadania metodą SADSFS

Sposób formułowania zadania poszukiwania rozmieszczenia otworów w przekroju poprzecznym i podłużnym rozciąganej tarczy pokazano na rys.1a i 1b.

Założono, że tarcza ma ustalone wymiary zewnętrzne proporcjonalne do promienia otworu centralnego R i jest obciążona na dwóch krawędziach stałymi naprężeniami rozciągającymi σ_n , o nieznannej na początku wartości. Wymiary tarczy dobrano tak aby krawędzie zewnętrzne nie wpływały na rozkłady naprężeń w okolicach otworów.

Poszukiwano statycznie dopuszczalnych pól naprężenia, które posiadają wolne od naprężeń obszary w miejscach planowanych otworów, i które pozwolą określić w jakich minimalnych odległościach s i t powinno się te otwory wykonać. Założono, że otwory zewnętrzne mają jednakowe promienie r .

high fatigue life ([1,4-5,8,10-12,17-19]). Unfortunately, it is impossible to prove it universally, for an arbitrary structure shaped by this method [1,2]. For this reason, in each case one needs to verify numerically or experimentally the obtained solutions.

In this work, the author presents a fragment of results of his large-scale research, carried out recently, aimed at recognizing actual properties of structure elements shaped by means of the SADSFS method ([10-12]). The purpose of these investigation has been verification of practical usefulness of the method. When one has at his disposal a sufficiently high amount of results confirming good properties of the designed structures, one can consider such properties as the expected ones.

In this work, we take into consideration two particular cases of hole arrangement in a rectangular, tensile plate, shown in Fig. 1. In both cases, it was assumed that the holes are arranged in one row symmetrically with respect to the plate axis. In the first case, the row of holes is perpendicular to the direction of load action (Fig. 1a), in the second case – its direction is consistent with that of the load (Fig. 1b). The first case, when the holes are placed in one row perpendicular to the direction of load action, and are at small distances from one another, is particularly disadvantageous.

On the basis of statically-constructed admissible discontinuous stress fields one determined simple relationships between the distances s and t , and the assumed radii of the holes, r and R . The obtained relationships were verified in the elastic range by means of FEM analyses, and by estimating fatigue life based on the local strain method (ϵ -N).

Information about analyses of other cases of hole arrangements, also multi-row arrangements, and the cases when the holes are additionally loaded – for example by bolts placed inside them – can be found i.e. in works [4-6,13-15,17-18].

2. Problem formulation and solution by SADSFS method

The method of problem formulation in the quest for hole arrangement in transverse and longitudinal cross-section of a tensile plate is shown in Figs.1a and 1b.

It was assumed that the outer dimensions of the plate were defined proportionally to the radius of the central hole R , and the plate is loaded on two borders by constant tensile stresses σ_n , whose value is initially unknown. The dimensions of the plate were selected so that the outer borders did not affect the stress distribution in the vicinity of holes.

One seeks for the statically admissible discontinuous stress fields, which have stress-free areas at the places planned for the holes, and will allow determining at what minimal distances, s and t , these holes should be made. It was assumed that the outer holes have equal radii r .

Dodatkowo założono posługiwanie się polami granicznymi w okolicach otworów i niegranicznymi w pozostałej części pola. Konstrukcja pól granicznych w całej objętości tarczy byłaby możliwa ale wymagałaby na przykład zwiększenia grubości czy szerokości tarczy w okolicach otworów. Mogłyby też pojawić się dodatkowe wolne od naprężeń obszary gdzie należałoby wprowadzić otwory dodatkowe (por. np. rys.4).

Do konstrukcji pól w okolicach otworów bardzo dobrze nadaje się pole biblioteczne 'F90', którego schemat pokazano na rys.2a [1,9]. Pole to spełnia w każdym obszarze warunek plastyczności Hubera-Misesa. Prawie wszystkie wymiary tego pola są proporcjonalne do jednego parametru (wymiaru) W . Jedynie wymiar Y można zadawać dowolnie, jednak z geometrii pola wynika, że musi być spełniony warunek: $Y \geq 1.322W$. Możliwa jest również zmiana obciążenia zewnętrznego pola p_1 . Zmiana taka powodowałaby jednak, że albo pole przestawałoby być granicznym albo następowalaby zmiana kątów brzegów obciążonych naprężeniami p_2 równymi granicy plastyczności σ_{pl} . Pola takie nie nadawałyby się do konstrukcji pól w okolicach otworów.

Połączenie dwóch pól F90, dla których założono $Y=2.322W$, pozwala wyznaczać kształt z kwadratowym otworem wewnętrznym (rys.2b). Dobierając inny wymiar Y otrzymalibyśmy obszar prostokątny, a w ostateczności – dla Y bliskiego $1.322R$ – mogła to być nawet szczelina. Przyjęto, że będzie to kwadrat bo można w niego wpisać otwór kołowy o promieniu W . Nie mniej w otrzymany kwadrat można wpisywać otwory o właściwie dowolnym kształcie.

W obszarach przylegających do krawędzi otworu, oznaczonych na rys.2b jako 0, założono dodanie materiału i stan beznaprężeniowy. Zabieg taki powoduje, że pole pozostaje statycznie dopuszczalnym, a jak wynika z wniosków o dolnej ocenie nośności granicznej dodanie materiału nie zmniejsza założonej nośności granicznej rozważanego elementu konstrukcji.

Wymiar W pola złożonego z rys.2b można zadawać dowolnie. Proporcjonalnie zmieniać (dostosowywać) się będą pozostałe jego wymiary. Żeby skonstruować poszukiwane statycznie dopuszczalne pole naprężenia należy, tak jak to pokazano na rys.3, połączyć jedno pole z rys.2b otrzymane przy założe-

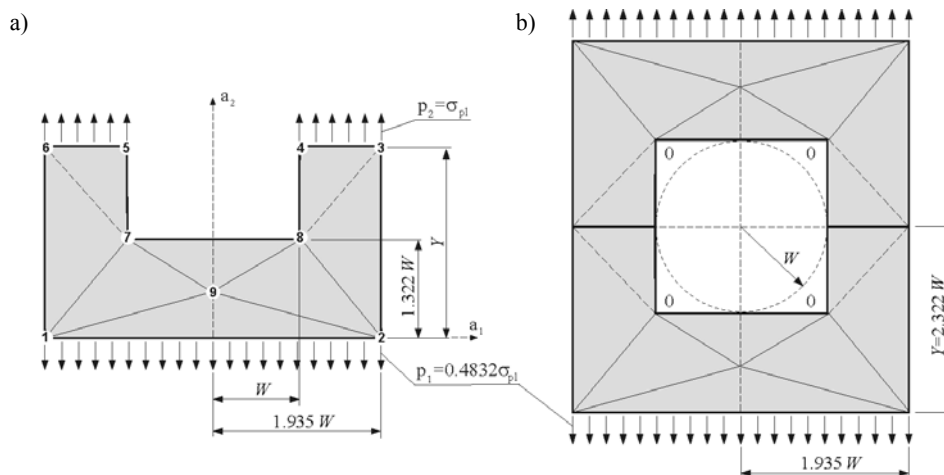
Additionally, one assumes the use of limit fields in the vicinity of holes, and non-limit ones in the remaining part of the field. The construction of limit fields in the whole volume of the plate would be possible, but would require, for example, increasing the thickness or the width of the plate in the vicinity of holes. There could also appear additional stress-free areas, where one should made additional holes (see i.e. Fig. 4).

For constructing the fields in the vicinity of holes one can use, very conveniently, the library field 'F90', whose scheme is shown in Fig. 2a ([1,9]). This field satisfies, in each area, the Huber-Mises yield condition. Almost all parameters of this field are proportional to just one parameter (dimension) W . Only the dimension Y can be assumed arbitrarily, however, from geometry of the field it follows that the condition $Y \geq 1.322W$ must be satisfied. It is also possible to introduce a change into the external load p_1 . However, such a change would cause that the field would no longer be the limit one, or there would cause a change in the angles of borders loaded with the stresses p_2 equal to the yield stress σ_{pl} . Such fields, however, would not be suitable for construction of the fields in the vicinity of holes.

Combination of two 'F90' fields, for which one assumes $Y = 2.322W$, allows us to determine the shape with a square internal hole (Fig. 2b). By selecting another dimension Y we would obtain a rectangular area, and eventually – for Y approaching $1.322R$ – this could even be a slot. It was assumed that this area should be a square, because one can inscribe into it a circular hole of radius W . In fact, it is possible to inscribe holes of practically any shape into the obtained square.

In the areas adjacent to the borders of the hole, which in Fig.2b are denoted as 0, one assumes the volume of material was increased, and a stress-free state exists there. Due to these assumptions, the field remains statically admissible, and according to the conclusions following on the lower-bound theorem, the increase in volume of the material does not decrease the assumed limit load capacity of the considered structure element.

The dimension W of the complex field in Fig.2b can be assumed arbitrarily. The remaining dimensions of the field will change (adapt) automatically. In order to construct the sought-after statically admissible stress field, one should join one field of Fig. 2b obtained under the assumption that $W=R$ (the field



Rys. 2. Pole typu 'F90' oraz złożenie dwóch pól tego typu, które pozwala otrzymać kształt z kwadratowym otworem wewnętrznym [1]

Fig. 2. Field type 'F90' (a), and combination of two fields of this type (b), which makes it possible to obtain a shape with square internal hole [1]

niu $W=R$ (pole oznaczone indeksem 1), z czterema polami dla których $W=r$ (pola 2,3,4,5).

Obciążenia zewnętrzne łączonych pól są jednakowe i wynoszą $p_1=0.4832\sigma_{pl}$, więc warunki równości wzajemnych oddziaływań na krawędziach łączenia pola 1 z polami 2 i 3 są spełnione. Z kolei pole 1 z polami 4 i 5 przylegają do siebie brzegami nieobciążonymi. Żeby spełnić warunki równowagi na pozostałych krawędziach założono w pozostałej części pola jednoosiowy stan naprężenia i $\sigma=p_1$. Z tak skonstruowanego pola wynika, że nieznanne na początku, obciążenie zewnętrzne jest równe: $\sigma_n=\sigma=0.4832\sigma_{pl}$. Zaś poszukiwane odległości pomiędzy otworami wynoszą:

$$s_{SADSF} = 1.9347 (R+r) \quad (1)$$

gdy otwory są rozłożone w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku działania obciążenia,

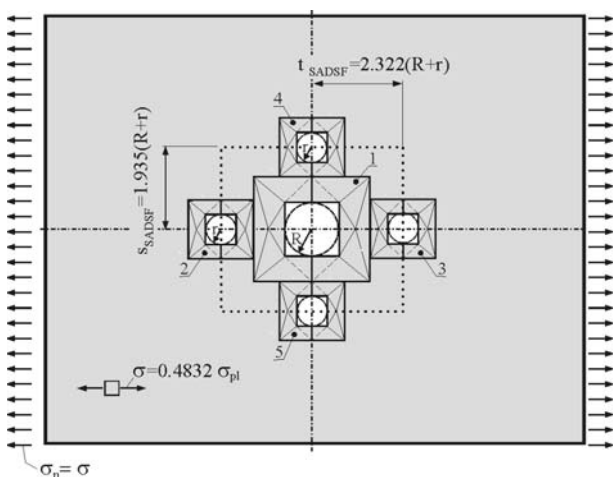
$$t_{SADSF} = 2.322 (R+r) \quad (2)$$

gdy otwory są rozłożone w przekroju w kierunku działania obciążenia.

Z rozwiązania przedstawionego na rys.3 wynika dodatkowo, że środki otworów zewnętrznych (o promieniach r) powinny być położone wzdłuż linii, które zaznaczono linią przerywaną. Pola złożone z 2 i 3 można bowiem przesuwac w kierunku pionowym, a pola 4 i 5 w kierunku poziomym, a pole pozostałe statycznie dopuszczalnym. Należy uważać jedynie żeby pola na siebie nie zachodziły.

W przedstawiony powyżej sposób można analizować właściwie dowolne konfiguracje ułożenia otworów w rozciąganej tarczy. Pola te można bowiem nie tylko przesuwac ale w obszar jednoosiowego rozciągania można wpisywać dodatkowe pola złożone z rys.2b. Odległości pomiędzy sąsiednimi otworami w poziomie można wyznaczać z wzoru (1), a w pionie z wzoru (2). Wzory te są więc dość uniwersalne. Przykład pola z większą ilością otworów pokazano na rys.4.

Na rys.3 zestawiono zarówno otwory leżące w rzędzie prostopadle do kierunku działania obciążenia jak i wzdłuż tego kierunku. W dalszych analizach będziemy rozważali jednak każdy z przypadków ułożenia otworów osobno.



Rys. 3. Pole statycznie dopuszczalne, które pozwala wyznaczyć minimalne odległości pomiędzy otworami

Fig. 3. Statically admissible field allowing for determining minimal distances between holes

denoted with index 1) with four fields in which $W=r$ (fields 2, 3, 4 and 5) – as it is shown in Fig. 3.

The external loads of the joined fields are the same, all equal to $p_1 = 0.4832\sigma_{pl}$, so that the conditions of equality of mutual interactions on the borders between field 1 and fields 2 and 3 are satisfied. On the other hand, field 1 adjoins fields 4 and 5 on unloaded borders. In order to satisfy equilibrium conditions on the remaining borders, one assumed a uniaxial state of stress in the remaining part of the field, and $\sigma=p_1$. According to such a construction of the field, one can conclude that the external load, which has not been initially known, is equal to $\sigma_n=\sigma=0.4832\sigma_{pl}$. On the other hand, the sought-after distances between the holes are:

$$s_{SADSF} = 1.9347 (R+r) \quad (1)$$

when the holes are arranged in the plane perpendicular to the load direction, and

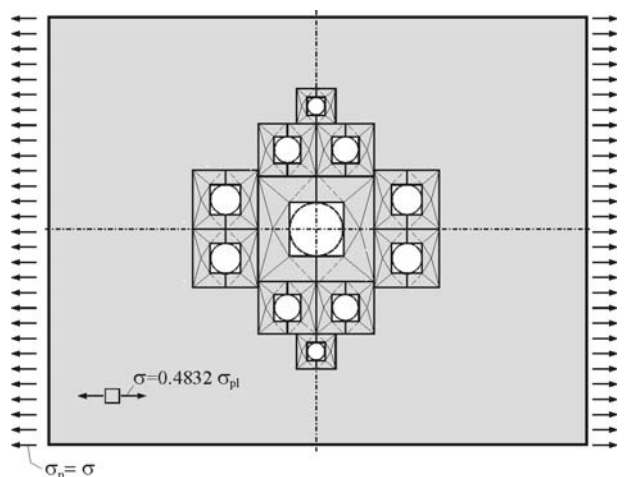
$$t_{SADSF} = 2.322 (R+r) \quad (2)$$

when the holes are arranged parallel to the direction of load.

It also follows on the solution presented in Fig.3 that the centres of the outer holes (of radii r) should be distributed along the lines marked with broken lines. This is because the complex fields 2 and 3 can be shifted in vertical direction, and fields 4 and 5 in horizontal direction, and the field will remain a statically admissible one. One must ensure, however, that the fields do not overlap.

In a way similar to that presented above, one can analyse practically any configuration of hole arrangement in the tensional plate. Such a possibility exists because one can not only shift these fields, but also inscribe additional complex fields, like those of Fig 2b, into the area of uniaxial tension. The vertical distances between individual holes can be determined from formula (1), and the horizontal ones – from formula (2). These formulae are then rather universal. An example of field with a greater number of holes is shown in Fig. 4.

In Fig.3, one juxtaposed both the holes lying in a row perpendicular to the direction of load, and the ones in rows parallel to this direction. In further analyses, however, we will consider each of these cases separately.



Rys. 4. Przykład pola statycznie dopuszczalnego z większą ilością otworów

Fig. 4. Example of statically admissible field with a greater number of holes

3. Liniowe analizy MES

Przy pomocy MES i pakietu CosmosM badana była zależność pomiędzy współczynnikiem koncentracji K_t :

$$K_t = \sigma_{max} / \sigma_n \quad (3)$$

gdzie: σ_{max} - maksymalne naprężenie normalne w miejscu koncentracji (tu na konturze), σ_n - naprężenie nominalne (umowne) przyłożone z zewnątrz do tarczy,

a podziałkami otworów, osobno s i t , przy ustalonych wymiarach pozostałych oraz obciążeniu. Przypadek z rys. 1a rozpatrywano dla trzech wariantów ilorazów $r/R=0.25, 0.5, 1$, a przypadek z rys. 1b dla wariantów $r/R=0.5, 1, 1.5$.

W obliczeniach zakładano m.in.: liniowo-sprężysty model fizyczny materiału, małe przemieszczenia, płaski stan naprężenia i elementy typu SHELL3. Rozpatrywano jedynie symetryczną połowę tarczy.

Przykładowy podział na elementy skończone, założone warunki brzegowe i otrzymane rozkłady naprężeń zredukowanych w sensie Hubera-Misesa dla wariantu z rys. 1a i przy wymiarach: $r = R, s = s_{SADSF}$ przedstawiono na rys. 5.

Węzłem leżącym na osi x zadano warunki brzegowe wynikające z symetrii analizowanej tarczy względem tej osi, a węzłem leżącym na osi y ustalono przemieszczenia w kierunku x . Założono równomierne obciążenie krawędzi zewnętrznej naprężeniami $\sigma_n = 100$ MPa. W okolicach otworów zastosowano zagęszczony podział na elementy skończone.

Jak widać, w prezentowanym przypadku, największe naprężenia występują na krawędzi otworu zewnętrznego i wynoszą $\sigma_{eq} = 328.6$ MPa. Są one w przybliżeniu równe maksymalnemu naprężeniu normalnemu w miejscu koncentracji. Współczynnik koncentracji dla tego przypadku wynosi więc: $K_t = 328.6/100 = 3.3$ i jest niewiele większy od współczynnika dla przypadku z jednym tylko otworem centralnym, dla którego $K_t = 3$. Warto zauważyć, że naprężenia zredukowane w pozostałych punktach koncentracji są bardzo zbliżone do max. i wynoszą: 317.8 i 323.6 MPa.

Wyznaczone, w przedstawiony powyżej sposób, przebiegi współczynnika koncentracji naprężenia K_t w funkcji s/R dla wszystkich trzech wariantów r/R przedstawiono na rys. 6a. W zależności od wartości zastosowanej podziałki s maksymalne naprężenia występowały albo na krawędzi otworu środkowego, albo na krawędziach otworów bocznych, czyli w punktach które wyróżniono na rys. 5.

We wszystkich przypadkach widoczne jest, że gdy s zbliża się do wartości wyznaczonych z SADSF (punkty wyróżnione kółkami), to krzywe się ustalają, co oznacza, że dalsze powiększanie podziałki rozstawienia otworów s nie spowoduje zmniejszenia współczynnika koncentracji K_t . Zmniejszając podziałkę poniżej wymiarów wyznaczonych

3. Linear FEM analyses

Using the FEM and the software package CosmosM, we examined the relationship between the stress concentration factor K_t :

$$K_t = \sigma_{max} / \sigma_n \quad (3)$$

where: σ_{max} – maximal stress at concentration place (here: on the hole contour), σ_n – nominal (reference) stress applied to the plate from outside,

and the hole pitch, separately for s and t , with the remaining dimensions and load fixed. The case of Fig. 1a was analysed for three variants of quotients $r/R = 0.25, 0.5$ and 1 , and the case of Fig. 1b for the variants $r/R = 0.25, 0.5$ and 1.5 .

In the calculations, we assumed, among other things, linear-elastic physical model of the material, low strain, plane state of stress, and elements type SHELL3. One considered only a symmetrical half of the plate.

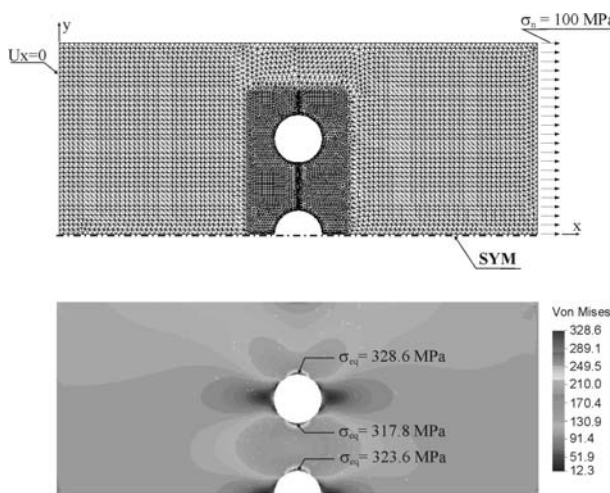
Fig. 5 presents an example division of the plate into the finite elements, the assumed boundary conditions, and the obtained distributions of equivalent stress (in the Huber-Misses sense) for the variant of Fig. 1a and the dimensions $r = R$, and $s = s_{SADSF}$.

For the nodes lying on the x axis, one assumed boundary conditions resulting from the symmetry of the analysed plate with respect to this axis. One also assumed that the nodes lying on the y axis have fixed displacements in the direction of the x axis. An uniformly-distributed load $\sigma_n = 100$ MPa was assumed on the external borders. In the vicinity of the holes, one applied a denser mesh of finite elements.

As it can be seen in the presented case, the greatest stresses appear on the border of the outer hole, and these are equal to $\sigma_{eq} = 328.6$ MPa. They are approximately equal to the maximum normal stress at the concentration point. The stress concentration factor for this place is then equal to $K_t = 328.6/100 \approx 3.3$ and is not much greater than that obtained in the case of plate with only one central hole, for which $K_t = 3$. It is worth noticing that the equivalent stresses in the remaining concentration points are very close to the maximal ones, and are equal to 317.8 MPa and 323.6 MPa, respectively.

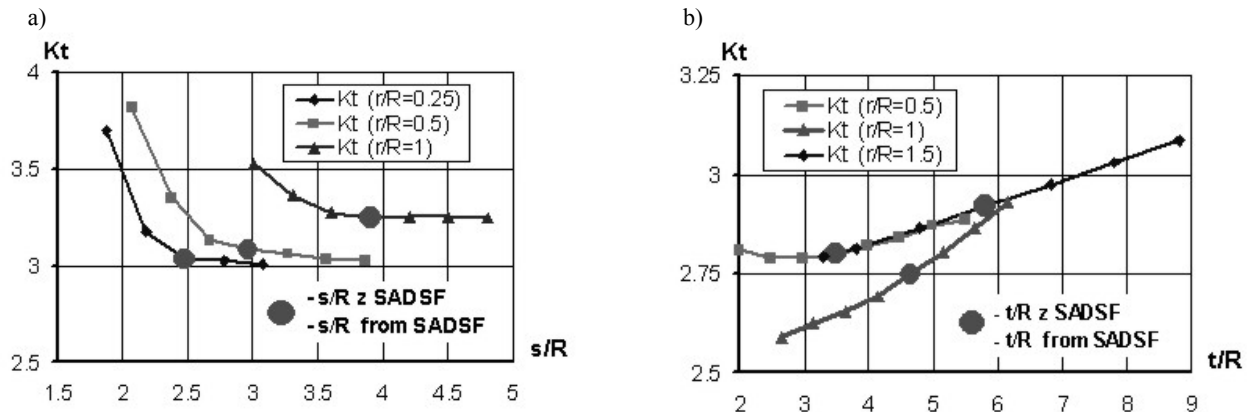
The functions of stress concentration factor K_t versus s/R , determined in the above-presented way for all three variants of the r/R ratio, are depicted in Fig. 6a. Depending on the assumed pitch value s , maximal stresses appear either on the edge of the central hole, or on the edges of the lateral holes, in other words at the highlighted points in Fig. 5.

It is noticeable in all these cases that, when s approaches the value determined by the SADSF method (points shown as circles in Fig. 6), the function courses stabilize, which means that further increase of the hole spacing pitch would not cause any significant decrease of stress concentration factor K_t . However, when the pitch is decreased below the value obtained



Rys. 5. Założony podział na elementy skończone i warunki brzegowe oraz wyniki analiz MES

Fig. 5. Assumed division of plate into finite elements and results of FEM analysis



Rys. 6. Przebieg współczynnika koncentracji naprężenia K_t otrzymany dla różnych s/R oraz t/R

Fig. 6. Courses of stress concentration factor K_t versus s/R and t/R variables

metodą SADS F obserwuje się szybki wzrost współczynnika koncentracji K_t .

Wyniki otrzymane dla przypadku gdy otwory są rozłożone w kierunku zgodnym z kierunkiem działania obciążenia pokazano na rys.6b. To ustawienie otworów jest o wiele korzystniejsze od poprzedniego. Otrzymano tu wyraźnie mniejsze wartości współczynnika K_t - w zakresie $t/R < 7$ wartość współczynnika koncentracji K_t jest mniejsza od 3, a więc od wartości współczynnika dla przypadku z jednym tylko otworem centralnym. Wprowadzenie takich otworów jest więc korzystne z punktu widzenia max. koncentracji, a otwory te można traktować jako odciążające.

Dla wszystkich przypadków r/R , wraz ze zmniejszaniem się rozstawu otworów t/R , współczynnik K_t stale maleje. Jedyne dla $r/R=0.5$ w okolicach $t=t_{SADS F}$ krzywa się ustala i dalsze zmniejszanie podziałki powoduje najpierw niewielkie zmniejszenie K_t , a nawet bardzo niewielki jego wzrost.

Warto zauważyć, że krzywe otrzymane dla $r/R=0.5$ i 1.5 są położone bardzo blisko siebie. Oznacza to, że niezależnie czy w danej odległości t/R wykonamy otwór o promieniu mniejszym czy większym od centralnego to otrzymamy taki sam współczynnik koncentracji K_t . Najkorzystniejszym jest przypadek gdy wszystkie otwory mają takie same promienie R . Wtedy współczynnik koncentracji jest wyraźnie mniejszy niż przy innych stosunkach r/R . We wszystkich przypadkach max. koncentracje występowały na krawędziach otworów zewnętrznych.

4. Szacowanie trwałości zmęczeniowej

Otrzymane z MES wyniki posłużyły do analiz szacowania okresu inicjacji pęknięć zmęczeniowych. Analizy te wykonano z wykorzystaniem metody odkształceń lokalnych (metoda ϵ -N) i z wykorzystaniem programu FALIN [7,16]. Program ten pozwala wyznaczać m.in. liczbę powtórzeń tzw. bloku obciążeń N_{br} potrzebnych do inicjacji pęknięć dla przypadku jednoosiowego stanu naprężenia.

Szacowanie okresu inicjacji przeprowadzono w punktach na konturze swobodnym gdzie podczas obliczeń MES stwierdzono maksymalne koncentracje. W tych miejscach spodziewano się, że pęknięcia będą się inicjowały w pierwszej kolejności.

Analizy przeprowadzono zakładając m.in.:

by using the SADS F method, one observes a rapid increase of stress concentration factor K_t .

The functions shown in Fig.6b pertain to the case, when the holes are arranged in the direction consistent with that of the load. This arrangement is more advantageous than the previous one. One obtains significantly lower values of the factor K_t - in the range up to $t/R < 7$ the value of stress concentration factor K_t is lower than 3, so that it is lower than its value for the plate with only one central hole. Introducing such holes might then have advantageous effect as far as stress concentration is concerned, and the holes can be treated as the relieving ones.

In general, the stress concentration factor K_t monotonously decreases with the decrease of the hole spacing pitch t/R for all cases of r/R . Only when $r/R = 0.5$, in the vicinity of $t = t_{SADS F}$ the course of the function stabilizes, and further decrease of the pitch initially causes slight decrease of K_t , and then very small increase of its value.

It is worth noticing that the graphs obtained for $r/R = 0.5$ and $r/R = 1.5$ lie very close to each other. It means that we obtain practically the same stress concentration factor K_t irrespective of the diameter of the hole placed at a given distance t/R - no matter if this diameter is lower or greater than that of the central hole. The most advantageous case is when all the three holes have equal radii $R=r$. The stress concentration factor is, in such a case, meaningfully lower than for other values of r/R ratio. In all the cases, maximal concentrations of stresses appear at the edges of the outer holes.

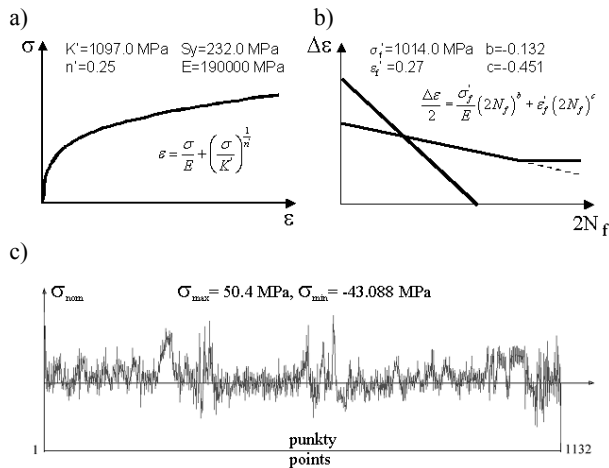
4. Estimation of fatigue life

The results obtained by FEM calculations were used for analysing the estimated fatigue-crack initiation life. These estimations were made using the local strain method (the ϵ -N method) with application of the FALIN software ([7,16]). The program makes it possible to determine, among other things, the number N_{br} of repetitions of the so-called block of loads necessary for crack initiation in the case of uniaxial state of stress.

Primarily, estimation of the crack initiation life was carried out at the points lying on the free contour, where the highest stress concentrations were found in the course of the FEM calculations. We expected that at these points the cracks should appear first.

The analyses were carried out under the assumptions that:

- materiał tarczy stal, która w programie ma oznaczenie A36; a jej własności zmęczeniowe pokazano na rys.7a i 7b;
- obciążenie naprężeniami nominalnymi σ_{nom} w postaci powtarzającego się bloku, którego przebieg przedstawiono na rys.7c; zawiera on 1132 punkty, a maksymalne i minimalne naprężenia wynoszą odpowiednio: 67.2 [MPa] i -57.45 [MPa];
- wykorzystanie hipotezy Neubera do wyznaczenia odkształceń w analizowanych punktach.



Rys. 7. a) krzywa cyklicznego rozciągania, przybliżona równaniem Ramberga-Osgooda; b) krzywa trwałości, oparta na zależności Mansona-Coffina; c) założony przebieg jednego bloku obciążenia

Fig. 7. a) Cyclic stress-strain curve approximated by the Ramberg-Osgood expression; b) Coffin-Manson fatigue strain-life curve; c) assumed course of one block of loads

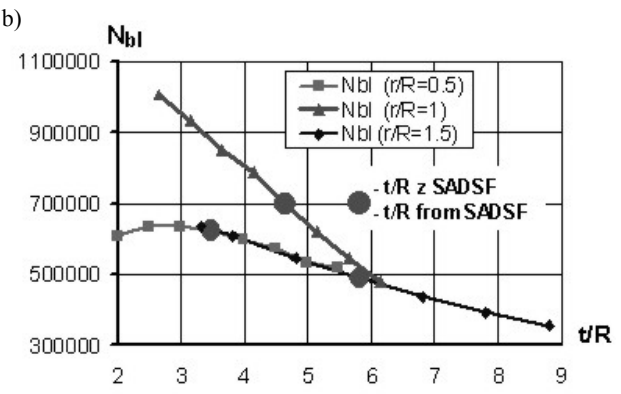
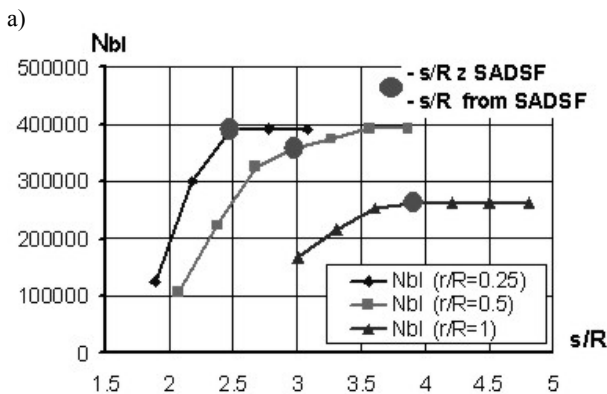
Dla każdego z przypadków policzonych MES oszacowano liczbę powtórzeń bloku obciążeń N_{bl} z rys.7c, która powoduje inicjację pęknięć zmęczeniowych. Otrzymane dla obu przypadków rozmieszczenia otworów wyniki przedstawiono na rys.8.

Załamania wykresów na rys.8a, wyznaczające najlepszą minimalną odległość s/R , leżą w każdym przypadku bardzo blisko wartości otrzymanej przy pomocy metody SADSF. Zmniejszając rozstawy poniżej wymiarów wyznaczonych metodą SADSF obserwuje się bardzo szybki spadek trwałości zmęczeniowej.

Z kolei, na rys.8b widać, że wraz ze zmniejszaniem odległości pomiędzy otworami t/R następuje wzrost trwałości zmęczeniowej. Krzywe otrzymane dla $r/R=0.5$ i 1.5 są położone bardzo blisko siebie, zaś najkorzystniejszy – mający największą trwałość zmęczeniową – jest przypadek gdy otwory mają takie same promienie ($r/R=1$).

5. Podsumowanie i wnioski

Otrzymane rezultaty analiz potwierdziły, że elementy konstrukcji zaprojektowane prawidłowo z punktu widzenia nośności granicznej mają dobre własności w zakresie sprężystym,



Rys. 8. Szacowana liczba powtórzeń bloku potrzebna do inicjacji pęknięć zmęczeniowych dla przypadków przedstawionych na rys. 1a i 1b
Fig.8. Estimated number of repetitions of block of loads necessary for fatigue crack initiation for the cases presented in Figs. 1a and 1b

- the plate material is steel, in the program denoted as A-356, whose fatigue properties are shown in Figs.7a and 7b;
- the plate is loaded by a nominal stress σ_n having the form of a repeating block, whose course is shown in Fig. 7c; it contains 1132 points, and maximal and minimal stress values are 67.2 [MPa] and -57.45 [MPa], respectively;
- the Neuber hypothesis is used for determining strains in the analysed points.

In each of the cases of FEM calculations, one estimated the number of repetitions, N_{bl} , of the block of loads as in Fig. 7c, which causes initiation of fatigue cracks. The obtained results are presented in Fig. 8 for both cases of hole arrangement.

The corner points in graphs of Fig 8a, which define the best minimal distance s/R , lie in all cases very close to the values obtained by means of the SADSF method. If these distances become lower than the dimensions determined by the SADSF method, one observes very fast drop of fatigue life.

In turn, Fig.8b shows that an increase of fatigue life appears as the distances between the holes t/R decrease. The curves calculated for $r/R = 0.5$ and $r/R = 1.5$ lie very close to one another, and the most advantageous – showing the greatest fatigue life – is the case when all the holes have equal radii, $r = R$.

5. Conclusions

The obtained results of analyses confirm that the elements of structures, which are designed well as far as the limit load capacity is concerned, also have good properties in the elastic

a w szczególności niskie koncentracje deformacji i w konsekwencji dużą trwałość zmęczeniową.

Metoda SADSF pozwala, w bardzo prosty sposób, znajdować rozwiązania gdy dane są jedynie warunki brzegowe. W pracy, z wykorzystaniem zaledwie jednego pola bibliotecznego, udało się skonstruować proste zależności, które mogą być wykorzystywane w praktyce. Możliwości istniejącego oprogramowania aplikacyjnego metody są jednak o wiele większe. Najbardziej zaawansowany obecnie pakiet SADSFaM [1,2] pozwala projektować nie tylko konstrukcje płaskie ale nawet bardzo złożone konstrukcje cienkościennie [1-3]. Konstrukcje te - jak wykazały prowadzone m.in. przez autora analizy MES i badania doświadczalne - mają bardzo dobre własności wytrzymałościowe [10-12]. Takie własności ukształtowanych konstrukcji powtarzają się w całej literaturze [1,4-5,8,17-19].

range, in particular they exhibit low strain concentrations, and in consequence have high fatigue life.

The SADSF method makes it possible to find the solutions when only boundary conditions are given, and the way of doing that is very simple. In this work, by using only one library field, we were able to construct simple relationships, which may have practical usability. However, the possibilities of the existing application software of the method are much wider. Presently, the most advanced software package SADSFaM ([1,2]) allows for designing not only two-dimensional structures, but also very complex thin-walled structures ([1-3]). These structures – as it has been shown through FEM analyses carried out by the author ([10-12]) and other researchers – have very good strength properties. Advantageous properties of the mentioned structures are also reported in many literature sources ([1,4-5,8,17-19]).

6. References

1. Bodaszewski W., Szczepiński W. Kształtowanie elementów konstrukcji metodą nieciągłych pól naprężeń. Warszawa: BEL Studio, 2005; PWN, 2006.
2. Bodaszewski W. Ujęcie aplikacyjne metody SADSF. Konstruowanie pól o wielkim stopniu złożoności. *Int. J. Mechanics and Mechanical Engineering* 2003; 6.
3. Bodaszewski W., Markiewicz I. Rama samochodu ciężarowego ukształtowana metodą SDNPN. *ZN Politechniki Opolskiej, Mechanika* 2001; 265(64): 45-50.
4. Dietrich L., Miastkowski J., Szczepiński W. Nośność graniczna elementów konstrukcji. Warszawa: PWN, 1970.
5. Dietrich L. Wymiarowanie połączeń sworzniowych metodą nośności granicznej w świetle badań zmęczeniowych. *Archiwum Budowy Maszyn* 1978; 25(3): 513-524.
6. Erickson P.E., Riley W.F. Minimizing Stress Concentrations Around Circular Holes in Uniaxially Loaded Plates. *Experimental Mechanics* 1978; 18(3): 97-100.
7. Glinka G., Jakubczak H. Fatigue Software Package FALIN, Stress and Fatigue-Fracture Design Inc. (SaFFD, Inc.).
8. Kapkowski J., Stupnicki J. Doświadczalne badania elementów maszyn projektowanych metodą nośności granicznej. *Rozprawy Inżynierskie* 1973; 21(1).
9. Markiewicz I. Numeryczne wyznaczanie statycznie dopuszczalnych układów linii nieciągłości naprężeń w polach granicznych, spełniających warunek plastyczności Hubera-Misesa. Warszawa: Politechnika Warszawska 1996, rozprawa doktorska.
10. Markiewicz I., Bodaszewski W., Glinka G. Global and Local Design Method for Fatigue Resistant Structures. *SAE Transactions, Journal of Materials and Manufacturing* 2003; 5(112): 467-477.
11. Markiewicz I. Analysis of Elastic Effort Fields in Truck Frame Designed by the SADSF Method. *Eksplatacja i Niezawodność - Maintenance and Reliability* 2007; 2(34): 22-27.
12. Markiewicz I. Analysis of Welded Joint Designed by Limit Analysis Methods. *Eksplatacja i Niezawodność - Maintenance and Reliability* 2008; 3(39): 12-21.
13. Meguid S.A. Finite Element Analysis of Defence Hole Systems for the Reduction of Stress Concentration in a Uniaxially-Loaded Plate with Two Coaxial Holes. *Engineering Fracture Mechanics* 1986; 25(4): 403-413.
14. Pilkey W. D. Peterson's Stress Concentration Factors. Wiley 1999.
15. Savin, G. N. Stress concentration around holes. New York: Pergamon Press, 1961.
16. Sobczykiewicz W., Glinka G., Jakubczak H. Fatigue Design of Earthmoving Machines. *International Symposium on Fatigue Design* 1992.
17. Szczepiński W.: Projektowanie elementów maszyn metodą nośności granicznej. Warszawa: PWN, 1968.
18. Szczepiński W., Szlagowski J. Plastic Design of Complex Shape Structures. Warszawa-Chichester: Ellis Horwood & PWN, 1990.
19. Szlagowski J. Metodyka kształtowania wytrzymałościowego elementów konstrukcji wg kryterium nośności granicznej. Warszawa: Prace IPPT PAN 1990; 25.

Dr inż. Ireneusz MARKIEWICZ

Katedra Mechaniki

Politechnika Świętokrzyska

Al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7, 25-314 Kielce, Polska

e-mail: zwmim@tu.kielce.pl
