Krzysztof KUJAN

# WYZNACZANIE LICZEBNOŚCI POMIARÓW ODCHYŁEK GEOMETRYCZNYCH W STATYSTYCZNEJ OCENIE PROCESU

# DETERMINATION OF THE NUMBER OF GEOMETRIC DEVIATION MEASUREMENTS IN STATISTICAL EVALUATION OF A PROCESS

*W artykule przedstawiono analizę metod wyznaczania liczebności próbki jednostek wyrobów wymaganych do statystycznej oceny procesu obróbki. Omówiono metody ustalania liczebności próbki oparte na pojęciu zmiennej standaryzowanej, na wartości krytycznej statystyki t- Studenta i na analizie graficznej wartości krytycznych statystyki t. Dodatkowo przeprowadzono praktyczną weryfikację analizowanych metod uwzględniając w badaniach ocenę wartości średniej i oszacowanie odchylenia standardowego odchyłek geometrycznych. Wyniki analiz i badań przedstawiono w postaci graficznej i tabelarycznej.*

***Słowa kluczowe:*** *proces, odchyłka geometryczna, rozkład odchyłek, liczebność próbki.*

*The article presents an analysis of the methods of determining the size of a sample of product units required for the statistical evaluation of the process of machining. Discussed are sample size determination methods based on the concept of standardized variable, the critical value of Student's t-statistic, and the graphic analysis of critical values of the t statistic. Additionally, a practical verification of the analyzed methods was conducted, taking into account the estimate of the mean value and the estimation of the standard value of geometric deviations. The results of the analyses are presented graphically and in tabular form.*

***Keywords:*** *process, geometric deviation, distribution of deviations, sample size.*

Liczebność pomiarów określana w literaturze statystycznej jako liczebność próbki [4] ma istotny wpływ na wyniki badań procesów stochastycznych, a więc również na wyniki statystycznej oceny jakości czy wydolności procesu technologicznego [1].

Statystyczna ocena jakości wyrobów lub procesów opiera się na badaniach próbek jednostek wyrobów pobieranych z partii wyrobów. Pobieranie próbki do badań statystycznych jest pewną procedurą obejmującą ustalenie minimalnej liczebności jednostek próbki oraz wykorzystanie określonego sposobu jej pobierania. Przyjęty sposób pobierania jednostek do badań [2] powinien uwzględniać charakterystyczne właściwości procesu technologicznego, aby pobrana próbka mogła być reprezentatywna dla ocenianej partii jednostek. Sposób pobierania jednostek do badań może być powiązany z liczebnością pobieranej próbki.

Liczebność próbki wyrobów zależy od przyjętych statystycznych granic dopuszczalnej zmienności kontrolowanej cechy wyrobu lub zadanego poziomu istotności badań statystycznych. W badaniach parametrów statystycznych procesów, poprawne oszacowanie liczebności próbki ma istotne znaczenie, ponieważ decyduje o wiarygodności i skuteczności oceny procesu. W przypadku uzyskania niepewnego rezultatu z powodu niewłaściwie dobranej liczebności próbki często nie ma możliwości powtórzenia badania. W odniesieniu do badań procesów technologicznych w toku i oceny jakości procesu na podstawie rozkładu odchyłek geometrycznych, reprezentatywną liczebność próbki jednostek pobieranych do badań, w zależności od pożądanego poziomu istotności, można oszacować wykorzystując:

- pojęcie zmiennej standaryzowanej rozkładu normalnego,
- pojęcie zmiennej *t* rozkładu *t*-Studenta,
- analizę wartości krytycznej $k_{\alpha,f}$ rozkładu *t*-Studenta.

Number of measurements, referred to in the statistical literature as sample size [4], has a significant impact on the results of analyses of stochastic processes, and, by the same token, on the results of statistical evaluation of the quality or efficiency of a technological process [1].

Statistical evaluation of the quality of products or processes is based on the analysis of samples of product units taken from a batch of products. Taking a sample for statistical analysis is a procedure that involves determination of the minimum number of sample units and using a specified sampling technique. The adopted sampling technique [2] should take into account the characteristic properties of a technological process, so that the sample taken can be representative of the entire batch of units that are being evaluated. The manner of sampling may be related to the size of the sample being taken.

The size of a sample of products depends on the adopted statistical limits of allowable variation of the inspected product characteristic or the given level of significance of the statistical analysis. In analyses of statistical parameters of processes, correct evaluation of sample size is important since it determines the reliability and effectiveness of process evaluation. When an unreliable result is obtained because of an improperly selected sample size, there is often no possibility of repeating the analysis. In analyses of technological processes in progress and in evaluation of the quality of a process on the basis of the distribution of geometric deviations, the representative size of a sample of units taken for analyses can be estimated, dependent on the desired level of significance, using

- the concept of standardized normal distribution variable ,
- the concept of variable *t* of the Student's *t*-distribution,
- an analysis of the critical value $k_{\alpha,f}$ of the Student's *t*-distribution.

## 1. Wyznaczenie liczebności pomiarów w oparciu o pojęcie zmiennej standaryzowanej rozkład normalnego

W celu wyznaczenia liczebności pomiarów odchyłek geometrycznych niezbędnych do oceny procesu technologicznego można skorzystać z ogólnie znanego w statystyce pojęcia zmiennej losowej standaryzowanej $u_\alpha$. Wartość zmiennej losowej standaryzowanej $u_\alpha$ dla rozkładu odchyłek geometrycznych procesu obróbki skrawaniem można ustalić na podstawie wartości średnich $\overline{x}_i$ z pomiarów próbek o liczebności $n$ i odchyleniu standardowym $\sigma_{(x)}$ [5]. Matematycznie postać zmiennej losowej standaryzowanej może być wyrażona zależnością

$$u_\alpha = \frac{\overline{x}_2 - \overline{x}_1}{\sigma_{(x)}} \sqrt{n} \tag{1}$$

Aby umożliwić wykorzystanie powyższej zależności do oszacowania liczebności $n$ próbki należy wartości średnie $\overline{x}_2$ i $\overline{x}_1$ sprowadzić do wartości względnych $z_1$ i $z_2$ wyrażonych w jednostkach odchylenia standardowego. W tym celu można wykorzystać związek pomiędzy akceptowalną zmiennością odchyłki $x_{max}$ i wartością średnią rys. 1.

$$\overline{x}_2 = x_{max} - z_2 \quad \text{oraz} \quad \overline{x}_1 = x_{max} - z_1 \tag{2}$$

Po wykonaniu postawienia i przekształceniach otrzymany

$$n = \frac{u_\alpha^2}{\left( \frac{z_1}{\sigma_{(x)}} - \frac{z_2}{\sigma_{(x)}} \right)^2} \tag{4}$$

Jeżeli przyjmiemy następujące oznaczenia

$$z(\alpha_2) = \frac{z_2}{\sigma_{(x)}} \quad \text{oraz} \quad z(\alpha_1) = \frac{z_1}{\sigma_{(x)}} \tag{5}$$

to po podstawieniu do wzoru (4) otrzymamy zależność umożliwiającą szacowanie minimalnej liczebności próbki

$$n = \frac{u_\alpha^2}{\left[ z(\alpha_1) - z(\alpha_2) \right]^2} \tag{6}$$

Wyznaczając liczebność próbki należy ustalić wartość oczekiwaną $u_\alpha$ zmiennej standaryzowanej rozkładu odchyłek geometrycznych, aby zapewnić ocenę wybranego parametru rozkładu odchyłek na zadanym poziomie istotności $\alpha=1-P_\alpha$. Przyjęcie poziomu istotności $\alpha=0,0002$ oceny rozkładu odchyłek jest równoznaczne prawdopodobieństwu $P_\alpha = 0,9998$ przedziału ufności dla zmiennej $u_\alpha=3,5$ [5]. Po podstawieniu wartości $u_\alpha=3,5$ do wzoru (6), ostateczny wzór umożliwiający

## 1. Determination of the number of measurements on the basis of the concept of standardized normal distribution variable

To determine the number of geometric deviation measurements indispensable for the estimation of a technological process, one can use the concept, commonly known in statistics, of standardized random variable $u_\alpha$. The value of the standardized random variable $u_\alpha$ for the distribution of geometric deviations of the machining process can be established on the basis of mean values $\overline{x}_i$ from measurements of samples of size $n$ and standard deviation $\sigma_{(x)}$ [5]. The standardized random variable can be expressed mathematically by the relation

$$u_\alpha = \frac{\overline{x}_2 - \overline{x}_1}{\sigma_{(x)}} \sqrt{n} \tag{1}$$

For the above relation to be used for the estimation of sample size $n$, the mean values $\overline{x}_2$ and $\overline{x}_1$ have to be converted to relative values $z_1$ and $z_2$, expressed in units of standard deviation. For that purpose, the relation between the acceptable variation of deviation $x_{max}$ and the mean value can be used Fig. 1.

$$\overline{x}_2 = x_{max} - z_2 \quad \text{and} \quad \overline{x}_1 = x_{max} - z_1 \tag{2}$$

After substitution and transformation we get

$$n = \frac{u_\alpha^2}{\left( \frac{z_1}{\sigma_{(x)}} - \frac{z_2}{\sigma_{(x)}} \right)^2} \tag{4}$$

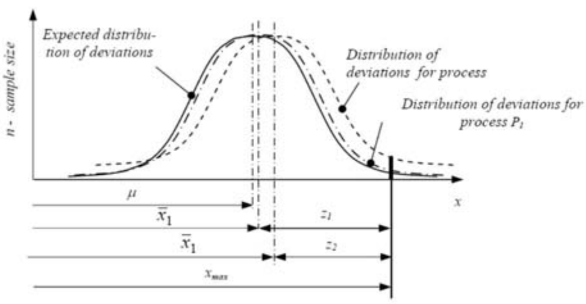
If the following notations are adopted

$$z(\alpha_2) = \frac{z_2}{\sigma_{(x)}} \quad \text{and} \quad z(\alpha_1) = \frac{z_1}{\sigma_{(x)}} \tag{5}$$

then, after substitution into formula (4), we receive a relation which makes possible estimation of the minimum sample size

$$n = \frac{u_\alpha^2}{\left[ z(\alpha_1) - z(\alpha_2) \right]^2} \tag{6}$$

When determining sample size, the expected value $u_\alpha$ of the standardized variable of the distribution of geometric deviations needs to be established to ensure estimation of the selected deviation distribution parameter at the given level of significance $\alpha=1-P_\alpha$. Assumption of the level of significance for the estimation of the distribution of deviations at $\alpha=0.0002$ is equivalent to probability $P_\alpha = 0.9998$ of the confidence interval for variable $u_\alpha=3.5$ [5]. After substituting value $u_\alpha=3.5$ into formula (6), the




*Rys. 1. Przedziały ufności rozkładu odchyłek dla jednostronnego ograniczenia*

*Fig. 1. One-sided confidence intervals for distribution of deviations*

oszacowanie liczebności próbki będzie miał postać

$$n = \frac{12,25}{\left[z(\alpha_1) - z(\alpha_2)\right]^2} \quad (7)$$

Oszacowana przy pomocy wzoru (7) minimalna liczebność próby zależy od tego czy do oceny rozkładu odchyłek przyjęto jednostronne ograniczeniem kontrolowanej odchyłki, czy z dwustronne (kryterium kwalifikacyjne) [4]. Jeżeli dla jednostronnego ograniczenia zmienności rys. 1. przyjmiemy założenie, że oczekiwana wartość parametru rozkładu odchyłek powinna być na poziomie $\alpha_1 = 0,005$ i akceptowana na poziomie $\alpha_2 \leq 0,02$, to dla tych założeń wartości dystrybuanty [5] rozkładu będą odpowiednio równe

$$P_1 = 1 - \Phi(\alpha_1) = 0,995 \qquad P_2 = 1 - \Phi(\alpha_2) = 0,98 \quad (8)$$

Wyznaczonym wartościom dystrybuanty odpowiadają [5] $z(\alpha_1)=2,58$ i $z(\alpha_2)=2,06$. Minimalna liczebność próbki w tych warunkach będzie równa zgodnie ze wzorem (7) $n=45$ jednostek wyrobu.

W przypadku dwustronnego ograniczenia rozkładu odchyłek rys.2., szczególnie istotnego w kontroli procesów obróbki elementów maszyn, poziomy ufności rozkładu odchyłek można wyznaczyć na podstawie wzorów

$$P_1 = 1 - 2\Phi(0,5\alpha_1) = 0,9975$$
$$P_2 = 1 - 2\Phi(0,5\alpha_2) = 0,99 \quad (9)$$

Korzystając z dystrybuanty rozkładu normalnego wyznaczonym poziomom ufności odpowiadają odpowiednio $z(\alpha_1)=2,81$ i $z(\alpha_2)=2,33$. Minimalna liczebność próbki przy dwustronnym ograniczeniu właściwości wyniesie zgodnie ze wzorem (7) $n=53$.

W praktyce, wyznaczanie minimalnej liczebności w oparciu o pojęcie zmiennej standaryzowanej rozkładu normalnego można odnieść do zmienności rozkładu odchyłek. Przyjmując, że przedział zmienności rozkładu odchyłek dla procesu ustabilizowanego jest równy

$$T_S = 2u_\alpha \sigma_{(x)} \quad (10)$$

a zmienność rozkładu powodowana zmiennością wartości średniej lub odchylenia standardowego rozkładu odchyłek spełnia warunek

$$z(\alpha_1) - z(\alpha_2) \leq 0,5kT_S \quad (11)$$

to dla przyjętych założeń wzór (6) można sprowadzić do postaci

$$n = \frac{u_\alpha}{\left[0,5kT_S\right]^2} \quad (12)$$

final formula for calculating sample size will have the form

$$n = \frac{12,25}{\left[z(\alpha_1) - z(\alpha_2)\right]^2} \quad (7)$$

The minimum sample size, calculated using formula (7) depends on whether a one-sided or a two-sided limit of the inspected deviation was assumed for the estimation of the distribution of deviations (a qualification criterion) [4]. If, for a one-sided variation limit Fig. 1., we assume that the expected value of the deviation distribution parameter should be at the level of $\alpha_1 = 0.005$ and is accepted at the level of $\alpha_2 \leq 0.02$, then the values of the distribution function [5] for those assumptions will be, respectively,

$$P_1 = 1 - \Phi(\alpha_1) = 0,995 \qquad P_2 = 1 - \Phi(\alpha_2) = 0,98 \quad (8)$$

The calculated values of the distribution function [5] correspond to $z(\alpha_1)=2.58$ and $z(\alpha_2)=2.06$. The minimum sample size under those conditions will be, in accordance with formula (7), $n=45$ product units.

In the case of a two-sided limit of the distribution of deviations Fig.2., which is particularly important in the control of the processes of machining of parts, the levels of confidence for the distribution of deviations can be determined on the basis of formulas

$$P_1 = 1 - 2\Phi(0,5\alpha_1) = 0,9975$$
$$P_2 = 1 - 2\Phi(0,5\alpha_2) = 0,99 \quad (9)$$

When the normal distribution function is used, the determined levels of confidence correspond to $z(\alpha_1)=2.81$ and $z(\alpha_2)=2.33$, respectively. The minimum sample size for two-sided limitation of properties will be, in accordance with formula (7), $n=53$.

In practice, determination of the minimum sample size using the concept of standardized normal distribution variable can be related to variation of the distribution of deviations. Assuming that the variation interval of the distribution of deviations for a stabilized process equals

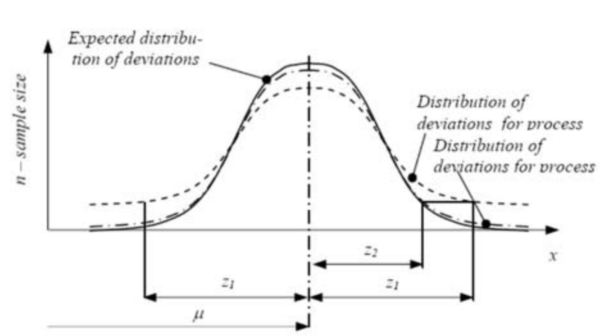
$$T_S = 2u_\alpha \sigma_{(x)} \quad (10)$$

and the distribution variation caused by the variation of the mean value or the standard deviation of the distribution of deviations satisfies condition

$$z(\alpha_1) - z(\alpha_2) \leq 0,5kT_S \quad (11)$$

then, for the adopted assumptions, formula (6) can be re-written in the form

$$n = \frac{u_\alpha}{\left[0,5kT_S\right]^2} \quad (12)$$

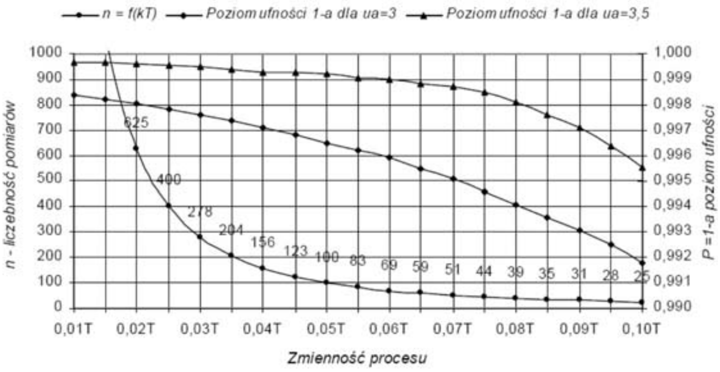



*Rys. 2. Przedziały ufności rozkładu odchyłek dla dwustronnego ograniczenia*

*Fig. 2. Two-sided confidence intervals for distribution of deviations*

Korzystając powyższego wzoru przeprowadzono analizę liczebności próbki w funkcji akceptowanej zmienności rozkładu odchyłek dla różnych poziomów ufności. Rezultaty analizy przedstawiono na rys.3.

Using the above formula, an analysis was conducted of sample size as a function of accepted variation of the distribution of deviations for different confidence levels. The results of the analysis are presented in Fig. 3.




*Rys.3. Liczebność próbki oraz poziomy ufności $P_\alpha$ = 1- α w funkcji akceptowanej zmienności procesu*

*Fig.3. Sample size and the levels of confidence $P_\alpha$ = 1- α as a function of the accepted variation of a process*

Z przeprowadzonej analizy wynika, że dla przyjętej zmiennej standaryzowanej rozkładu oczekiwanego minimalna liczebność próbki zależny tylko od akceptowanej zmienności rozkładu zaobserwowanego.

It follows from the conducted analysis that, for the adopted standardized variable of expected distribution, sample size depends only on the accepted variation of observed distribution.

## 2. Wyznaczenie liczebności próby w oparciu o pojęcie zmiennej t

Do wyznaczenia oszacowania minimalnej liczebności próbki można wykorzystać także pojęcie zmiennej losowej rozkładu *t-Studenta*, której postać matematyczną można zapisać

$$t = \frac{\left|\bar{w} - \mu\right|}{S_{(w)}} \le k_{\alpha,f} \tag{13}$$

Korzystając z zmiennej $t$ można wyznaczyć oszacowanie błędu standardowego średnich z próbek o liczebności $n$, pobranych z partii jednostek wyrobów o oszacowaniu odchylenia standardowego $S_{(w)}$. Oszacowanie odchylenia standardowego średnich jest równe [5]

$$S_{(\bar{w})} = \frac{S_{(w)}}{\sqrt{n}} \tag{14}$$

Korzystając z oszacowania odchylenia standardowego średnich można napisać, że maksymalny rozstęp wartości średnich procesu [4] z prób o liczebności $n$ będzie równy

$$\bar{w}_2 - \bar{w}_1 = k_\alpha \frac{S_{(w)}}{\sqrt{n}} \tag{15}$$

Przyjmując założenie, że maksymalny rozstęp wartości średnich z prób powinien być równy *k-tej* części tolerancji konstrukcyjnej $T$ można napisać

$$\bar{w}_2 - \bar{w}_1 = kT \tag{16}$$

Uwzględniając, że oszacowanie odchylenia standardowego rozkładu odchyłek geometrycznych procesu powinno spełniać warunek

$$T = 6S_{(w)} \tag{17}$$

wtedy

$$kT = k_\alpha \frac{T}{6\sqrt{n}} \tag{18}$$

## 2. Determination of sample size based on the concept of variable t

To determine the estimation of the minimum sample size, one can also use the concept of the random variable of Student's *t*-distribution, which can be written in a mathematical form as

$$t = \frac{\left|\bar{w} - \mu\right|}{S_{(w)}} \le k_{\alpha,f} \tag{13}$$

Using variable $t$, one can determine the standard error estimator of means from samples of size $n$ taken from a batch of product units with a standard deviation estimator $S_{(w)}$. The standard deviation estimator of means equals [5]

$$S_{(\bar{w})} = \frac{S_{(w)}}{\sqrt{n}} \tag{14}$$

Using the standard deviation estimator of means, it can be written that the maximum range of mean values of a process [4] from samples of size $n$ equals

$$\bar{w}_2 - \bar{w}_1 = k_\alpha \frac{S_{(w)}}{\sqrt{n}} \tag{15}$$

Adopting the assumption that the maximum range of mean values from samples should be equal to the *k-th* part of structural tolerance $T$, it can be written that

$$\bar{w}_2 - \bar{w}_1 = kT \tag{16}$$

Taking into account that the standard deviation estimator of the distribution of geometric deviations of a process should satisfy condition

$$T = 6S_{(w)} \tag{17}$$

then

$$kT = k_\alpha \frac{T}{6\sqrt{n}} \tag{18}$$

Przekształcając wzór (18) można wyznaczyć minimalną liczebność próby na określonym poziomie ufności $P_\alpha$. Na poziomie ufności $P_\alpha$*=0,98* i $P_\alpha$*=0,95* minimalną liczebność próby można wyznaczyć ze wzorów odpowiednio

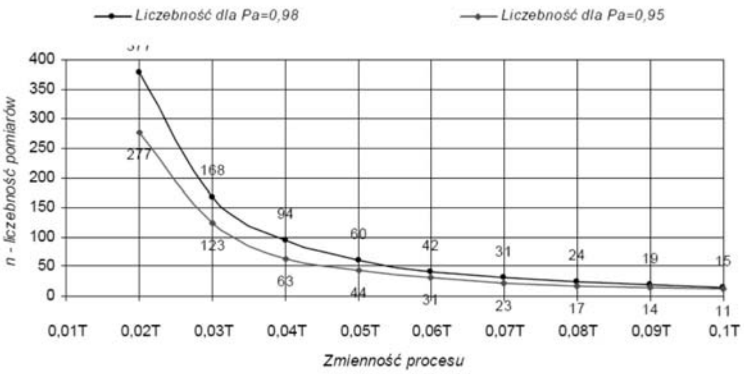
$$n = \frac{0,151}{k^2} \text{ dla } P_\alpha=0,98 \qquad n = \frac{0,111}{k^2} \text{ dla } P_\alpha=0,95 \qquad (19)$$

Na podstawie powyższych zależności wyznaczono krytyczne liczebności próby *n* w funkcji *k* współczynnika maksymalnego rozstępu wartości średnich. Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 4.

By re-writing formula (18), we can determine the minimum sample size at a given level of confidence $P_\alpha$. At the levels of confidence of $P_\alpha$*=0.98* and $P_\alpha$*=0.95*, the minimum sample size can be determined from the respective formulas

$$n = \frac{0,151}{k^2} \text{ for } P_\alpha=0,98 \qquad n = \frac{0,111}{k^2} \text{ for } P_\alpha=0,95 \qquad (19)$$

On the basis of the above relations, critical sample sizes *n* were determined as a function of *k*, the coefficient of the maximum range of mean values. The results of the calculations are presented in Fig.4.




*Rys. 4. Liczebność próbki dla poziomów ufności $P_\alpha$=0,98 i $P_\alpha$=0,95 w funkcji akceptowanej zmienności procesu*

*Fig. 4. Sample size for confidence levels $P_\alpha$=0.98 and $P_\alpha$=0.95 as a function of the accepted variation of a process*

## 3. Wyznaczenie liczebności próby w oparciu o analizę wartości krytycznej zmiennej t rozkładu t-Studenta

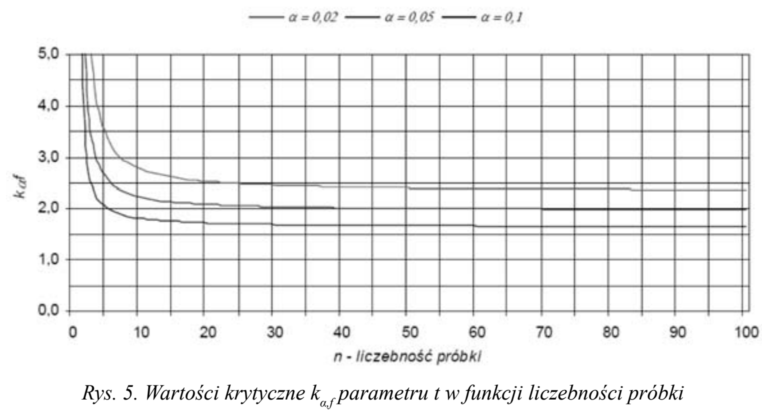
Oszacowanie liczebności próby można wykonać w oparciu o analizę wartości krytycznej parametru *t* rozkładu *t*-Studenta. Wartości krytyczne parametru *t* można znaleźć w literaturze [5] w postaci stabelaryzowanych wartości liczbowych. Analiza wartości w postaci liczb zestawionych w tabeli jest niewygodna i trudno w ten sposób ustalić oszacowanie optymalnej liczebności próby. Znaczenie wygodniej jest analizować wartości krytyczne parametru *t* jeżeli zostaną przedstawione w sposób graficzny.

Na rys.5. przedstawiono w sposób graficzny charakterystyki wartości krytycznych $k_{\alpha;f}$ parametru *t* w funkcji liczby stopni swobody *f = n-1* dla trzech poziomów istotności *α*. Na podstawie przebiegu charakterystyk wartości krytycznych $k_{\alpha f}$ można ustalić oszacowanie liczebności próby. Jako oszacowa-

## 3. Determination of sample size based on the analysis of the critical value of variable t of Student's t-distribution

Sample size can be determined by analyzing the critical value of parameter *t* of Student's *t*-distribution. Critical values of parameter *t* can be found in the literature [5] in the form of tabulated numerical values. Analysis of values in the form of tabulated numbers is inconvenient, and it is difficult to determine the estimation of the optimum sample size in that way. It is considerably more convenient to analyze critical values of parameter *t* if they are represented graphically.

Fig.5. is a graphical representation of the characteristics of critical values $k_{\alpha;f}$ of parameter *t* as a function of the number of degrees of freedom *f = n-1* for three levels of significance *α*. Based on the curves of critical values $k_{\alpha f}$ , one can determine the estimation of sample size. The estimation of the minimum sample size is assumed to be such a number *n* beginning




*Rys. 5. Wartości krytyczne $k_{\alpha,f}$ parametru t w funkcji liczebności próbki*

*Fig. 5. Critical values $k_{\alpha,f}$ of parameter t as a function of sample size*

nie minimalnej liczebności próbki należy przyjąć taką liczbę *n* od której przebieg charakterystyki jest prawie równoległy do osi *n*. Dla poziomu istotności $\alpha=0,02$ prawie równoległy przebieg zaczyna się od $n=45\div50$, a dla $\alpha=0,05$ od $n=30\div35$ i dla $\alpha=0,1$ od $n=25\div30$.

## 4. Ocena wpływu liczebności próby na podstawowe parametry statystyczne rozkładu odchyłek

Przedstawiona analiza zagadnienia dowodzi, że istnieje minimalna liczebność próbki, która może zapewnić poprawne oszacowanie parametrów rozkładu odchyłek geometrycznych dla określonego poziomu ufności. Omawiane metody szacowania liczebności próbki nie dają jednoznacznych wartości liczbowych, aczkolwiek dają wartości zbliżone. Należy zaznaczyć, że wybór metody wyznaczania minimalnej liczebności próbki zależy od celu jaki w wyniku badania statystycznego powinien być osiągnięty.

Wyznaczanie liczebności próbki w oparciu o pojęcie zmiennej standaryzowanej zapewnia najwyższe liczebności próbek i z tego względu powinno być stosowane w badaniach odbiorczych, których celem jest skuteczność jakościowej oceny partii wyrobów.

Liczebność próbki wyznaczona w oparciu pojęcie zmiennej *t* rozkładu *t*-Studenta zapewnia również dobre oszacowanie parametrów rozkładu odchyłek geometrycznych.

Metoda wyznaczenia liczebności próbki oparta na analizie wartości krytycznej parametru *t* rozkładu *t*-Studenta zapewnia najmniejszą liczebność próbki, dlatego nie powinna być stosowana w przypadkach, gdzie jest wymagana wysoka skuteczność oceny. Z przeprowadzonych badań w tym zakresie wynika, że można korzystać z tej metody przy monitorowaniu parametrów rozkładu statystycznego odchyłek geometrycznych procesu na podstawie kontroli frakcji jednostek.

Porównanie wpływu liczebności próbki *n* na wartości podstawowych parametrów rozkładu odchyłek geometrycznych procesu zestawiono w tabeli 1. W kolumnie *2* zestawiono wartości średnie zaobserwowanych odchyłek wymiaru $E_w$ od wartości nominalnej $d_N$ (kolumna 1) dla trzech kolejnych cykli badania procesu wyznaczone dla wszystkich jednostek obrobionych powierzchni w danym cyklu. W kolumnie 3 zestawiono wartości średnie zaobserwowanej odchyłki wymiaru dla tych samych warunków ale dla próbek o liczebności $n=62$. Taką liczebność zapewnia metoda oparta na pojęciu zmiennej standaryzowanej rozkładu normalnego przy zmienności procesu równej ok. $0,06T$ rys.3, lub metoda oparta na pojęciu zmiennej *t* przy zmienności procesu ok. $0,04T$ i poziomie istotności $\alpha=0,05$ rys.4. W kolumnie 4 zestawiono wartości średnie zaobserwowanych odchyłek wymiaru dla trzech próbek o liczebności $n=31$ jednostek wyznaczone w oparciu o analizę wartości krytycznych parametru *t* rys.5. W kolumnie 5 zawiera wartości odchylenia standardowego dla wszystkich jednostek serii a w kolumnie 7 i 8 odpowiadające im oszacowania odchylenia standardowego wyznaczone dla próbek o liczebności $n=62$ i $n$=31 jednostek.

Analiza i wyniki przeprowadzonych badań jak również rezultaty badań powtarzalności rozkładu odchyłek zawarte w pracy [3] dowodzą, że omawiane metody zapewniają bardzo dobrą skuteczność wyznaczania wartości średniej z próbek o wyznaczonej liczebności. Różnica w oszacowaniu wartości średniej z próbek w odniesieniu do wartości średniej z populacji nie

from which the curve is almost parallel to the axis *n*. For the level of significance $\alpha=0.02$, an almost parallel curve begins from $n=45\div50$, for $\alpha=0.05$ from $n=30\div35$, and for $\alpha=0.1$ from $n=25\div30$.

## 4. Assessment of the effect of sample size on basic statistical parameters of distribution of deviations

The presented analysis of the issue proves that there exists a minimum sample size, which can ensure correct estimation of the parameters of distribution of geometric deviations for a specified level of confidence. The discussed methods of estimating sample size do not give unequivocal numerical values yet they provide approximate values. It must be pointed out that the choice of a method for determining the minimum sample size depends on the goal that a statistical analysis is aiming to achieve.

Determination of sample size using the concept of standardized variable ensures the largest sample sizes and for that reason should be used in acceptance tests, which aim at effective assessment of the quality of a batch of products.

Sample sizes determined based on the concept of variable *t* of Student's *t*-distribution also ensure good estimation of the distribution parameters of geometric deviations.

The method of determining sample size based on the analysis of the critical value of parameter *t* of Student's *t*-distribution provides the smallest sample sizes, which is why it should not be used in cases where high effectiveness of assessment is required. It follows from the research conducted in this regard that this method can be used in monitoring the statistical distribution parameters of geometric deviations of a process on the basis of the control of unit fractions.

A comparison of the effect of sample size *n* on the values of basic distribution parameters of geometric deviations of a process is presented in Table 1. Column 2 shows mean values of the observed dimension deviations $E_w$ from the nominal value $d_N$ (column 1) for three successive process testing cycles, determined for all units of machined surfaces in a given cycle. In column 3, mean values of the observed dimension deviation have been tabulated for the same conditions, but for samples of size $n=62$. This size is provided by the method based on the standardized normal deviation variable for process variation of ca. $0.06T$ Fig.3, or the variable *t* method for process variation of ca. $0.04T$ and the level of significance $\alpha=0.05$ Fig.4. Column 4 presents mean values of observed dimension deviations for three samples of size $n=31$ of units determined based on the analysis of the critical values of parameter *t* Fig.5. Column 5 contains standard deviation values for all units of the series, and columns 7 and 8, the corresponding estimators of standard deviation determined for samples of $n=62$ and $n$=31 units.

The analysis and the results of the conducted studies as well as the findings of the investigations of repeatability of deviation distribution included in article [3] demonstrate that the methods discussed ensure very good effectiveness of determining mean value from samples of defined size. The difference in estimation between the sample mean value compared to the population mean value does not exceed *0.9%*. With regard to the estimation of standard deviation, the effectiveness of the discussed methods is sufficient. The difference between the estimation values of sample standard deviation compared to po-

Tab. 1. Zestawienie wyznaczonych parametrów statystycznych rozkładu odchyłek wymiaru $E_w$ procesu dla różnych liczebności $n$ próbek

Tab. 1. A collation of the determined statistical parameters of the distribution of dimension deviations $E_w$ of a process for different sample sizes $n$

| $d_N$/ nr próbki<br>$d_N$/ sample no. | Wartość średnia $E_w$<br>Mean value $E_w$ | | | $\sigma_{(Ew)}$ | $S_{(Ew)}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Liczebność<br>Size | $n_{max}$ | n=62 | n=31 | $n_{max}$ | $n_{max}$ | n=62 | n=31 |
| 89,54/1 | 0,076 | 0,074 | 0,075 | 0,032 | 0,032 | 0,034 | 0,032 |
| 89,54/2 | 0,076 | 0,077 | 0,076 | 0,032 | 0,032 | 0,036 | 0,036 |
| 89,54/3 | 0,076 | 0,077 | 0,075 | 0,032 | 0,032 | 0,035 | 0,034 |
| 1/3 Σ | 0,076 | 0,076 | 0,07533 | 0,032 | 0,032 | 0,035 | 0,034 |

przekracza 0,9%. W odniesieniu do oszacowania odchylenia standardowego skuteczność omawianych metod jest dostateczna. Różnica wartości oszacowania odchylenia standardowego z próbek w odniesieniu do odchylenia standardowego zawiera się w przedziale *(6,25÷9,4)%*.

Należy podkreślić, że skuteczność oszacowania wartości parametrów statystycznych rozkładu odchyłek geometrycznych zależy od sposobu pobierania jednostek do badań. Sposób pobierania jednostek do badań jest szczególnie ważny w procesach odpowiadających modelom statystycznym *typu C* i *typu A-C*, gdzie wartość średnia zmienia się w toku procesu. Procesy obróbki skrawaniem należy zaliczyć do tego typu procesów z uwagi na występowanie zużycia ostrza. Zużycie ostrza jest funkcją nieliniową charakteryzującą się etapami o różnej intensywności zużycia. Sposób pobierania jednostek do badań statystycznych powinien uwzględniać to zjawisko aby rezultaty uzyskane z badania próbek o wyznaczonej liczebności były wiarygodne.

pulation standard deviation is within the range of *(6,25÷9,4)%*.

It should be emphasized that the effectiveness of estimating the value of the statistical parameters of distribution of geometric deviations depends on the manner in which units are taken for analysis. The manner of sampling is particularly important in processes corresponding to statistical models of *type C* and *type A-C*, where the mean value changes in the course of the process. Processes of machining should be counted among this type of processes since they involve wear of the cutting tool point. Wear of the cutting tool point is a non-linear function characterized by stages of different intensity of wear. If the results obtained from the analyses of samples of defined size are to be reliable, this phenomenon needs to be taken into account while choosing a sampling technique.

## 5. Literatura


[1] Franklin LeRoy A.: *Sample size determination for lower confidence limit for estimating process capability indices*. Computers & Industrial Engineering 36 (1999) 603-614.

[2] Kujan K.: *Technika i zarządzanie kontrolą jakości w budowie maszyn*. PL, Lublin 2002.

[3] Kujan K.: *Badania i analiza powtarzalności rozkładu odchyłek geometrycznych w procesie obróbki skrawaniem. Investigations and analysis of repeatability of geometric deviation distribution in the machining process*. Eksploatacja i Niezawodność, Maintenance and Reliability 3 (2008) 45-523.

[4] Iwasiewicz A. : *Statystyczna kontrola jakości w toku produkcji*, PWN Warszawa 1985.

[5] Volk W.: *Applied statistics for Engineers*. s.e. McGraw-Hill, Inc. 1969.



**Dr inż. Krzysztof KUJAN**
Katedra Podstaw Inżynierii Produkcji
Wydział Mechaniczny
Politechnika Lubelska
ul. Nadbystrzycka 36, 20-618 Lublin
e-mail: k.kujan@pollub.pl