

ROBERT OLSZEWSKI
Zakład Kartografii Politechniki Warszawskiej

Interpolacja fraktalna jako stochastyczna odwrotność generalizacji kartograficznej

Zarys treści. W artykule pokazano możliwość zastosowania interpolacji mono- i multifraktalnej jako stochastycznej odwrotności procesu generalizacji kartograficznej. W celu lepszego zrozumienia zagadnienia omówiono podstawowe pojęcia geometrii fraktalnej.

Wprowadzenie

W procesie opisu i poznania środowiska przyrodniczego istotną rolę odgrywa kartografia. Współczesna technologia pozwala na stosunkowo proste i efektywne pozyskiwanie danych źródłowych o charakterze przestrzennym. Zadaniem kartografii staje się więc poszukiwanie nowych metod pozwalających na optymalne wykorzystanie informacji zgromadzonych m. in. w numerycznych bazach danych. Dużą rolę odgrywa tu kartograficzna metoda badań (A. M. Berlant 1978). Polega ona na wykorzystywaniu map w procedurach badawczych służących do analizy zjawisk o charakterze przestrzennym, a także pozwala na stosowanie optymalnych sposobów udostępniania wyników w formie kartograficznej. Badania sposobów wykorzystania map i zastosowania wyników analizy kartograficznej w naukach przyrodniczych rozszerzyły zakres pojęciowy kartografii. Pozwoliło to na uznanie kartografii za naukę interdyscyplinarną, pełniącą rolę ogniwa integracji naukowej tych dziedzin, których przedmiotem poznania są rozmieszczone w przestrzeni geograficznej zjawiska przestrzenno-czasowe (W. Grygorenko 1991).

Głównym zadaniem kartografii w zakresie kartograficznej metody badań jest opracowanie nowych sposobów analizy danych przestrzennych. W znacznej mierze polegają one na adaptacji procedur należących do innych gałęzi nauki. Istotą kartograficznej metody badań nie jest tworzenie „specyficznie kartograficznych”

sposobów badania zależności empirycznych, lecz umiejętny dobór i zastosowanie tych technik badawczych, które pozwalają na przetwarzanie danych przestrzennych oraz określanie prawidłowości występowania i współzależności zjawisk.

W artykule przedstawiono próbę zastosowania analizy fraktalnej w kartograficznym badaniu wybranych komponentów abiotycznych środowiska przyrodniczego. Opracowanie przez B. B. Mandelbrota w latach siedemdziesiątych ubiegłego wieku geometrii i analizy fraktalnej stanowiło przełom w matematyce eksperymentalnej. Dla wielu dziedzin nauki, zwłaszcza nauk przyrodniczych opis fraktalny stał się integrującym narzędziem interdyscyplinarnym. Wykorzystywanie procedur badawczych, wywodzących się z tego działu matematyki, może przyczynić się także do rozwoju kartograficznej metody badań.

Mapa jako środek przekazu informacji chorologicznej (informacji o rozmieszczeniu obiektów i zjawisk w przestrzeni geograficznej oraz o związkach wynikających z tego rozmieszczenia) podlega ograniczeniom związanym z pojemnością kanału informacyjnego (L. Ratajski 1989). Pojemność informacyjna mapy wynika ze skali opracowania, jej przeznaczenia, stosowanych metod prezentacji treści oraz ograniczeń natury technicznej. W procesie przekazu kartograficznego istnieje zatem konieczność celowej redukcji informacji źródłowej.

Generalizacja polega na redukcji liczby sygnałów informujących o położeniu i cechach obiektów i zjawisk w rzeczywistości. Istotą generalizacji kartograficznej jest „wybór rzeczy najważniejszych i istotnych oraz ich celowe uogólnienie” (K.A. Saliszczew 1998), mające na celu prezentację na mapie pewnych cech rzeczywistości z uwypukleniem zasadniczych, typowych cech i charakterystycznych właściwości. Generalizacja

wiąże się z utratą części danych źródłowych, dlatego w procesie generalizacji kartograficznej kluczowe jest zachowanie istoty treści mapy (M.-J. Kraak, F. Ormeling 1998). Analiza fraktalna obiektów geometrycznych umieszczonych na mapie pozwala na określenie ich unikatowych parametrów metrycznych, istotnych z punktu widzenia generalizacji kartograficznej.

Geometria fraktalna

W 1967 B. B. Mandelbrot zadał trywialne z pozoru pytanie, „jak długie jest wybrzeże Wielkiej Brytanii?” Udzielona przez niego nietrywialna odpowiedź stała się impulsem do zastosowania geometrii i analizy fraktalnej w badaniach przyrodniczych. Wprowadzone przez Mandelbrota (1982) pojęcie wymiaru fraktalnego (D_f) na trwałe weszło do kanonu modelowania matematycznego. Geometria fraktalna posłużyła licznym autorom do opisu linii brzegowych, sieci rzecznych oraz powierzchni topograficznych (P. Burrough 1993).

Wiele kształtów występujących w naturze, takich jak chmury, linie brzegowe, łańcuchy górskie jest zbyt złożonych, aby móc je wyrazić językiem klasycznej geometrii euklidesowej. Obserwacje zjawisk naturalnych (np. sieci wodnej, rafy koralowej) wskazują, iż wielkoskalowe struktury złożone są z mniejszych komponentów wykazujących podobieństwo formy i budowy. Struktury te, jako nie poddające się opisowi w postaci formuł algebraicznych, uznawano za „bezkształtne”. Podobnie traktowano złożone matematyczne formy geometryczne, nieredukowalne do zbioru prostych figur typu okrąg lub kwadrat. Aż do lat siedemdziesiątych XX wieku opis konstrukcji geometrycznej Cantora, Peano, Sierpińskiego czy Kocha określano jako „patologiczny” (B. B. Mandelbrot 1982).

Opis geometryczny złożonych kształtów występujących w naturze nie jest możliwy w języku klasycznej geometrii euklidesowej, której przedmiotem badań są figury regularne, takie jak koła lub elipsy. Metody badawcze współczesnej geometrii różniczkowej nie wymagają wprawdzie, aby analizowane obiekty były regularne, narzucają jednak warunek ich różniczkowości (M. Tempczyk 1998). Klasyczna analiza matematyczna umożliwia badanie funkcji mającej skończoną liczbę nieróżniczkowalnych ostrych wierzchołków, lecz zawodzi w opisie całkowicie nieróżniczkowalnych struktur fraktalnych. Analiza fraktalna umożliwia nie tylko opis tych struktur, lecz pozwala także na ich modelowanie.

Termin *fraktal* wywodzi się od łacińskiego przy-

miotnika *fractus* i czasownika *frangere* oznaczającego łamać, tworzyć nieregularne części. Słowo to według B. B. Mandelbrota (1977) związane jest także z angielskim *fragmented*, oznacza więc kształt zarówno nieregularny jak i złożony z fragmentów tworzących skomplikowaną strukturę. Nie istnieje jednoznaczna definicja fraktala. B. B. Mandelbrot (1982) zaproponował, aby za fraktal uważać konstrukcję geometryczną, dla której wymiar Hausdorffa-Besicovitcha jest większy od jej wymiaru topologicznego. Definicja ta, jako nie obejmująca jednak wszystkich struktur geometrycznych uznawanych za fraktale, została zastąpiona przez opisowe stwierdzenie – „fraktal jest kształtem złożonym z części podobnych w pewien sposób do całości” (B. B. Mandelbrot 1986, J. Feder 1988). D. Green (1995) uważa, że fraktalem jest każda krzywa lub powierzchnia niezależna od skali obserwacyjnej. Z. Adamczewski (1992) proponuje, aby fraktal traktować jako niedefiniowalne pojęcie pierwotne. K. Falconer (1997) uważa zaś, że termin *fraktal* powinien być traktowany podobnie jak pojęcie życia w naukach biologicznych. Oznacza to zastąpienie ścisłej definicji zbiorem właściwości charakteryzujących strukturę fraktalną:

- fraktal nie jest określony przez wzór matematyczny w postaci formuły algebraicznej,
- fraktal posiada cechę samopodobieństwa ścisła (jego część jest zmniejszoną kopią całości) lub statystyczną,
- tzw. wymiar fraktalny obiektu – D_f (definiowany wieloma metodami), określający stopień złożoności geometrycznej, jest zazwyczaj większy niż jego wymiar topologiczny – D_t ,
- fraktal jest niezależny od skali obserwacyjnej (niezmienniczość skalowa). Dowolnie mały fragment jest z dokładnością do współczynnika redukcji identyczny z całością.

R. Voss (1990) zauważa także, iż fraktale nie posiadają specyficznego „rozmiaru” obserwacyjno-badawczego. Jest to jednak cecha pochodna względem samopodobieństwa i niezmienniczości skalowej.

Przykładem deterministycznej figury fraktalnej jest krzywa Kocha (ryc. 1). Opis jej tworzenia i niezwykle właściwości podał w 1904 roku szwedzki matematyk Helge von Koch. Krzywa ta jest przykładem ilustrującym odkrycie Karla Weierstrassa z 1872 r. – krzywej nieróżniczkowalnej. W sensie geometrycznym oznacza to, iż krzywa ta nie posiada stycznej w żadnym punkcie.

Opis konstrukcji krzywej Kocha ma charakter procedury rekurencyjnej. Oznacza to, iż kształt krzywej przybliżany jest w kolejnych krokach;

w każdym z nich stosowany jest ten sam algorytm przekształcenia. Za obiekt początkowy, zwany inicjatorem (ryc. 1a) przyjmijmy odcinek jednostkowy. Podzielmy go na trzy równe części, w miejsce środkowej wstawmy trójkąt równoboczny pozbawiony podstawy. Uzyskana figura, zwana generatorem (ryc. 1b) występuje w zmniejszonych kopiach w kolejnych krokach. W każdym z nich stosujemy ten sam algorytm do każdego z powstałych odcinków (H.-O. Peitgen, H. Jurgens, D. Saupe 1997). Rycina 1 pokazuje pierwsze kroki konstrukcji krzywej Kocha. Ostateczna krzywa (po wykonaniu nieskończonej liczby kroków iteracji) złożona jest „z zagięcia w zagięciu”, tzn. nie zawiera żadnych prostych odcinków.

Podstawową cechą, charakteryzującą konstrukcję tej krzywej, jest samopodobieństwo. Każda z czterech części w i -tym kroku jest trzykrotnie pomniejszoną kopią całej krzywej w $(i-1)$ kroku. W każdym kroku iteracji długość krzywej Kocha wzrasta o czynnik $\frac{4}{3}$. Niezależnie od długości inicjatora, graniczna długość krzywej Kocha jest nieskończona.

Fraktale losowe

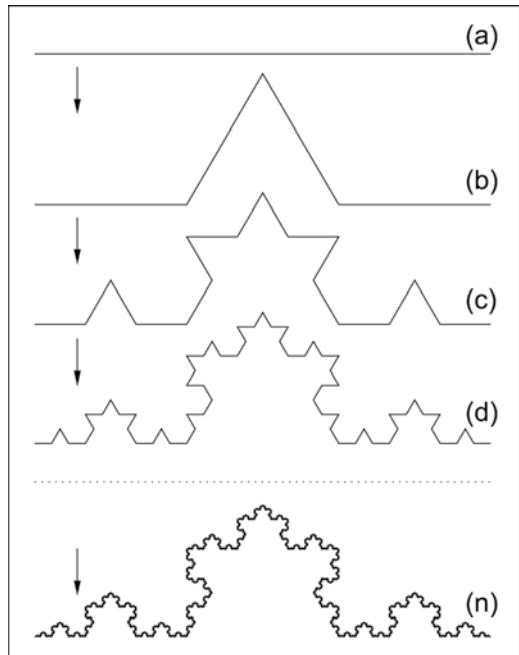
B. B. Mandelbrot (1982) i J. Feder (1988) twierdzą, iż „geometria natury” jest geometrią fraktali. W przyrodzie nie występują jednak matematycznie „czyste” fraktale deterministyczne (K. Falconer 1997). Analogicznie w przyrodzie nie występują idealne okręgi, elipsy lub proste. Równanie elipsy stanowi jednak dobre przybliżenie orbity planetarnej, podobnie jak tzw. losowa krzywa Kocha (ryc. 2) pozwala na modelowanie niektórych linii brzegowych.

Fraktale losowe charakteryzuje samopodobieństwo statystyczne (każdy fragment obiektu charakteryzuje ta sama funkcja rozkładu prawdopodobieństwa). Oznacza to, że dowolny fragment z dokładnością do skali obserwacyjnej (współczynnika redukcji wielkości) jest wizualnie podobny do całej figury.

Wymiarowanie fraktalne

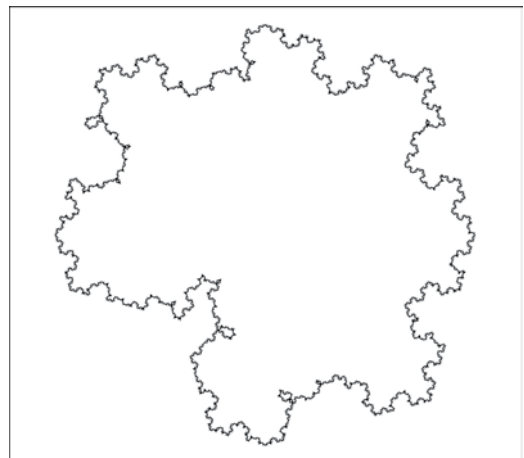
Obok samopodobieństwa drugą cechą charakteryzującą fraktale jest ich wymiar. Zarówno pojęcie wymiaru obiektu, jak i sposób jego obliczenia nie są definiowane w sposób jednoznaczny. Z punktu widzenia geometrii Euklidesa punkt jest obiektem jednowymiarowym, linia – dwuwymiarowym, powierzchnia zaś – trójwymiarowym.

Z punktu widzenia topologii punkt jest obiektem zerowymiarowym, linia obiektem jednowymiaro-



Ryc. 1. Konstrukcja krzywej Kocha

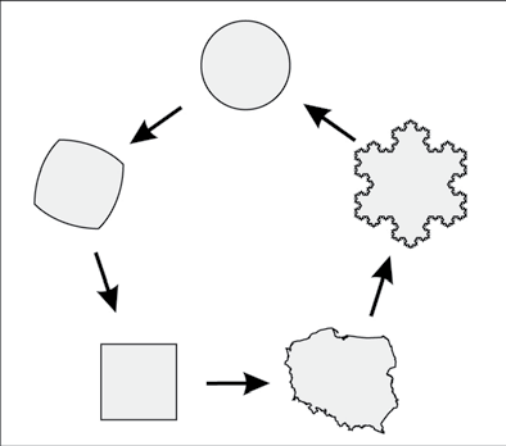
Fig. 1. Koch's curve construction



Ryc. 2. Losowa krzywa Kocha (w każdym kroku iteracyjnym kierunek zastępowania środkowego odcinka trójkątem równobocznym określany jest za pomocą generatora liczb losowych, program własny autora)

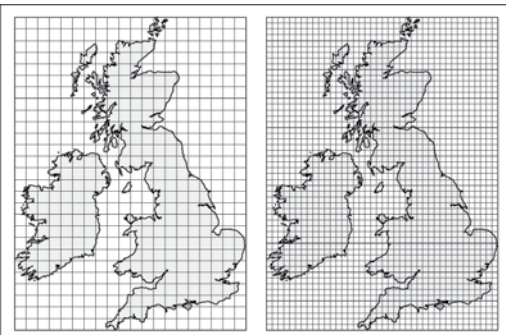
Fig. 2. Random Koch's curve (in every iteration the direction of replacement of the middle section with an equilateral triangle is set by a random numbers generator; original software by the author)

wym, figura zaś, np. kwadrat – dwuwymiarowym. Konsekwentnie bryła przestrzenna, np. sześcián ma wymiar 3. Przekształcenie homeo-morficzne



Ryc. 3. Przekształcenia homeomorficzne nie zmieniają właściwości topologicznych obiektów geometrycznych ($D_t = 2$)

Fig. 3. Homeomorphic transformations do not alter the value of topological geometric objects ($D_t = 2$)



Ryc. 4. Określanie wymiaru pudełkowego wybrzeża Wielkiej Brytanii

Fig. 4. Defining of the fractal box dimension of the shoreline of Great Britain

(tzn. ciągle wzajemnie jednoznaczne przekształcenie mające ciągle przekształcenie odwrotne), działające na obiekt, nie zmienia jego właściwości topologicznych (R. Engelking 1977). Oznacza to, iż np. kwadrat i płatek Kocha są topologicznie równoważne, charakteryzowane przez wymiar topologiczny $D_t = 2$. Rycina 3 przedstawia topologiczną równoważność płaskich figur geometrycznych.

Konstrukcje krzywej Hilberta i Peano (krzywej wypełniającej efektywnie przestrzeń o $D_t = 2$) skłoniły matematyków na przełomie XIX i XX

wieku do zdefiniowania innych metod określania wymiaru obiektów, uwzględniających stopień ich złożoności.

Pojęcia wymiarów: Hausdorffa, pokryciowego, homologicznego, samopodobieństwa itp. pozwalają na zróżnicowanie obiektów o jednakowym wymiarze topologicznym. Wymiar Hausdorffa charakteryzuje wyłącznie geometryczne właściwości obiektu. Jest to pojęcie najbardziej uniwersalne i zarazem najtrudniejsze do praktycznego zastosowania.

W wielu przypadkach dobrymi przybliżeniami wymiaru Hausdorffa (wymiaru fraktalnego) mogą być wymiar Kołmogorowa, pudełkowy, cyrkłowy lub samopodobieństwa. Należy jednak podkreślić, iż niekiedy obliczanie wymiaru fraktalnego różnymi metodami może prowadzić do uzyskania różnych wyników (K. Falconer 1997). Wymiar fraktalny (D_f) obiektu charakteryzuje stopień jego nieregularności – złożoność struktury (Z. Xia, K. Clarke 1997) oraz określa stopień wypełnienia dostępnej przestrzeni przez dany obiekt. Wymiar fraktalny jest z reguły wyższy niż wymiar topologiczny obiektu; D_f wyrażony jest najczęściej liczbą ułamkową.

Poniżej omówiono dwie różne metody wyznaczania wymiaru fraktalnego.

Wymiar samopodobieństwa

Obiekt geometryczny nazywamy ściśle samopodobnym, jeżeli może być podzielony na dowolnie małe części, z których każda jest wierzniym zmniejszeniem całości (H.-O. Peitgen, H. Jurgens, D. Saupe 1997).

Samopodobieństwo obiektu nie oznacza, iż jest on fraktalem (np. odcinek lub kwadrat mogą być rozbite na mniejsze części otrzymane w wyniku przekształcenia zachowującego podobieństwo całej figury). Dla figur fraktalnych współczynniki redukcji przekształceń podobieństwa są ściśle określone i zależne od danej figury. Determinują one jej fraktalny wymiar samopodobieństwa.

Dla krzywej Kocha stosunek liczby części figury podstawowej (generatora) do odwrotności współczynnika redukcji wielkości wynosi $4/3$ w pierwszym kroku, $16/9$ w drugim kroku i ogólnie $(4/3)^i$ w i -tym kroku.

Dla dowolnego obiektu samopodobnego istnieje związek między współczynnikiem redukcji – s i liczbą części – a , na które obiekt ten jest podzielony. Związek ten ma postać:

$$a = \frac{1}{s^D} \quad \text{lub równoważnie} \quad D_s = \frac{\log(a)}{\log(1/s)} \quad (1)$$

gdzie D_s nazywamy fraktalnym wymiarem sa-

mopodobieństwa. Dla krzywej Kocha wymiar ten wynosi $D_s = \log 4 / \log 3 \approx 1,2619$.
Wymiar pudełkowy

Wymiar pudełkowy (kostkowy) może być stosowany zarówno dla obiektów ściśle samopodobnych, jak również dowolnych figur geometrycznych, zawartych w przestrzeni R^n . Rozważmy obiekt geometryczny umieszczony na regularnej siatce o wielkości oczka s (ryc. 4). Zagadnienie to stanowi realizację klasycznego zadania Mandelbrota (1967) – wymiarowania fraktalnego wybrzeża Wielkiej Brytanii. Liczbę oczek siatki, które zawierają (lub tylko dotykają) figury oznaczamy przez N . Liczba ta jest w oczywisty sposób zależna od wielkości kwadratowego pola podstawowego $N(s)$. Powtórzmy procedurę dla malejącej wielkości pola s i umieśćmy wyniki na wykresie bilogarytmicznym.

Współczynnik kierunkowy (tangens kąta nachylenia) prostej regresji, wyznaczony metodą najmniejszych kwadratów, oznaczamy przez D_p . Liczba ta określa wymiar fraktalny analizowanego obiektu wyznaczony metodą pudełkową. Dobór kolejnych wielkości pola podstawowego jest całkowicie dowolny. Ze względów praktycznych stosowane są często pola czterokrotnie mniejsze (dwukrotna redukcja wymiaru liniowego s). Dla wybrzeża Wielkiej Brytanii $D_p \approx 1,31$. Tak więc linia brzegowa Wielkiej Brytanii ma bardziej złożoną strukturę niż nieskończenie pozaginana krzywa Kocha ($D_p \approx 1,26$).

Równie istotną jest konkluzja dotycząca pomiaru długości figur fraktalnych. Długość ta nie może być wyznaczona w sposób ścisły (nie istnieje jako wartość absolutna). Otrzymana wartość zależna jest od przyjętej skali obserwacyjnej (B. B. Mandelbrot 1967). Prawdopodobnie ta dotyczy tylko obiektów fraktalnych, np. wymiar fraktalny większości „sztucznych” granic administracyjnych równy jest wymiarowi topologicznemu tych obiektów ($D_f = D_t = 1$).

Analiza fraktalna w naukach o Ziemi

Wymiar fraktalny obiektu geometrycznego określa w sposób pośredni jego kształt. Można przyjąć, że im wyższy wymiar fraktalny, tym bardziej złożona forma (D. Quattrochi, N. Lam, H. Qiu, W. Zhao 1997). Ściśle deterministyczne fraktale nie występują w naturze, jednak koncepcja samopodobieństwa statystycznego pozwala na użycie języka geometrii fraktalnej jako metody opisu wybranych komponentów środowiska przyrodniczego.

Według P. Burrough'a (1993) idee fraktalne

mają w naukach o Ziemi trzy zastosowania:

1) teoretyczny opis zjawisk samopodobnych o złożonych kształtach niezależnych od skali obserwacyjnej,

2) ilościowy opis nieregularnej powierzchni terenu,

3) hipotetyczny model kształtu rzeczywistych form geomorfologicznych.

Geometria fraktalna umożliwia także opis i analizę naturalnych systemów rzecznych, wykazujących cechy samopodobieństwa. Wymiar fraktalny jest istotnym parametrem morfometrycznym, łączącym w sobie zalety jakościowych i ilościowych klasyfikacji sieci rzecznych.

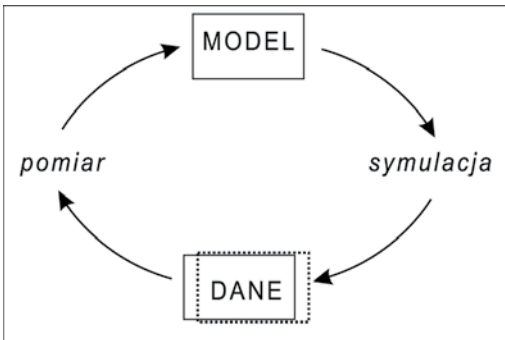
Analiza fraktalna może także stanowić narzędzie parametryzacji środowiska przyrodniczego w różnych skalach przestrzennych. Regiony fizycznogeograficzne są statystycznie odróżnialne pod względem wartości wymiaru fraktalnego (B. Klinkenberg 1992).

Geometria fraktalna nie jest oczywiście uniwersalnym narzędziem modelowania wszystkich procesów i zjawisk przyrodniczych. Całej złożoności natury, bogactwa form, tworzących je procesów i wzajemnych interakcji nie można sprowadzić do jednej liczby – wymiaru fraktalnego D_f . Analiza fraktalna może natomiast stanowić narzędzie badawcze statystycznie samopodobnych zjawisk przyrodniczych.

Interpolacja fraktalna

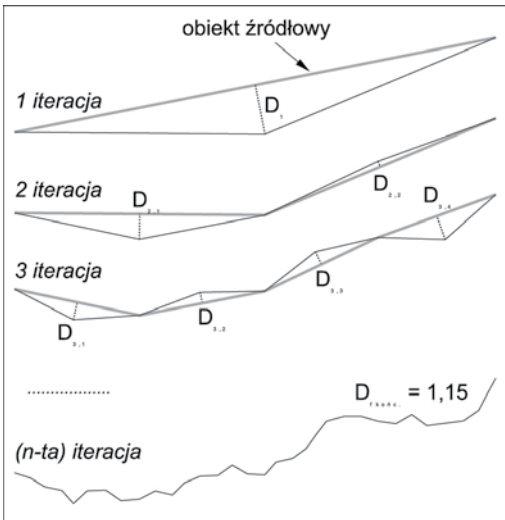
Istotną cechą środowiska przyrodniczego jest jego ciągłość. Większość technik pomiarowych pozwala jedynie na uzyskanie danych o charakterze dyskretnym lub częściowo ciągłym. Metody interpolacji umożliwiają konwersję tej informacji do postaci ciągłej. Umożliwia to badanie właściwości pola geofizycznego, będącego modelem ciągłego rozkładu ilościowej cechy zjawiska. Właściwie dobrane metody interpolacji pozwalają na opracowanie poprawnego modelu komponentów środowiska przyrodniczego na podstawie ograniczonej liczby danych źródłowych.

Pomiar stopnia złożoności komponentów abiotycznych środowiska przyrodniczego metodą wymiarowania fraktalnego pozwala wnioskować o procesach geomorfologicznych tworzących formy terenu. Pełne poznanie procesów rzeźbotwórczych, zakresu przestrzennego ich działania i współzależności pozwoliłoby na opracowanie modelu funkcjonowania środowiska przyrodniczego. Potrafiąc symulować działanie procesów rzeźbotwórczych można, dysponując ograniczonym zbiorem danych źródłowych o małej rozdzielczości przestrzennej, odtwarzać z zadowalającą



Ryc. 5. Relacja między pomiarem a symulacją cyfrową (w: N. Lam, L. De Cola 1993)

Fig. 5. Relation between the measurement and digital simulation (in: Lam, De Cola 1993)



Ryc. 6. Metoda losowego przesunięcia środka RMD (program własny autora); estymowany wymiar fraktalny $D_f = 1,15$

Fig. 6. The method of random middle displacement RMD (original software by the author); estimated fractal dimension $D_f = 1,15$

dokładnością rzeczywiste ukształtowanie terenu (N. Lam, L. De Cola 1993).

Interpolacja fraktalna zgeneralizowanych, liniowych obiektów geometrycznych (sieci rzecznych, linii brzegowych) lub powierzchni topograficznych o małej rozdzielczości przestrzennej i porównanie wyniku symulacji z modelowymi danymi źródłowymi o dużej dokładności geometrycznej pozwoliłoby na weryfikację tej hipotezy (ryc. 5).

Istnieje wiele algorytmów interpolacji fraktalnej (R. F. Voss 1988). W artykule omówiono tylko

jeden z nich, oparty na realizacji tzw. ułamkowego ruchu Browna (*fBm*).

Metoda losowego przesunięcia środka odcinka – RMD (*random midpoint displacement*) jest techniką realizacji ruchu Browna (*Bm*) opracowaną w latach dwudziestych XX wieku przez R. Wienera. Metodę tę można traktować jako stochastyczną modyfikację rekurencyjnego algorytmu konstrukcji krzywej Kocha. Podejście to ma dwie istotne zalety:

- algorytm ten jest tożsamy z interpolacją fraktalną o ustalonym wymiarze D_f ,
- przypadek jednowymiarowy można łatwo uogólnić do przestrzeni N wymiarowej.

Rozważając realizację ruchu Browna w przedziale czasowym (t_1, t_2) można wyznaczyć kształt jego trajektorii metodą losowego przesunięcia środka odcinka (ryc. 6). Znając położenie początku i końca odcinka wyznaczamy położenie środka jako średnią z wartości brzegowych plus poprawka D_f . Poprawka ta jest gaussowską liczbą losową, którą należy pomnożyć przez współczynnik skali $1/2$ (H. Peitgen 1997). W następnym kroku iteracji współczynnik skali redukowany jest o czynnik $2^{1/2}$, który jest mnożnikiem poprawek losowych $D_{2,1}$ i $D_{2,2}$. Działanie to jest fraktalną realizacją interpolacji matematycznej.

Ruch Browna jest procesem stochastycznym o przyrostach niezależnych i stacjonarnej wariancji:

$$D^2(X(t_2) - X(t_1)) \propto |t_2 - t_1|^{2H} \quad (2)$$

gdzie H nazywamy wykładnikiem Hursta; dla *Bm* parametr $H = 1/2$.

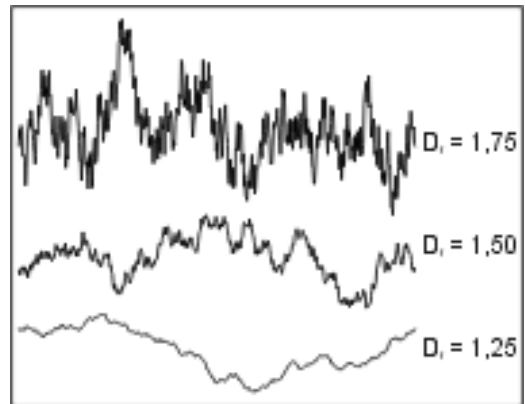
Wykładnik Hursta związany jest w sposób liniowy z wymiarem fraktalnym trajektorii ruchu Browna: $D_f = 2 - H$. Ze względu na ściśle określony stały wymiar fraktalny trajektorii ruchu Browna ($D_f = 1,5$) często używany jest tzw. ułamkowy ruch Browa (*fBm*). Zakres parametru H zmienia się od wartości 0 ($D_f = 2$) odpowiadającej krzywemu bardzo nieregularnym, do wartości 1 ($D_f = 1$) odpowiadającej krzywemu „ładnym” (ryc. 7).

Interpolacja fraktalna a generalizacja kartograficzna

Proces generalizacji kartograficznej wiąże się z utratą części danych źródłowych. Istotne jest zatem zachowanie informacji o kluczowych parametrach metrycznych uproszczonych obiektów. Wymiar fraktalny generalizowanych linii lub poligonów należy uznać za szczególnie istotny, wymiar ten jest bowiem miarą, która „łączy w sobie informacje o strukturze i procesie” (W. E.

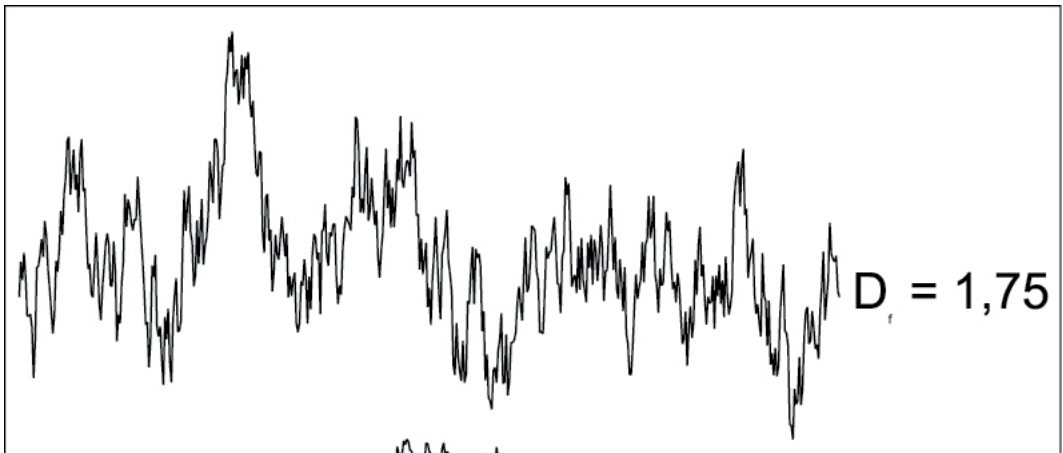
Culling, M. Datko 1987). Znajomość parametru D_f generalizowanych obiektów geometrycznych pozwala na przybliżone odtworzenie ich kształtu w procesie interpolacji fraktalnej. Wymiar fraktalny obiektów liniowych i powierzchniowych wnosi unikatową informację o parametrach metrycznych tych obiektów. Wymiar fraktalny obiektu wskazuje, w jaki sposób zmieniają się parametry metryczne tego obiektu w procesie generalizacji kartograficznej. Obiekty liniowe o niskim wymiarze fraktalnym ($D_f \approx 1$) (sztuczne granice administracyjne, sieci drogowe) „zachowują” swoją długość przy zmianie skali mapy. Obiekty liniowe o dużym wymiarze fraktalnym ($D_f \approx 2$) (meandrujące rzeki, linie brzegowe) gwałtownie „tracą” długość w procesie generalizacji.

Interpolacja fraktalna RMD z parametrem $D_f = 1$ nie zmienia kształtu obiektu źródłowego (ryc. 8). Interpolacja z parametrem $D_f = 2$ prowadzi do całkowitej utraty informacji o pierwotnym kształcie



Ryc. 7. Wymiar fraktalny trajektorii ułamkowych ruchów Browna (program własny autora)

Fig. 7. Fractal dimension of fractional Brownian motion (original software by the author)



Ryc. 8. Interpolacja fraktalna ze zmiennym parametrem D_f (program własny autora, piąta iteracja)

Fig. 8. Fractal interpolation with a variable D_f parameter (original software by the author, fifth iteration)

figury źródłowej. Wygenerowane odcinki przecinają się wzajemnie tworząc chaotyczny kształt trajektorii zwykłego ruchu Browna. Interesujące z kartograficznego punktu widzenia jest zastosowanie interpolacji fraktalnej z parametrem D_f z przedziału (1,2). Metoda ta może być traktowana jako stochastyczna odwrotność procesu generalizacji kartograficznej.

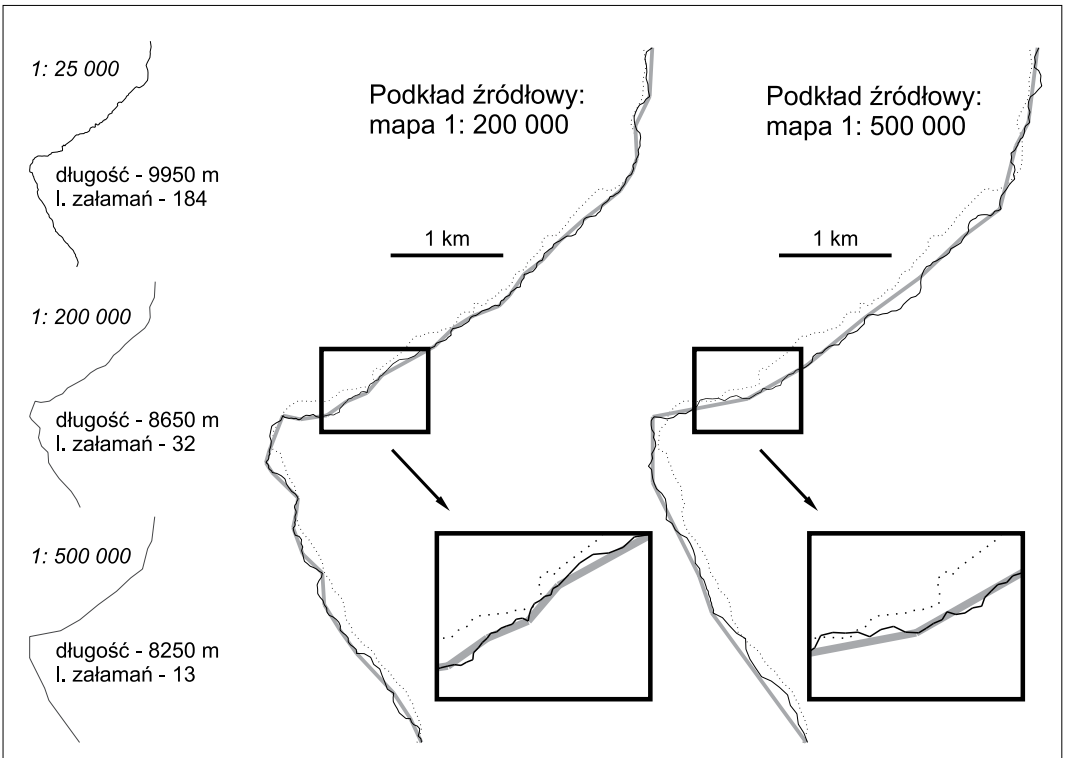
Dysponując zgeneralizowanymi danymi źródłowymi pozyskanymi z mapy w określonej skali i znając wymiar fraktalny badanego obiektu (linii brzegowej, wododziału, sieci rzecznej) można modyfikować jego kształt metodą interpolacji fraktalnej. Modyfikacja ta polega na wprowadzeniu

szczegółów topograficznych, tak aby uzyskany kształt odpowiadał stopniem złożoności geometrycznej obiektom umieszczonym na mapie w większej skali.

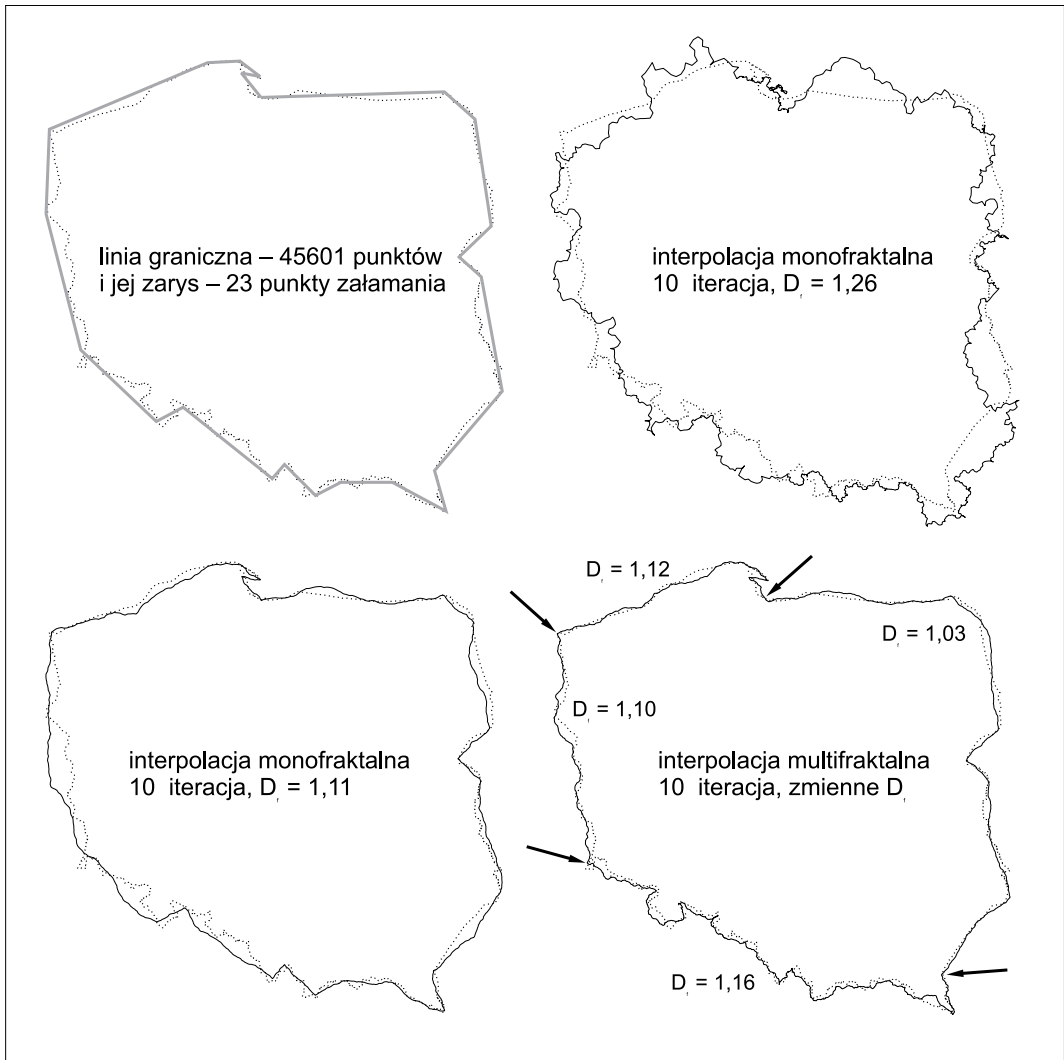
Metoda ta oparta jest na zastosowaniu zmodyfikowanego algorytmu RMD. Niezmiernie istotne jest właściwe określenie parametru D_f (ryc. 9). Badania Mandelbrota pozwoliły na wyznaczenie metodą pudełkową wymiaru fraktalnego linii brzegowej Wielkiej Brytanii ($D_f = 1,31$). Traktując jako dane źródłowe uproszczony do 36 odcinków zarys wybrzeża (linia przerywana) i stosując interpolację fraktalną z różnymi parametrami D_f otrzymujemy wyraźnie zróżnicowane wyniki.



Ryc. 9. Interpolacja fraktalna ze zmiennym parametrem D_f (program własny autora)
 Fig. 9. Fractal interpolation with a variable D_f parameter (original software by the author)



Ryc. 10. Interpolacja fraktalna z ustalonym parametrem $D_f = 1,12$ (program własny autora)
 Fig. 10. Fractal interpolation with a fixed $D_f = 1,12$ parameter (original software by the author)



Ryc. 11. Interpolacja multifrakalna ze zmiennym parametrem D_f (program własny autora)
 Fig. 11. Multi-fractal interpolation with a variable D_f parameter (original software by the author)

Dla wartości $D_f = 1,1$ wygenerowana linia brzegowa tylko nieznacznie różni się od danych źródłowych i bardzo wyraźnie odbiega od rzeczywistego kształtu wybrzeża. Dla wartości $D_f = 1,5$ kształt fraktalnego wybrzeża jest zbyt złożony i nierzeczywisty. Wyraźnie widoczne są „zapętlenia” linii brzegowej. Zastosowanie interpolacji RMD z parametrem $D_f = 1,3$ pozwala na uzyskanie linii brzegowej o zbliżonym do rzeczywistego stopniu złożoności.

Analizując zastosowanie interpolacji monofraktalnej z ustalonym parametrem D_f dla różnicowa-

nych pod względem dokładności geometrycznej danych źródłowych, można stwierdzić, iż uzyskane efekty istotnie zależą od jakości tych danych (ryc. 10). W badaniu wykorzystano jako „krok zerowy” interpolacji kształt rzeki Turnicy pozyskany z mapy 1:200 000 (32 odcinki) oraz mapy 1:500 000 (13 odcinków) – szara linia. Jako przybliżenie rzeczywistego kształtu rzeki przyjęto dane umieszczone na mapie w skali 1:25 000 – linia przerywana. Algorytm interpolacyjny RMD pozwolił na uzyskanie szczegółów topograficznych o stopniu złożoności odpowiadającym skali mapy 1:25 000. Kształt rzeki, będącej fraktalnym prze-

kształceniem danych źródłowych w skali 1:200 000, jest znacznie bliższy rzeczywistości niż zmodyfikowane fraktalnie dane w skali 1:500 000.

Wymiar fraktalny wnosi całkowicie nową i unikatową informację ilościową o parametrach metrycznych zjawisk liniowych i powierzchniowych. Informacja ta powinna być wykorzystana w procesie generalizacji kartograficznej (A. M. Berlant, O. R. Musin, T. W. Sobczuk 1998). B. Klinkenberg (1992) sądzi, iż optymalizacja metodyki generalizacji kartograficznej złożonych obiektów liniowych powinna prowadzić do opracowania takich algorytmów i procedur, które zmieniają wymiar fraktalny w najmniejszym stopniu. Zalecenie to dotyczy zwłaszcza obiektów hydrograficznych: sieci rzecznych i linii brzegowych.

Interpolacja multifraktalna

Interpolacja fraktalna pozwala na wzbogacenie szczegółami topograficznymi uproszczonych danych źródłowych o znanym wymiarze fraktalnym. Metoda ta może być więc rozumiana jako swego rodzaju stochastyczna odwrotność procesu generalizacji kartograficznej (G. H. Dutton 1981, N. Lam, L. De Cola 1993).

Poprawne działanie algorytmu RMD warunkowane jest znajomością parametru D_f , dokładnością geometryczną przetwarzanych obiektów oraz przyjęciem założenia o ich monofraktalności. W rzeczywistości większość naturalnych obiektów i zjawisk przyrodniczych ma naturę multifraktalną. Parametr D_f określa jedynie „średnie” własności analizowanych komponentów środowiska przyrodniczego. Umiejętność określenia multifraktalnych parametrów złożoności geometrycznej obiektów pozwoliłaby na wierniejsze modelowanie ich kształtu.

Rozważmy kształt granicy politycznej Polski (ryc. 11). Dane geodezyjne Państwowego Rejestru Granic zawierają 45601 punktów załamania linii granicznej (linia przerywana). Średni wymiar fraktalny tej linii obliczony metodą pudełkową (program własny autora) wynosi $1,11 \pm 0,03$.

Jako „krok zerowy” interpolacji przyjęto uproszczony rysunek granicy złożony z 23 odcinków (szara linia). Zastosowanie interpolacji RMD z parametrem $D_f = 1,1$ pozwoliło na uzyskanie w dziesiątej iteracji fraktalnej linii granicznej złożonej z 47104 odcinków i kształcie zbliżonym do rzeczywistego. Zastosowanie tej samej metody z parametrem $D_f = 1,26$ (wymiar fraktalny krzywej Kocha) prowadzi do uzyskania zdegenerowanej,

nadmiernie rozwiniętej linii o długości blisko 5000 km.

Niezależne badanie czterech, subiektywnie wyznaczonych fragmentów granicy Polski umożliwiło obliczenie odpowiadających im wartości wymiaru fraktalnego. Interpolacja multifraktalna RMD z zastosowaniem zróżnicowanych przestrzennie współczynników D_f pozwoliła na uzyskanie multifraktalnej linii granicznej znacznie bliższej danym źródłowym niż linia monofraktalna.

Podsumowanie

Przeprowadzone badania wskazują, iż interpolacja fraktalna może być wykorzystywana jako stochastyczna odwrotność generalizacji kartograficznej. Dysponując danymi o niskiej dokładności geometrycznej (np. mapami małoskalowymi) i znajomością wymiaru fraktalnego danego zjawiska można modelować szczegóły topograficzne, odpowiadające stopniem złożoności mapom średnio- i wielkoskalowym. W tym sensie interpolację fraktalną można uznać za metodę stochastycznej dekompresji danych przestrzennych o znanym parametrze D_f .

Obiekty geometryczne reprezentujące na mapie systemy rzeczne lub linie brzegowe są fraktalami losowymi. Obiekty samopodobne w sensie statystycznym nie są złożone ze zmniejszonych kopii całych siebie, lecz składają się ze zmniejszonych kopii części samego siebie. Oznacza to, że w procesie fraktalnego kodowania obrazu musimy uwzględnić pewien błąd wynikający z niejednorodności przekształcanych obiektów. Obraz zakodowany jako zbiór przekształceń nie będzie wierną kopią obrazu oryginalnego, lecz pewnym jego przybliżeniem. Technika interpolacji fraktalnej pozwala na wierne odtworzenie deterministycznej krzywej Kocha na podstawie prostego odcinka i znajomości wymiaru D_f tej krzywej. Ta sama technika zastosowana jako stochastyczna odwrotność generalizacji kartograficznej umożliwi przybliżone odtworzenie kształtu linii brzegowej (fraktala losowego) na podstawie małoskalowych danych źródłowych.

Interpolacja fraktalna rozumiana jako „uszczegółowienie” danych źródłowych może być zastosowana także w przestrzeni R^3 jako próba podniesienia rozdzielczości numerycznego modelu terenu. Wymaga to prowadzenia dalszych badań.

Literatura

- Adamczewski Z., 1992, *Biała magia Ziemi i geometria fraktalna*. „Przeł. Geodez.” R. 64, nr 6, s. 6–10.
- Berlant A. M., 1978, *Kartograficzeskij metod issledowanija*. Moskwa: Izd. Moskowskogo Uniwersitieta.
- Berlant A. M., Musin O. R., Sobczuk T. W., 1998, *Kartograficzeskaja gienieralizacija i tieorija fraktalow*. Moskwa: Izd. Moskowskogo Uniwersitieta.
- Burrough P., 1993, *Fractals and geostatistical methods in landscape studies*. W: *Fractals in geography*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- Culling W. E., Datko M., 1987, *The fractal geometry of the soil covered landscape*. „Earth Surface Process. Landforms” 12, s. 369–385.
- Dutton G. H., 1981, *Fractal enhancement of cartographic line detail*. „The Amer. Cartographer” Vol. 8, no. 1, s. 23–40.
- Engelking R., 1977, *Teoria wymiaru*. Warszawa: PWN.
- Falconer K., 1990, *Fractal geometry. Mathematical foundations and applications*. Chichester: John Wiley & Sons.
- Feder J., 1988, *Fractals*. New York: Plenum Press.
- Green D., 1995, *Fractals and scale*. <http://life.csu.edu.au/complex/tutorials/tutorial3.html>
- Grygorenko W., 1991, *Kierunki rozwoju naukowego współczesnej kartografii*. W: *Metody badań kartograficznych*. „Materiały Ogólnopolskich Konferencji Kartograficznych” T. 16, s. 16–32.
- Klinkenberg B., 1992, *Fractals and morphometric measures: is there a relationship?* „Geomorphology” Vol. 5, Amsterdam: Elsevier Science Publishers B. V. s. 5–20.
- Krak M.-J., Ormeling F., 1998, *Kartografia. Wizualizacja danych przestrzennych*. Warszawa: Wydawn. Naukowe PWN.
- Lam N., De Cola L., 1993, *Fractals in geography*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- Mandelbrot B. B., 1967, *How long is the coastline of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension*. „Science” Vol. 156, no. 3775, s. 636–638.
- Mandelbrot B. B., 1977, *Fractals: form, chance and dimension*. San Francisco: W. H. Freeman and Co.
- Mandelbrot B. B., 1982, *The fractal geometry of nature*. New York: W. H. Freeman and Co.
- Peitgen H.-O., Jurgens H., Saupe D., 1997, *Granice chaosu. Fraktale*. Warszawa: Wydawn. Naukowe PWN.
- Quattrochi D. A., Lam N., Qiu H., Zhao W., 1997, *Image characterization and modeling system*. W: *Scale in remote sensing and GIS*. Ed. D. A. Quattrochi, M. F. Goodchild, New York: Lewis Publishers.
- Ratajski L., 1989, *Metodyka kartografii społeczno-gospodarczej*. Wyd. 2. Warszawa: PPWK.
- Saliszczew K. A., 1998, *Kartografia ogólna*. Warszawa: Wydawn. Naukowe PWN.
- Tempczyk M., 1998, *Teoria chaosu a filozofia*. Warszawa: Wydawn. CiS.
- Voss R. F., 1990, *Fractals in nature: from characterization to simulation*. W: *The science of fractal images*. Ed. H.-O. Peitgen, D. Saupe. Berlin: Springer Verlag, s. 21–69.
- Xia Z., Clarke K., 1997, *Approaches to scaling and geo-spatial data*. W: *Scale in remote sensing and GIS*. Ed. D. A. Quattrochi, M. F. Goodchild. New York: Lewis Publishers, s. 309–361.

Recenzował prof. dr hab. Andrzej Makowski

Fractal interpolation as a stochastic reversal of cartographic generalization

Summary

The article attempts to apply fractal analysis in cartographic research of selected components of natural environment. Fractal description, which bases on fractal geometry and analysis, invented by B.B.Mandelbrot in the seventies, became an integrating interdisciplinary tool for many scientific domains, particularly in natural sciences. Application of procedures, which originate from this division of mathematics, can also, according to the author, add to the development of analytical cartography.

A fractal is a shape, which consists of parts in a way similar to the whole. Fractal geometry can therefore become a tool in describing complex shapes of natural phenomena, like clouds, shorelines, mountain ridges. The parameter, which describes geometric complexity of those shapes is called fractal dimension. Fractal dimension (D_f) of a given object characterizes its degree of complexity and the extent, to which it fills the available space.

In the result of the process of cartographic generali-

zation some of the source information is lost. Therefore it is vital to preserve the key metric parameters of simplified objects. Fractal dimension of an object shows, how its metric parameters change in the process of cartographic generalization.

D_f parameter of generalized geometric objects makes it possible to recreate their approximate shapes in the process of fractal interpolation. This method can be treated as the reversal of the process of cartographic generalization. Basing on data of limited geometric accuracy and the fractal dimension of a given phenomenon, one can model topographic details on a level of complexity corresponding to the source materials. In this case fractal interpolation can also be treated as a method of stochastic decompression of spatial data with a known D_f parameter.

Shape modeling of generalized objects through the process of fractal interpolation introduces a certain error. Geometric objects, which represent river systems or

shorelines are stochastic fractals. Statistically, a self-similar object does not consist of reduced copies of its entire self, but rather of reduced copies of its parts. This means, that in the process of fractal encoding we have to allow for a certain error, caused by the lack of homo-

geneity of transformed objects. The encoded picture, being a set of transformations, will not be a faithful copy of the original, but rather its approximation.

Translated by M. Horodyski

Фрактальная интерполяция как стохастическая противоположность картографической генерализации

Резюме

В статье предпринята попытка фрактального анализа в картографическом исследовании избранных компонентов природной среды. Для многих областей науки, особенно естественных наук, фрактальное описание, опирающееся на разработанную Б.Б. Мандельбротом в семидесятых годах фрактальную геометрию и фрактальный анализ, стало интегрирующим междисциплинарным орудием. Использование исследовательских процедур, выведшихся из этого раздела математики, может, согласно автору, способствовать также развитию картографического метода исследований.

Фрактал является сложной формой, составленной из частей похожих каким-то образом на целое. Фрактальная геометрия может быть, таким образом, орудием описания сложных форм, выступающих в природе, таких как: облака, береговые линии, горные системы. Параметром, характеризующим геометрическую сложность этих объектов, является, так называемое, фрактальное измерение. Фрактальное измерение (D_f) объекта характеризует степень его нерегулярности, а также определяет степень заполнения доступного пространства.

Процесс картографической генерализации связан с потерей некоторой части первичной информации. Существенным является тем самым сохранение информации о ключевых метрических параметрах упрощённых объектов. Фрактальное измерение показывает, каким образом меняются метрические параметры этого объекта в процессе картографической генерализации.

Знание параметра D_f генерализируемых геометри-

-ческих объектов даёт также возможность приближительного воссоздания их формы в процессе фрактальной интерполяции. Этот метод может считаться стохастической противоположностью процесса картографической генерализации. Располагая данными об ограниченной геометрической точности и знанием фрактального измерения данного явления, можно моделировать топографические подробности, соответствующие степени сложности первичным данным. В этом смысле фрактальную интерполяцию можно признать как стохастический метод декомпрессии пространственных данных об известном параметре D_f .

Моделирование формы генерализированных объектов в процессе фрактальной интерполяции обременено, однако, некоторой ошибкой. Геометрические объекты, изображающие на карте речные системы или береговые линии, являются стихийными фракталами. Объекты подобные себе в статистическом смысле не являются составленными из уменьшенных копий целых себя, а складываются из уменьшенных копий частей самого себя. Это означает, что в процессе фрактального кодирования изображения мы должны учитывать некоторую ошибку, вытекающую из неоднородности преобразуемых объектов. Кодированное изображение, как набор преобразований, не будет верной копией оригинального изображения, а лишь некоторым его приближением.

Перевод Р. Толстикова