

Mariusz WAŻNY

## METODA WYZNACZANIA CZASOOKRESU PRZEBYWANIA WYBRANEGO URZĄDZENIA SYSTEMU NAWIGACYJNO-CELOWNICZEGO W SYSTEMIE UŻYTKOWANIA

### THE METHOD OF DETERMINING THE TIME CONCERNING THE OPERATION OF A CHOSEN NAVIGATION AND AIMING DEVICE IN THE OPERATION SYSTEM

*W opracowaniu przedstawiono metodę umożliwiającą wyznaczenie czasookresu przebywania głowicy celowniczej w systemie użytkowania w oparciu o analizę wartości parametrów diagnostycznych zarejestrowanych w trakcie jej eksploatacji. Przedstawiona metoda ma charakter uniwersalny pozwalający na jej zastosowanie w szerokim gronie systemów technicznych, których stan określany jest na podstawie analizy wartości parametrów diagnostycznych.*

**Słowa kluczowe:** parametr diagnostyczny, czas zdatnej pracy, system nawigacyjno-celowniczy.

*The study presents the method of determining the time concerning the operation of an aiming head in the operation system. The method is based on the analysis of the values of diagnostic parameters which were registered during the operation of the aiming head. The method is of universal character. It can be used for a wide range of technical systems whose condition is described on the basis of analyzing the values of diagnostic parameters.*

**Keywords:** a diagnostic parameter, the time of a suitable operation, the navigation and aiming system.

#### 1. Wstęp

Z uwagi na charakter środowiska, w jakim następuje użytkowanie statków powietrznych, tzw. „technika lotnicza” cieszy się szczególnymi względami szerokiego grona osób począwszy od projektantów a skończywszy na członkach komisji badania wypadków lotniczych. Ich zainteresowanie i podejmowane działania w głównej mierze sprowadzają się do jednego - zapewnienia należytego poziomu bezpieczeństwa użytkowania zarówno statków powietrznych, jak i wszystkich innych elementów systemu wspomagającego prawidłowe funkcjonowanie lotnictwa. Wysoki poziom niezawodności osiągany jest poprzez konstruowanie możliwie jak najbardziej niezawodnych urządzeń oraz przyjęcie właściwej strategii eksploatacji. Powyższe aspekty sprawiają, że urządzenia stosowane w lotnictwie należą do tzw. „techniki wysublimowanej” oraz podlegają nieustannym pracom projektowo-modernizacyjnym mającym na celu zwiększenie ich niezawodności.

W trakcie eksploatacji statków powietrznych występuje szereg przyczyn, które oddziałują negatywnie na urządzenia zainstalowane na ich pokładzie. W wyniku tego oddziaływania urządzenia te tracą nominalne parametry swojej pracy, skutkiem czego wartości ich parametrów roboczych wychodzą poza zakres przyjętych granic błędu. Zaistnienie takiej sytuacji wymusza podjęcie określonych działań obsługowych mających na celu przywrócenie nominalnych warunków pracy urządzenia. Najczęściej działania te sprowadzają się do przeprowadze-

#### 1. Introduction

Due to the character of the environment in which airships are operated, “the aeronautical technology” enjoys favours of a wide range of people, including both designers and the members of the Air Accidents Investigation Commission. Their interest and actions are reduced to the assurance of a suitable safety level concerning the operation of both airships and all other elements of the system supporting the correct functioning of the air force. A high reliability results from the construction of infallible devices and the implementation of a correct operation strategy. The above mentioned aspects bring about the fact that the air force devices belong to so-called “highly sophisticated technology” and are constantly developed (the devices are subject to continuous design and modernization works aiming for infallibility increase).

During the exploitation of airships, there are several factors which have a negative influence on devices which are installed on board. The devices lose nominal parameters of their work. Thus, the values of their working parameters exceed the limits of error. This situation results in specific service actions whose aim is to restore nominal conditions of a device operation. Generally, the actions reduce to the adjustment of particular devices or the implementation of improvements levelling an error.

The accuracy of a device operation is especially important in the case of a combat mission with the use of an airship. Very often aerial munitions are

nia regulacji poszczególnych urządzeń lub też wprowadzenia poprawek niwelujących powstały błąd.

Dokładność funkcjonowania urządzeń ma szczególne znaczenie w przypadku realizacji zadania bojowego z użyciem wojskowego statku powietrznego. W trakcie realizacji takiego zadania niejednokrotnie następuje użycie lotniczych środków bojowych. Ich oddziaływanie na obiekt ataku ma zawsze charakter destrukcyjny, a stopień tego oddziaływania zależy m.in. od rodzaju użytych środków bojowych. Z kolei wybór środka bojowego jest wynikiem analizy sytuacji taktycznej, związanej m.in. z obiektem ataku, oddziaływaniem przeciwnika, warunkami atmosferycznymi itp. Proces użycia lotniczych środków bojowych jest wysoce sformalizowany poprzez określone procedury. Ich realizacja poprzedzona jest lotem w rejon celu i obejmuje tematycznie wykrycie celu oraz przeprowadzenie celowania zakończonego atakiem.

Wśród ww. etapów lotu, najistotniejszym z punktu widzenia poprawnie zrealizowanego zadania, jest proces celowania. Błędy występujące na tym etapie realizacji misji, można powiązać w sposób bardzo ogólny z dwoma podmiotami, obejmującymi:

- statek powietrzny - którego systemy, w oparciu o informacje nawigacyjno-celowniczą, wypracowują położenie siatki celowniczej na reflektorze głowicy celowniczej, oraz
- pilota - zadaniem którego jest pokrycie znacznika celowniczego z celem w momencie użycia środków bojowych.

Błędy związane z tzw. „czynnikiem ludzkim” na obecnym etapie rozważań zostaną pominięte. W niniejszym opracowaniu poruszona zostanie kwestia dokładności funkcjonowania urządzeń wchodzących w skład systemu odpowiedzialnego za wypracowanie informacji celowniczej, a dokładnie czasu po upływie którego informacja użytkowa systemu obciążona będzie błędem przekraczającym dopuszczalny poziom.

## 2. Schemat celowania

Rozwiązanie zadania celowania i ataku w ogólnej postaci sprowadza się do określenia takich warunków oddzielenia środka bojowego od nosiciela, aby środek bojowy podczas swego autonomicznego lotu osiągnął cel. Proces celowania podczas realizacji zadania bojowego można opisać jako proces sterowania bronią lub statkiem powietrznym, w celu zapewnienia odpowiednich wartości określonych parametrów, umożliwiających spotkanie środka bojowego z celem. W procesie tym wyróżnić można trzy podstawowe etapy, związane z:

- określeniem wymaganego kierunku broni względem celu, przy którym środek bojowy po utracie fizycznej więzi z nosicielem trafi w cel;
- wyliczeniem dozwolonych parametrów użycia środka bojowego, tzn. określenie takiej strefy wokół celu, w której zapewniona jest odpowiednia dokładność procesu ataku i jednocześnie zapewnione jest bezpieczeństwo atakującego samolotu;
- sterownie samolotem lub bronią w procesie celowania, ataku i podczas wyjścia z ataku.

Realizacja tych trzech etapów w procesie celowania podczas strzelania odbywa się na podstawie przyjętego wektorowego schematu celowania (rys. 1), przy pomocy którego wyznaczane jest wektorowe równanie celowania. Jego budowa możliwa jest gdy:

- ruch środka bojowego i celu jest znany (możliwy do określenia);

used during such mission. Aerial munitions always have a destructive influence on an object of attack. The level of the influence depends on, among other things, the type of munitions. On the other hand, the choice of a munition is the result of analyzing a tactical situation concerning, among other things, the object of an attack, a foe's reaction, weather conditions, etc. Certain specific procedures formalize the process of using aerial munitions. The procedures follow the flight into a target region. The flight includes a target detection and the aiming which ends up with an attack.

As far as a correctly conducted mission is concerned, taking aim at a target is the most important flight stage. Generally, errors occurring at this stage of a mission relate to two subjects including:

- an aeroplane – whose systems work out the location of an aiming grid on a searchlight of an aiming head (on the basis of a navigation and aiming information), and
- a pilot – whose task is to make an aiming indicator coincide with a target at the moment of munitions usage.

At the present stage of analyzing, all errors concerning so-called “human factor” are ignored. This study raises an issue concerning the accuracy of functioning devices belonging to the system responsible for working out an aiming information, and more precisely, the time after which an operational information of the system is burdened with an error exceeding an admissible level.

## 2. A diagram of aiming

The solution of a task concerning the timing and an attack is reduced to the determination of specific conditions of separating a munition from a carrier. The conditions shall enable a munition (during its autonomous flight) to reach a target. The process of aiming during a combat mission can be described as a process of steering a weapon or an aeroplane. The aim of the process is to ensure particular values of particular parameters, which enables a munition to reach a target. The process includes three basic stages which are connected with:

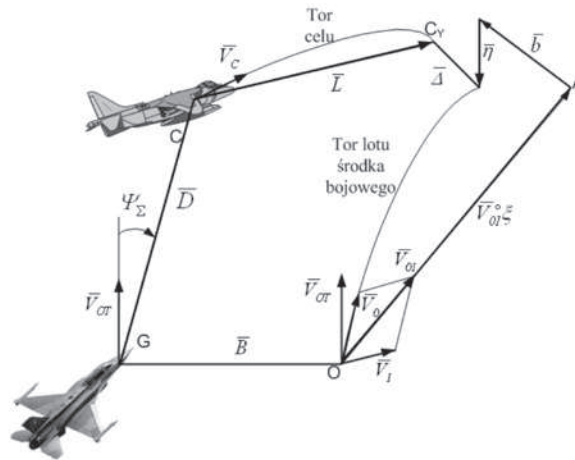
- determining a required direction of a weapon towards a target (the direction which enables a munition [after its separation from a carrier] to hit a target);
- calculating permissible parameters of a munition use, i.e. determining the zone around a target; the zone shall ensure both a suitable accuracy of an attack and an attacking airplane safety;
- steering a plane or a weapon in the process of aiming, attacking and getting out of an attack.

The realization of these three stages in the aiming process during shooting is based on an established vector diagram of aiming (figure 1). The diagram is used for determining a vector equation of aiming. The equation is possible if:

- the motion of a munition and a target is known (possible to determine);
- the motion elements of a carrier, a target and a munition are analyzed in the coordinate system whose beginning at

- elementy ruchu nosiciela, celu i środka bojowego rozpatruje się w układzie współrzędnych, którego początek w chwili oddzielenia środka bojowego jest nieruchomy względem otaczającego ośrodka.

the moment of a munition separation is motionless towards a surrounding medium.



Rys. 1. Wektorowy schemat celowania: O - punkt w którym następuje oddzielenie środka bojowego od nosiciela; G - punkt charakterystyczny układu obserwacyjnego, związany z celownikiem; C - punkt położenia celu w momencie oddzielenia środka bojowego od nosiciela;  $C_y$  - punkt położenia celu po czasie T lotu środka bojowego - punkt wyprzedzonego położenia celu;  $\vec{V}_{OT}$  - wektor określający położenie broni podczas strzelania;  $\vec{\Delta}$  - wektor określający błąd celowania;  $\Psi_\Sigma$  - sumaryczna poprawka kątowa celowania

Fig. 1. The vector diagram of aiming: O - the point in which a munition separates from a carrier; G - a distinctive point of an observation system; the point is connected with a sight; C - the point of a target location at the moment of separating a munition from a carrier;  $C_y$  - the point of a target location after the T time of a munition flight - the point of a foreseen location of a target;  $\vec{V}_{OT}$  - the vector of a weapon location during shooting;  $\vec{\Delta}$  - the vector of an aiming error;  $\Psi_\Sigma$  - a total and angular correction of aiming

Wyprzedzone położenie celu  $C_y$  określa się względem punktu, w którym znajduje się pocisk, wektorem błędu  $\vec{\Delta}$ . Zakładając, że tak dobrano wektor  $\vec{V}_{01}$  i czas T, że wektor błędu będzie równy zero ( $\vec{\Delta} = 0$ ), wówczas z kierunku wektora  $\vec{V}_{01}$ , można wyznaczyć wymagany kierunek położenia broni podczas strzelania określony wektorem  $\vec{V}_{OT}$  [3]. Wektor ten można wyznaczyć z równania (1), ułożonego na podstawie przyjętego schematu celowania, przy założeniu, że  $\vec{\Delta} = 0$ :

$$\vec{V}_{01}^\circ \xi + \vec{b} + \vec{\eta} - \vec{L} - \vec{D} - \vec{B} = 0 \quad (1)$$

gdzie:  $\vec{V}_{01}^\circ = \frac{\vec{V}_0 + \vec{V}_1}{V_{01}}$ ,  $\vec{L} = \vec{V}_C T$  (przy założeniu  $\vec{V}_C = const$  w przedziale  $(0, T)$ ),  $\vec{V}_0$  - wektory prędkości początkowej środka bojowego względem broni,  $\vec{V}_1$  - wektor prędkości unoszenia równy prędkości nosiciela,  $\vec{V}_{01}^\circ$  - wektor jednostkowy bezwzględnej prędkości początkowej środka bojowego,  $\vec{\eta}$  - wektor obniżenia toru lotu środka bojowego,  $\vec{b}$  - wektor balistycznego odchylenia środka bojowego od kierunku  $\vec{V}_{01}$  powstający w wyniku stabilizacji giroskopowej środka bojowego (tzw. efekt burtowy),  $\xi$  - balistyczna odległość lotu środka bojowego, równa modułowi wektora  $\vec{OA}$ ,  $\vec{D}$  - wektor bieżącej odległości do celu,  $\vec{L}$  - wektor cięciwy toru celu,  $\vec{B}$  - wektor bazy - wektor odległości między punktami O i G.

Określenie kierunku wektora  $\vec{V}_{01}^\circ$  w przyjętym układzie współrzędnych realizowane jest poprzez wyznaczenie jego składowych: poziomej i pionowej. Zgodnie z rysunkiem 1 kierunek wektora  $\vec{V}_{01}^\circ$  określany jest poprzez sumaryczną popraw-

The foreseen location of a target  $C_y$  is determined towards a point of a missile location with a vector of error  $\vec{\Delta}$ . Assuming that the vector  $\vec{V}_{01}$  and the time T are selected in such a manner that the vector of an error is zero ( $\vec{\Delta} = 0$ ), then the direction of the vector  $\vec{V}_{01}$  can be used for determining a required location direction of a weapon during shooting (the vector  $\vec{V}_{OT}$ ) [3]. This vector can be determined with the use of the equation (1) which is based on the established diagram of aiming, assuming that  $\vec{\Delta} = 0$ :

$$\vec{V}_{01}^\circ \xi + \vec{b} + \vec{\eta} - \vec{L} - \vec{D} - \vec{B} = 0 \quad (1)$$

where:  $\vec{V}_{01}^\circ = \frac{\vec{V}_0 + \vec{V}_1}{V_{01}}$ ,  $\vec{L} = \vec{V}_C T$  (assuming that  $\vec{V}_C = const$  over the range  $(0, T)$ ),  $\vec{V}_0$  - the vectors of an initial velocity of a munition towards a weapon,  $\vec{V}_1$  - the vector of floating velocity which is equal to a carrier velocity,  $\vec{V}_{01}^\circ$  - the unitary vector of an absolute initial velocity of a munition,  $\vec{\eta}$  - the lowering vector of a munition flight track,  $\vec{b}$  - the vector of a ballistic deviation of a munition from the direction  $\vec{V}_{01}$  (resulting from a gyroscopic stabilization of a munition - so called side effect,  $\xi$  - a ballistic distance of a munition flight (it is equal to the modulus of the vector  $\vec{OA}$ ),  $\vec{D}$  - the vector of an actual distance from a target,  $\vec{L}$  - the vector of a chord of a target track,  $\vec{B}$  - the base vector - the vector of a distance between two points: O and G.

In the established coordinate system, the direction of the vector  $\vec{V}_{01}^\circ$  is determined by determining its components: a horizontal component and a vertical component. According to the

kę kątową  $\Psi_{\Sigma}$ . Zatem, wyznaczone wartości składowe: pionowa  $\Delta\varepsilon$  i pozioma  $\Delta\beta$  sumarycznej poprawki kątowej, określają wartości poziomą i pionową położenia kierunku wektora  $\vec{V}_{01}^o$ .

Sumaryczna poprawka kątowa wyznaczana jest w systemie nawigacyjno-celowniczym (SN-C) w postaci ruchomego znacznika celowniczego zobrazowanego na reflektorze głowicy celowniczej (rys. 2). Zadanie pilota w trakcie celowania i ataku sprowadza się m.in. do pokrycia znacznika celowniczego z celem. Wydaje się, że czynność ta nie powinna sprawiać większych trudności, jednakże oddziaływanie wielu czynników, zarówno wewnętrznych związanych z pracą SN-C, jak i zewnętrznych, związanych z oddziaływaniem otoczenia na statek powietrzny (np. podmuchy wiatru, turbulencje itp.), sprawia, że zadanie to wymaga od pilota zarówno dużej wiedzy, jak i doświadczenia z zakresu funkcjonowania statku powietrznego i jego systemów.

Negatywny wpływ czynników zewnętrznych na wartość wypracowanej informacji celowniczej „osłabiany” jest poprzez różnego rodzaju filtry oraz algorytmy obliczeniowe zaimplementowane w systemach funkcjonalnych statku powietrznego. Z kolei jakość pracy systemu nawigacyjno-celowniczego, uwarunkowana jest dokładnością funkcjonowania urządzeń wchodzących w jego skład i wzajemnie ze sobą współpracujących. Stan techniczny tych urządzeń określany jest za pomocą parametrów diagnostycznych, których wartości rejestrowane są w określonych odstępach czasu. Procedury związane z realizacją takiego sprawdzenia są złożone, a co istotniejsze – czasochłonne. Z tego też względu statek powietrzny podczas realizacji powyższych prac obsługowych zostaje wyłączony z systemu użytkowania, co w przypadku wojskowego statku powietrznego przekłada się na obniżenie potencjału bojowego jednostki wojskowej. Ponadto, niejednokrotnie okazuje się, że przeprowadzanie procedur obsługowych związanych z kontro-

figure 1, the direction of the vector  $\vec{V}_{01}^o$  is established by a total angular correction  $\Psi_{\Sigma}$ . So, the component values: vertical  $\Delta\varepsilon$  and horizontal  $\Delta\beta$  of the total angular correction determine a horizontal and vertical values of the vector  $\vec{V}_{01}^o$  direction.

In the navigation and aiming system, the total angular correction is determined in the form of a moving aiming indicator which is illustrated on the searchlight of an aiming head (figure 2). A pilot's task is reduced to make an aiming indicator coincide with a target during aiming and attacking. It seems that this action shall not cause difficulties. However, the task requires lots of knowledge and experience in respect of functioning an aeroplane and its systems. The task is difficult because it is affected by lots of factors including both internal factors connected with the work of the navigation and aiming system, and external factors connected with the influence of the surroundings on an aeroplane (for example, flurries of wind, turbulences, etc.).

A negative influence of external factors on the aiming information is reduced by various filters and computational algorithms which are implemented in the functional systems of an aircraft. On the other hand, the work quality of the navigation and aiming system depends on the accuracy of working and cooperating devices which belong to the system. A technical condition of these devices is determined with diagnostic parameters whose values are registered at particular intervals. The procedures of checking the technical condition are complex and time consuming. That is why, during service works the operation system of an aircraft is switched off while checking its technical condition, which in the case of a military aircraft results in reducing a combat potential of a military unit. Moreover, very often the service procedures in respect of checking the values of diagnostic parameters turns out to be futile because the diagnostic parameter values are within the limits of a per-



Rys. 2. Widok kokpitu samolotu F-16 oraz siatki celowniczej

Fig. 2. The view of the F 16 aircraft cockpit and an aiming grid

łą wartości parametrów diagnostycznych jest niecelowe, ponieważ wartości parametrów diagnostycznych mieszczą się w granicach dopuszczalnego błędu. Zatem, z uwagi na powyższe, należy zastanowić się czy możliwe jest opracowanie metody określania czasu po upływie którego należy przeprowadzić prace obsługowe mające na celu regulację określonych urządzeń wchodzących w skład SN-C.

Jednym z najistotniejszych elementów SN-C jest głowica celownicza na której wyświetlana jest informacja celownicza w postaci ruchomego znacznika celowniczego. Jego położenie na reflektorze głowicy można określić przy pomocy dwóch współrzędnych: poziomej i pionowej. W trakcie trwania procesu eksploatacyjnego realizowane są określone prace obsługowe w trakcie których rejestrowane są również wartości parametrów diagnostycznych. Parametry te określają kontrolne położenie znacznika celowniczego. Dokonując analizy zmian wartości tychże parametrów diagnostycznych można zauważyć, że przyjmują one różne wartości, zatem ich rozmieszczenie tworzy określone pole rozrzutu. Mając na uwadze losowy charakter przyjmowanych wartości do opisu ich zmian można przyjąć poniższą zależność:

$$u(z, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a_1 t}} \frac{1}{\sqrt{2\pi a_2 t}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left[ \frac{(z - b_1 t)^2}{a_1 t} + \frac{(y - b_2 t)^2}{a_2 t} \right] \right] \quad (2)$$

gdzie:  $z, y$  - zmienne losowe parametrów diagnostycznych,  $b_1 t, b_2 t$  - wartość średnia przyrostu odchyłek parametrów diagnostycznych w przedziale czasu  $(0, t)$ ,  $a_1 t, a_2 t$  - wariancja przyrostu odchyłek parametrów diagnostycznych zależna od czasu.

Wprowadzając nowe zmienne losowe:

$$\begin{aligned} z_* &= z - b_1 t, \\ y_* &= y - b_2 t, \end{aligned} \quad (3)$$

otrzymano nową postać funkcji gęstości:

$$u(z_*, y_*, t) = \frac{1}{2\pi \sqrt{a_1 t a_2 t}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{z_*^2}{a_1 t} + \frac{y_*^2}{a_2 t} \right)} \quad (4)$$

Powyższa funkcja  $u(z_*, y_*, t)$  przyjmuje stałą wartość, gdy:

$$\frac{z_*^2}{a_1 t} + \frac{y_*^2}{a_2 t} = \kappa^2 \quad (5)$$

Równanie (5) opisuje elipsę rozrzutu. Pole tej elipsy oznaczone zostało przez  $S_\kappa$ . Zatem, prawdopodobieństwo tego, że  $(z_*, y_*) \in S_\kappa$  można określić rozwiązując równanie:

$$P((z_*, y_*) \in S_\kappa) = \iint_{S_\kappa} \frac{1}{2\pi \sqrt{a_1 t} \sqrt{a_2 t}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{z_*^2}{a_1 t} + \frac{y_*^2}{a_2 t} \right)} dz_* dy_* \quad (6)$$

Przeprowadzając zamianę zmiennych  $z_*$  na  $\mu = \frac{z_*}{\sqrt{a_1 t}}$  i  $y_*$  na  $\nu = \frac{y_*}{\sqrt{a_2 t}}$  i podstawiając nowe zmienne do wzoru (5) otrzymano zależność:

$$\mu^2 + \nu^2 = \kappa^2 = r^2 \quad (7)$$

missible error. So, taking the foregoing into account, one shall wonder if it is possible to develop the method of determining the time after which the service works (whose aim is to regulate particular devices belonging to the navigation and aiming system) shall be done.

One of the most important parts of the navigation and aiming system is an aiming head displaying an aiming information in the form of a moving aiming indicator. Its location can be determined with the use of two coordinates: a horizontal coordinate and a vertical one. Particular service works are done during the process of exploitation. The values of diagnostic parameters are registered during the service works. These parameters determine a control location of an aiming indicator. While analyzing the changes of the parameter values, it can be seen that the parameters have various values. Therefore, the parameter location determines a particular dispersion field. Taking a random character of the values into consideration, the changes of the values can be described with the use of a dependence presented below:

where:  $z, y$  - random variables of diagnostic parameters,  $b_1 t, b_2 t$  - an average value of the growth in deviation of diagnostic parameters over the range of time  $(0, t)$ ,  $a_1 t, a_2 t$  - the variation of the growth in deviation of diagnostic parameters (depending on time).

Introducing new random variables:

$$\begin{aligned} z_* &= z - b_1 t, \\ y_* &= y - b_2 t, \end{aligned} \quad (3)$$

a new form of a density function was obtained:

$$u(z_*, y_*, t) = \frac{1}{2\pi \sqrt{a_1 t a_2 t}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{z_*^2}{a_1 t} + \frac{y_*^2}{a_2 t} \right)} \quad (4)$$

The above function  $u(z_*, y_*, t)$  is constant if:

$$\frac{z_*^2}{a_1 t} + \frac{y_*^2}{a_2 t} = \kappa^2 \quad (5)$$

The equation (5) describes the ellipse of dispersion.  $S_\kappa$  - the field of the ellipse. So, the probability that  $(z_*, y_*) \in S_\kappa$  can be determined by solving the following equation:

$$P((z_*, y_*) \in S_\kappa) = \iint_{S_\kappa} \frac{1}{2\pi \sqrt{a_1 t} \sqrt{a_2 t}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{z_*^2}{a_1 t} + \frac{y_*^2}{a_2 t} \right)} dz_* dy_* \quad (6)$$

Changing variables  $z_*$  into  $\mu = \frac{z_*}{\sqrt{a_1 t}}$  and  $y_*$  into  $\nu = \frac{y_*}{\sqrt{a_2 t}}$  and inserting new variables into the formula (5) the following dependence was obtained:

$$\mu^2 + \nu^2 = \kappa^2 = r^2 \quad (7)$$

Równanie (7) jest równaniem okręgu. Dla odróżnienia pole okręgu oznaczono przez  $C_\kappa$ . W wyniku zamiany zmiennych nastąpiło przekształcenie elipsy (5) w okrąg (7). Stąd zależność (6) zapisano w postaci

$$P((z_*, y_*) \in S_\kappa) = \frac{1}{2\pi} \iint_{C_\kappa} e^{-\frac{1}{2}(\mu^2 + \nu^2)} d\mu d\nu \quad (8)$$

We wzorze (8) całkowanie wykonywane jest po okręgu  $C_\kappa$ , zatem dla obliczenia tej całki wprowadzono współrzędne biegunowe:

$$\mu = \rho \cos \varphi, \quad \nu = \rho \sin \varphi \quad (9)$$

dla których to współrzędnych jacobian będzie miał postać:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} & \frac{\partial \mu}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \nu}{\partial \rho} & \frac{\partial \nu}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho \quad (10)$$

Uwzględniając powyższe, zależność (8) można zapisać następująco:

$$P((z_*, y_*) \in S_\kappa) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\kappa e^{-\frac{1}{2}\rho^2} \rho d\rho \quad (11)$$

Wykorzystując zamianę zmiennych obliczono całkę:

$$\int_0^\kappa e^{-\frac{1}{2}\rho^2} \rho d\rho = \begin{cases} z = \rho^2 & \rho = \kappa \Rightarrow z = \kappa^2 \\ \frac{dz}{d\rho} = 2\rho \Rightarrow \rho d\rho = \frac{1}{2} dz & \rho = 0 \Rightarrow z = 0 \end{cases} = \int_0^{\kappa^2} e^{-\frac{1}{2}z} \frac{1}{2} dz = \frac{1}{2} \int_0^{\kappa^2} e^{-\frac{1}{2}z} dz = \frac{1}{2} (-2) e^{-\frac{1}{2}z} \Big|_0^{\kappa^2} = - \left( e^{-\frac{\kappa^2}{2}} - e^0 \right) = 1 - e^{-\frac{\kappa^2}{2}} \quad (12)$$

natomiast:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{2\pi} (2\pi - 0) = 1 \quad (13)$$

Stąd:

$$P((z_*, y_*) \in S_\kappa) = 1 - e^{-\frac{\kappa^2}{2}} \quad (14)$$

Zależność (14) określa prawdopodobieństwo tego, że odchyłki położenia punktu centralnego  $z_*$  i  $y_*$  będą zawarte w elipsie  $S_\kappa$  o półosiach  $\kappa\sqrt{a_1t}$  i  $\kappa\sqrt{a_2t}$ . Przyjmując, że:

$$\sqrt{a_1t} = \sqrt{a_2t} = \sqrt{at} \quad (15)$$

wówczas elipsa rozrzutu (15) przekształca się w okrąg:

$$\left( \frac{z_*}{\sqrt{at}} \right)^2 + \left( \frac{y_*}{\sqrt{at}} \right)^2 = \kappa^2, \quad z_*^2 + y_*^2 = (\kappa\sqrt{at})^2 = r^2 \quad (16)$$

którego promień wynosi:

$$r = \kappa\sqrt{at}, \quad \kappa = \frac{r}{\sqrt{at}} \quad (17)$$

Dokonując podstawienia powyższej zależności do równania (14) otrzymano:

$$P((z_*, y_*) \in C_\kappa) = 1 - e^{-\frac{r^2}{2at}} \quad (18)$$

gdzie:  $\sqrt{at}$  - jest odchyleniem standardowym.

The equation (7) is the equation of a circle.  $C_\kappa$  - means the field of the circle. The change of variables resulted in the transformation of the ellipse (5) into the circle (7). Thus, the dependence (6) was written in the form

$$P((z_*, y_*) \in S_\kappa) = \frac{1}{2\pi} \iint_{C_\kappa} e^{-\frac{1}{2}(\mu^2 + \nu^2)} d\mu d\nu \quad (8)$$

In the formula (8) there is the integration of the circle  $C_\kappa$ . To calculate the integral, polar coordinates were introduced:

$$\mu = \rho \cos \varphi, \quad \nu = \rho \sin \varphi \quad (9)$$

Jacobi elliptic function for these coordinates will be as following:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} & \frac{\partial \mu}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \nu}{\partial \rho} & \frac{\partial \nu}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho \quad (10)$$

Taking the foregoing into account, the dependence (8) can be written down as follows:

$$P((z_*, y_*) \in S_\kappa) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\kappa e^{-\frac{1}{2}\rho^2} \rho d\rho \quad (11)$$

Using the change of variables, the integral was calculated:

$$\int_0^\kappa e^{-\frac{1}{2}\rho^2} \rho d\rho = \begin{cases} z = \rho^2 & \rho = \kappa \Rightarrow z = \kappa^2 \\ \frac{dz}{d\rho} = 2\rho \Rightarrow \rho d\rho = \frac{1}{2} dz & \rho = 0 \Rightarrow z = 0 \end{cases} = \int_0^{\kappa^2} e^{-\frac{1}{2}z} \frac{1}{2} dz = \frac{1}{2} \int_0^{\kappa^2} e^{-\frac{1}{2}z} dz = \frac{1}{2} (-2) e^{-\frac{1}{2}z} \Big|_0^{\kappa^2} = - \left( e^{-\frac{\kappa^2}{2}} - e^0 \right) = 1 - e^{-\frac{\kappa^2}{2}} \quad (12)$$

whereas:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{2\pi} (2\pi - 0) = 1 \quad (13)$$

Thus:

$$P((z_*, y_*) \in S_\kappa) = 1 - e^{-\frac{\kappa^2}{2}} \quad (14)$$

The dependence (14) determines the probability that the deviations of central point location  $z_*$  and  $y_*$  will be included in the ellipse  $S_\kappa$  with semi axes  $\kappa\sqrt{a_1t}$  and  $\kappa\sqrt{a_2t}$ . Providing that:

$$\sqrt{a_1t} = \sqrt{a_2t} = \sqrt{at} \quad (15)$$

then the ellipse of dispersion (15) changes into the circle:

$$\left( \frac{z_*}{\sqrt{at}} \right)^2 + \left( \frac{y_*}{\sqrt{at}} \right)^2 = \kappa^2, \quad z_*^2 + y_*^2 = (\kappa\sqrt{at})^2 = r^2 \quad (16)$$

whose radius is:

$$r = \kappa\sqrt{at}, \quad \kappa = \frac{r}{\sqrt{at}} \quad (17)$$

Inserting the above dependence into the equation (14) the following result was obtained:

$$P((z_*, y_*) \in C_\kappa) = 1 - e^{-\frac{r^2}{2at}} \quad (18)$$

where:  $\sqrt{at}$  - a standard deviation.

Wykorzystując powyższą zależność można wyznaczyć przedział czasu, po którym należy dokonać kontrolnego sprawdzenia parametrów urządzenia. Zapisując funkcję (18) jako:

$$P^* \left( (z_*, y_*) \in C_{\kappa} \right) = 1 - e^{-\frac{\phi^2}{2at}} \quad (19)$$

gdzie:  $\phi$  - dopuszczalna wartość promienia okręgu, którego przekroczenie przez zmienną losową powoduje utratę parametrów nominalnych pracy urządzenia,  $P^* \left( (z_*, y_*) \in C_{\kappa} \right)$  - założone prawdopodobieństwo z jakim chcemy aby parametr użytkowy nie przekroczył wartości  $\phi$ , oraz dokonując poniższych przekształceń wyznaczono zależności na wartość czasu po którym nastąpi przekroczenie przez urządzenie dopuszczalnych wartości błędu granicznego. Logarytmując równanie:

$$P^* = 1 - e^{-\frac{\phi^2}{2at}} \quad (20)$$

otrzymano zależności (21) i (22):

$$\ln P^* = \ln 1 - \left( -\frac{\phi^2}{2at} \right) \ln e \quad (21)$$

$$\ln P^* = \frac{\phi^2}{2at} \quad (22)$$

W zależności (22) wyrazem niewiadomym jest parametr  $t$ , doprowadzając zatem do zlokalizowania go po jednej ze stron równania otrzymano:

$$2at \ln P^* = \phi^2 \quad (23)$$

$$t^* = \frac{\phi^2}{2a \ln P^*} \quad (24)$$

Podstawiając za zmienną  $P^*$  określoną wartość można określić parametr  $t^*$  charakteryzujący czas, po którym należy wykonać sprawdzenie parametrów użytkowych urządzenia aby uniknąć sytuacji przekroczenia przez błąd aparaturowy wartości dopuszczalnej. A zatem, czas użytkowania urządzenia będzie uwarunkowany parametrem  $t^*$ :

$$T = t^* \quad (25)$$

W sytuacji gdy występuje przesunięcie położenia znacznika celowniczego, wzór (20) przyjmuje postać

$$P^* = 1 - e^{-\frac{(\phi - bt)^2}{2at}} \quad (26)$$

Przekształcając równanie (26) tak, aby można było wyznaczyć parametr  $t$ :

$$\ln P^* = \ln 1 - \left( -\frac{(\phi - bt)^2}{2at} \right) \ln e \quad (27)$$

$$\ln P^* = \frac{(\phi - bt)^2}{2at} \quad (28)$$

$$2at \ln P^* = (\phi - bt)^2 \quad (29)$$

$$2at \ln P^* = \phi^2 - 2\phi bt + b^2 t^2 \quad (30)$$

$$2at \ln P^* - \phi^2 + 2\phi bt - b^2 t^2 = 0 \quad (31)$$

Using the above dependence, the period of time (after which a control check of a device parameters shall be done) can be determined. Writing down the function (18) as:

$$P^* \left( (z_*, y_*) \in C_{\kappa} \right) = 1 - e^{-\frac{\phi^2}{2at}} \quad (19)$$

where:  $\phi$  - a permissible value of the circle radius; if a random variable exceeds it, nominal parameters are lost,  $P^* \left( (z_*, y_*) \in C_{\kappa} \right)$  - an assumed probability in the case of which an operational parameter shall not exceed the value  $\phi$ , and performing the below transformations, dependences concerning the time were determined (the time after which a device will exceed permissible values of the error limit). The logarithm of the equation:

$$P^* = 1 - e^{-\frac{\phi^2}{2at}} \quad (20)$$

provides the dependences (21) and (22):

$$\ln P^* = \ln 1 - \left( -\frac{\phi^2}{2at} \right) \ln e \quad (21)$$

$$\ln P^* = \frac{\phi^2}{2at} \quad (22)$$

In the dependence (22)  $t$  parameter is the unknown. Localizing the parameter on one side of the equation, the result was as follows:

$$2at \ln P^* = \phi^2 \quad (23)$$

$$t^* = \frac{\phi^2}{2a \ln P^*} \quad (24)$$

Substituting  $P^*$  with a particular value, it is possible to determine  $t^*$  denoting time after which the operational parameters of a device shall be checked. So, the time of a device exploitation will depend on  $t^*$ .

$$T = t^* \quad (25)$$

If there is a location shift of an aiming indicator, the formula (20) has the following form

$$P^* = 1 - e^{-\frac{(\phi - bt)^2}{2at}} \quad (26)$$

Transforming the equation (26) in such a manner as to determine the parameter  $t$ :

$$\ln P^* = \ln 1 - \left( -\frac{(\phi - bt)^2}{2at} \right) \ln e \quad (27)$$

$$\ln P^* = \frac{(\phi - bt)^2}{2at} \quad (28)$$

$$2at \ln P^* = (\phi - bt)^2 \quad (29)$$

$$2at \ln P^* = \phi^2 - 2\phi bt + b^2 t^2 \quad (30)$$

$$2at \ln P^* - \phi^2 + 2\phi bt - b^2 t^2 = 0 \quad (31)$$

otrzymano równanie kwadratowe:

$$b^2 t^2 - (2a \ln P^* + 2\phi b)t + \phi^2 = 0 \quad (32)$$

którego rozwiązaniem jest wartość parametru  $t^*$  warunkująca czas wykonania prac obsługowych.

### 3. Wnioski

Przedstawiona metoda może w istotny sposób przyczynić się do usprawnienia procesu eksploatacyjnego nie tylko analizowanej w opracowaniu głowicy celowniczej, ale również innych urządzeń, których stan techniczny określany jest w oparciu o analizę wartości parametrów diagnostycznych. W przypadku analizowanego urządzenia zastosowanie przedstawionej metody może skutkować wydłużeniem czasu przebywania głowicy celowniczej w systemie użytkowania. Następstwem tej sytuacji jest lepsze wykorzystanie urządzenia i nie dopuszczenie do obniżenia potencjału bojowego jednostki wojskowej.

Znajomość czasu, po którym nastąpi przekroczenie dopuszczalnej wartości błędu może stanowić jeden z elementów umożliwiających przejście na eksploatację wg stanu technicznego zakładając, że diagnozowany parametr umożliwia określenie stanu technicznego urządzenia. Powyższe zagadnienie będzie analizowane w kolejnych publikacjach.

### 4. References

- [1] Abezgauz G.: *Rachunek probabilistyczny*. Poradnik. Wydawnictwo Ministra Obrony Narodowej, Warszawa 1973.
- [2] Fisz M.: *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1958.
- [3] Kaczmarski W.: *Uzbrojenie lotnicze cz II. Celowniki lotnicze*. Podręcznik. Dowództwo Wojsk Lotniczych, Poznań 1990.
- [4] Samolot Su-22M4. Książka 7. Uzbrojenie cz VII. Technologia obsługi okresowych. Dowództwo Wojsk Lotniczych i Obrony Powietrznej, Poznań 1986.
- [5] Skomra A., Tomaszek H., Wróblewski M.: *Charakterystyki taktyczno-techniczne i skuteczność lotniczych środków bojowych*. Skrypt WAT, Warszawa 1999.
- [6] Ważny M.: *Badanie eksploatacyjnych przyczyn rozrzutu wybranych środków bojowych i ich wpływu na skuteczność systemów uzbrojenia lotniczego*. WAT, Warszawa 2003.

the following quadratic equation was obtained:

$$b^2 t^2 - (2a \ln P^* + 2\phi b)t + \phi^2 = 0 \quad (32)$$

whose result is the parameter  $t^*$  value conditioning the time of performing service works.

### 3. Conclusions

The method presented above can contribute to the improvement of exploitation process concerning both an aiming head which was analyzed in the study and other devices whose technical condition is determined on the basis of analyzing diagnostic parameters values. In the case of the device analyzed above, the implementation of the method can result in prolonging the time concerning the use of an aiming head. Consequently, the device can be used in a better way and the reduction of a military unit combat potential can be avoided.

The knowledge about the time after which there will be the exceedance of a permissible error value can be one of the elements enabling a transition to an exploitation according to a technical condition, assuming that a diagnostic parameter (which is being diagnosed) enables to determine a technical condition of a device. The above mentioned issue will be analyzed in the following publications.

---

**Dr inż. Mariusz WAŻNY**

Wojskowa Akademia Techniczna  
Wydział Mechatroniki  
ul. Kaliskiego 2  
00-908 Warszawa 49  
tel. (0-22) 6837619  
faks (0-22) 6857581

---