Polski Przegląd Kartograficzny
Tom 37, 2005, nr 3, s. 196–212

MAŁGORZATA WIECZOREK, WOJCIECH ZALEWSKI
Zakład Kartografii Uniwersytetu Wrocławskiego

Od Merkatora do Space Oblique Mercator

Z a r y s t r e ś c i. Tematem artykułu jest historia teorii wiernokątnych odwzorowań walcowych. Zaprezentowano w nim znane odwzorowanie Merkatora oraz jego liczne modyfikacje, których autorami byli kolejno J.H. Lambert, J.L. Lagrange, J.C.F. Gauss, J.H. Krüger, M. Hotine oraz J.P. Snyder. W podsumowaniu dano tabelaryczne zestawienie nazw dotyczących tego typu odwzorowań spotykanych w polskiej i anglojęzycznej literaturze, będące próbą uporządkowania tej mocno zróżnicowanej terminologii.

S ł o w a k l u c z o w e: Gerard Kremer (Merkator), odwzorowania walcowe wiernokątne, odwzorowanie Merkatora, odwzorowanie Gaussa, odwzorowanie Gaussa-Krügera, UTM (Universal Transverse Mercator), SOM (Space Oblique Mercator)

Od śmierci Gerarda Kremera (zwanego Merkatorem) – jednego z najwybitniejszych kartografów doby renesansu i twórcy nowożytnej kartografii (W. Koszarski 1984), minęło ponad 400 lat. Mimo upływu czasu nazwisko Merkatora jest wciąż obecne w kartografii, a o jego dorobku uczą się kolejne pokolenia nie tylko kartografów. W dzisiejszych czasach użytkownicy map coraz częściej spotykają się także z zagadkowym skrótem UTM i raczej niewielu łączy go z nazwiskiem wielkiego kartografa. Szukając informacji na temat UTM (uniwersalne odwzorowanie poprzeczne Merkatora), chociażby w publikacjach dołączanych do oprogramowania GIS (M. Kennedy, S. Kopp 2000), czytelnik jest odsyłany do hasła: Transverse Mercator (odwzorowanie poprzeczne Merkatora). To ostatnie zaś jest utożsamiane przez tych samych autorów z odwzorowaniem Gaussa-Krügera. Pojawiają się zatem pytania: skąd taka mnogość określeń, czy istnieją między nimi różnice i czy mają coś wspólnego ze znanym odwzorowaniem Merkatora? Podobne pytania rodzą się również w odniesieniu do odwzorowania opracowanego niecałe 30 lat temu, tj. odwzorowania Space Oblique Mercator. W niniejszym artykule postaramy się udzielić na nie odpowiedzi, śledząc losy odwzorowania Merkatora oraz modyfikacji, jakim ulegało z biegiem lat, a których celem było zaadaptowanie go na różne potrzeby.

Poruszany w artykule temat nie jest rozpatrywany od strony matematycznej, gdyż dokładne formuły kolejno opisywanych odwzorowań wraz z komentarzami można znaleźć na stronach przytoczonych publikacji. Część matematyczna ograniczona została do niezbędnego minimum, aby pokazać wzrastający stopień komplikacji obliczeń wraz z kolejnymi modyfikacjami odwzorowania Merkatora. Artykuł jest raczej próbą spojrzenia na temat od strony historycznej i ma na celu pokazanie związków między powszechnie znanymi odwzorowaniami kartograficznymi oraz wkładu różnych osób – nie tylko kartografów – do problematyki wiernokątnego odwzorowania powierzchni Ziemi na powierzchnię walca. Autorzy podjęli także próbę uporządkowania terminologii dotyczącej omawianych odwzorowań.

Gerard Kremer (Merkator) (ryc.1) przyszedł na świat 5 marca 1512 r. w miejscowości Rupelmonde we Flandrii Wschodniej (dzisiejsza Belgia). Był siódmym dzieckiem w rodzinie Huberta i Emerentii Kremerów. Pierwsze nauki pobierał w szkole w Rupelmonde, a następnie, po śmierci ojca, w szkole prowadzonej przez Braci Wspólnego Życia w s'Hertogenbosch – w dzisiejszej Holandii, dokąd został wysłany przez swojego wuja. Podczas pobytu Kremera w s'Hertogenbosch zmarła jego matka. Po tym wydarzeniu zdecydował się zastąpić swoje dotychczasowe imię i nazwisko[1] ich łacińskimi odpowiednikami. Z tego względu od końca lat dwudziestych XVI w.

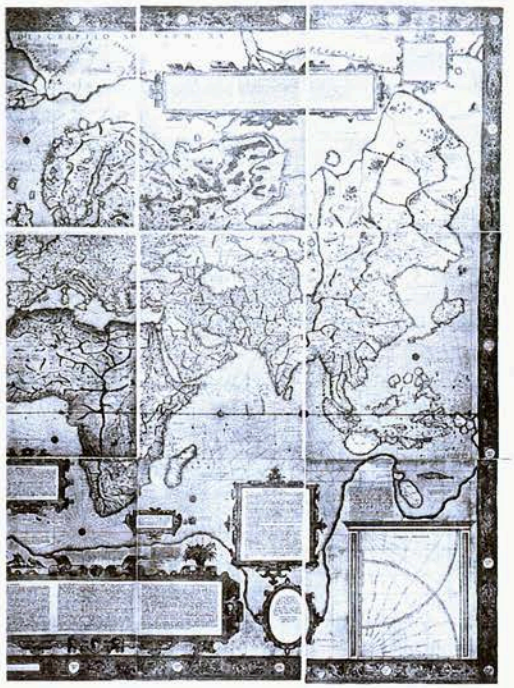
[1] W języku niemieckim słowo „Kremer" znaczy „kupiec", ale niekiedy można także spotkać się z holenderskim zapisem – „Cremer". Ich odpowiednikiem łacińskim jest natomiast słowo „Mercator".

Ryc. 1. Gerard Kremer (Merkator) (1512–1594) (źródło: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Pictisplay/Mercator_Gerardus.html)

Gerarda Kremera nazywano Gerardus Mercator de Rupelmonde i takim też zapamiętał go świat. Solidne wykształcenie odebrał na uniwersytecie w Leuven, gdzie studiował początkowo filozofię i teologię, a po dwóch latach matematykę i astronomię (M. Monmonier 2004).

Dziełem życia Merkatora była wielka mapa świata złożona z 21 arkuszy (ryc. 2 i 3). Mapa ta ukazała się w 1569 r. i nosiła tytuł *Nova et aucta orbis terrae descriptio ad usum navigantium emendate accommodata (Nowy i poszerzony opis Ziemi z poprawkami do użytku w nawigacji)*. Jej oryginał o wymiarach 1,3×2,0 m znajduje się dziś w Paryżu (J. Szaflarski 1965, J. Snyder 1987). Pomijając niezaprzeczalnie wysoką wartość artystyczną tego opracowania, bodaj najważniejszą cechą mapy było zastosowanie po raz pierwszy odwzorowania, które dziś znamy pod nazwą pochodzącą od nazwiska jej twórcy. Niektórzy (J. Snyder 1987, M. Sirko 1999) wskazują jednak, że już około 1511 r. odwzorowania tego użył norymberski mierniczy i kartograf Erhard Etzlaub[2] (1462–1532), a jeszcze wcześniej Ch'ien Lo-Chih w 940 r. do opracowania mapy Tunhuangu (internet 1).

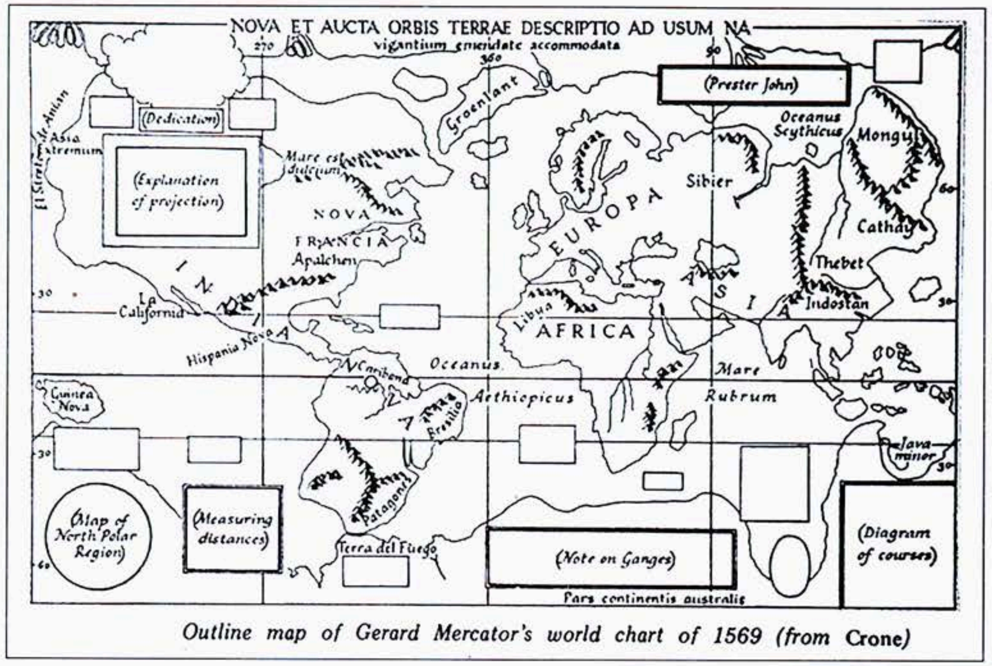
Tak zwane odwzorowanie Merkatora początkowo nazywano projekcją wzrastających długości.



Ryc. 2. Fragment mapy Merkatora z 1569 r. – część wschodnia (źródło: http://data2.collectionscanada.ca/nmc/n0017080-3.jpg)
Fig. 2. Eastern part of Mercator's map (1569)

Niestety, Merkator nie przedstawił nigdzie swoich obliczeń, a w legendzie mapy znalazła się jedynie ogólna zasada konstrukcji tej siatki (M. Sirko 1999). Dopiero w 1599 r. sposób jej obliczenia (w formie szeregu nieskończonego) podał matematyk z Cambridge Edward Wright (1558?–1615) w pracy zatytułowanej *The correction of certain errors in navigation* (internet 2). Z tego powodu siatkę tę przez pewien czas łączono z jego nazwiskiem. Ponieważ rachunek całkowy nie był jeszcze wówczas znany, E. Wright obliczył ulepszoną tablicę podającą długości łuków południka przez kolejne dodawanie wartości $\sec\varphi$ dla 1', 2', 3' itd. (F. Biernacki 1949). Pierwsza mapa wykonana w odwzorowaniu Merkatora z wykorzystaniem poprawek E. Wrighta ukazała się w 1600 r. pod tytułem *A Chart of the World on Mercator's Projection* i jest znana również pod nazwą *Mapa Wrighta-Molyneuxa*, gdyż w pracach rytowniczych (1592) brał udział angielski wykonawca globusów Emery Molyneux (internet 2). Jak podaje J. Szaflarski (1965, s. 239), pod względem matematycznym odwzorowanie Merkatora zostało dokładniej ujęte przez Henry'ego Bonda w 1645 r., „który podał wzór do obliczania

[2] Większość historyków kartografii pisze o nim jako o autorze *Mapy drogowej Europy Środkowej* (1501), choć i to nie jest pewne (M. Sirko 1999).



Ryc. 3. Schemat mapy Merkatora z 1569 r. (źródło: http://www.henry-davis.com/MAPS/Ren/Ren1/406C.htm)

przyrostów w stopniach szerokości", zaś w roku 1668 matematyk szkocki James Gregory (1638–1675) podał skończoną formę tego odwzorowania w postaci wzoru wykorzystujacego rachunek całkowy. Rozwiązanie J. Gregory'ego było odpowiedzią na propozycję Nicolausa Mercatora (przypadkowa zbieżność nazwisk), który za podanie formuły matematycznej odwzorowania zaoferował nagrodę. Niestety, J. Gregory dowiódł poprawności swojej formuły w bardzo skomplikowany sposób i dopiero Isaac Barrow (1630–1677) w 1670 r. dokonał tego prostszą metodą (internet 3).

Siatka Merkatora z założenia jest siatką odwzorowania wiernokątnego, gdyż celem Kremera było opracowanie takiej mapy dla żeglarzy, na której „różne kierunki wiatrów mogłyby być wszędzie przedstawione za pomocą linii prostych i które tworzyłyby z sobą takie same kąty, jak odpowiednie kierunki na mapie" (J. Szaflarski 1965, s. 238). Istotne było także, aby loksodroma[3] odwzorowywała się jako linia prosta, gdyż znacznie ułatwiałoby to nawigację; możliwe byłoby wówczas odczytywanie kursu z mapy na wybrany punkt i płynięcie wciąż według tego samego azymutu – po loksodromie.

Zgodnie z ówczesnym stanem wiedzy, bryłą aproksymującą kształt Ziemi stosowaną w odwzorowaniach jej powierzchni była kula. Merkator przyjął, że mapę świata wykona odwzorowując wiernokątnie powierzchnię kuli na pobocznicę walca, którego oś będzie się pokrywać z osią Ziemi (położenie normalne walca) oraz że wiernie zostanie pokazany jedynie równik. Tym samym odwzorowanie Merkatora należy określić jako wiernokątne styczne normalne odwzorowanie walcowe kuli na płaszczyznę. Obrazy południków i równoleżników są w nim liniami prostymi wzajemnie prostopadłymi, przy czym wszystkie obrazy równoleżników są jednakowej długości, a bieguny nie odwzorowują się. Obrazy południków mają długość dążącą do nieskończoności, a odstępy między nimi są stałe. Odstępy te możemy obliczyć na podstawie wzoru:

$$x = R \cdot \operatorname{arc}\Delta\lambda \qquad (1)$$

gdzie $\Delta\lambda$ jest różnicą długości geograficznej między dwoma południkami, R jest promieniem Ziemi, a $\operatorname{arc}\Delta\lambda$ wyraża miarę łukową kąta $\Delta\lambda$.

Z warunku wiernokątności (skala w kierunku równoleżników a musi być równa skali w kierunku południków b) możemy wyprowadzić wzór na odległość dowolnego równoleżnika od równika:

[3] Loksodroma – skośnobieżna, linia przecinająca wszystkie południki pod tym samym kątem.

$$\frac{1}{R}\frac{dy}{d\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi}$$

$$dy = R\frac{d\varphi}{\cos\varphi}$$

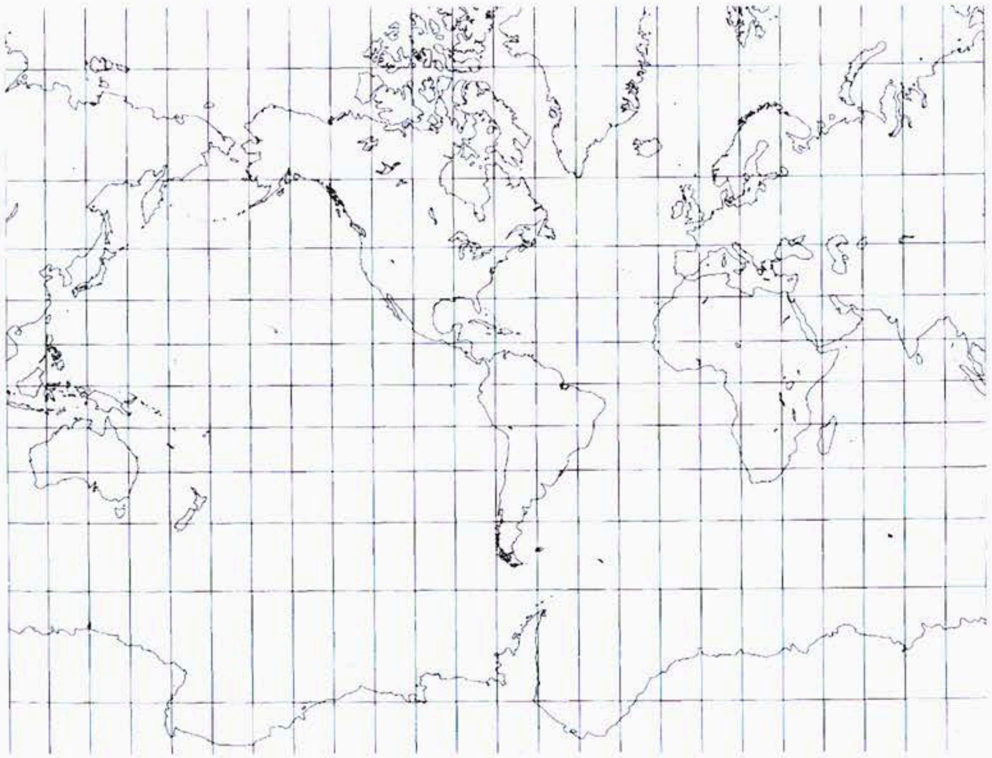
$$y = R\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)+c \qquad (2)$$

Ze wzoru (2) (który w tej formie prawdopodobnie pochodzi od J. Gregory'ego) możemy wnioskować, że odstępy między równoleżnikami gwałtownie rosną w miarę zbliżania się ku biegunom, a tym samym bardzo silnie wzrastają zniekształcenia pól (Z. Churski, R. Galon 1996). I tak na szerokości geograficznej $\varphi = \pm 60°$ odległości powiększone są dwukrotnie, a pola czterokrotnie (por. ryc. 4), a dla $\varphi = \pm 89°$ pola są powiększone ponad 3000 razy (Ch.H. Deetz, O.S. Adams 1921).

Opracowanie opisanego odwzorowania zbiegło się w czasie z burzliwym rozwojem żeglugi dalekomorskiej i znacznie ją ułatwiło ze względu na prostoliniowość odwzorowywanych loksodrom. Do powszechnego użytku w nawigacji weszło ono około 1630 r. i jest stosowane do dziś. Od 1910 r. w tym odwzorowaniu wykonywane są m.in. amerykańskie mapy morskie opracowywane początkowo przez U.S. Coast and Geodetic Survey, a obecnie National Ocean Service (J. Snyder 1987).

Odwzorowanie Merkatora posłużyło także do sporządzania map lotniczych. Umożliwiały one nawigatorom dokładne orientowanie się w kierunkach oraz dotarcie do celu. Z tego powodu Reichsamt für Landesaufnahme (Urząd ds. Geodezji) działający w strukturach III Rzeszy Niemieckiej sporządził w tym odwzorowaniu mapy wszystkich atakowanych przez Niemcy państw, tak aby młodzi, niedoświadczeni piloci, bombardujący cele w atakowanych państwach, nie mieli problemu z dotarciem do celu i powrotem do własnych baz (W. Koszarski 1984, J. Wereszczyński 1970).

Ze względu na bardzo duże zniekształcenia powierzchni w wyższych szerokościach geograficznych odwzorowanie Merkatora nie nadaje



Ryc. 4. Mapa świata w odwzorowaniu Merkatora (źródło: J. Synder 1987)
Fig. 4. World map on Mercator's projection

się do przedstawiania zagadnień o charakterze powierzchniowym (np. do map politycznych, glebowych itp.), ale jest odpowiednie do celów propagandowych.

W 1989 r. siedem amerykańskich organizacji geograficznych, w tym Amerykańskie Stowarzyszenie Kartografów, Rada Narodowa ds. Edukacji Geograficznej, Stowarzyszenie Geografów Amerykańskich oraz Narodowe Towarzystwo Geograficzne, podpisało rezolucję, zaadresowaną przede wszystkim do wydawców map, atlasów, książek, przedstawicieli mediów oraz agencji rządowych. Postulowano w niej rezygnację ze wszystkich odwzorowań pokazujących oczka siatki kartograficznej w postaci prostokątów – przede wszystkim z odwzorowań Merkatora i Petersa. Uzasadniano to m.in. tym, że siatki takie dają fałszywy obraz Ziemi nie tylko ze względu na duże zniekształcenia powierzchni, ale także dlatego, że kulista Ziemia jest pokazana w postaci prostokąta, co daje mylne wyobrażenie o kształcie globu ziemskiego. Ponadto częste spotykanie się z tego typu mapami u większości osób może wykształcić mylne przeświadczenie, iż przedstawiany na nich obraz właściwie pokazuje kształty oraz wielkość lądów i mórz (internet 4).

* * *

Od chwili użycia po raz pierwszy w kartografii odwzorowania walcowego wiernokątnego do momentu jasnego sformułowania teorii wiernokątności odwzorowań kuli na płaszczyznę minęło ponad 200 lat. Pierwszym, który ją sformułował, był niemiecki matematyk, fizyk, astronom i filozof Johann Heinrich Lambert (ur. w 1728 r. w Miluzie w Alzacji – zm. w 1777 r. w Berlinie). W 1772 r. opublikował on studium zatytułowane *Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten*, w którym zawarł, jak podaje F. Biernacki (1949), ogólne wzory konforemnego[4] odwzorowania kuli na płaszczyznę. J.H. Lambert wspomniał jednak, że rozwiązanie tych wzorów pochodziło od J.L. Lagrange'a. W swojej pracy J.H. Lambert ograniczył się do sformułowania równania różniczkowego, z którego wyprowadził odwzorowanie Merkatora w położeniu poprzecznym oraz inne odwzorowania wiernokątne. Z tego względu walcowe poprzeczne styczne wiernokątne odwzorowanie kuli na płaszczyznę nazywane bywa pierwszym odwzorowaniem Lamberta (F. Biernacki 1949), a przez niektórych odwzorowaniem Gaussa (J. Różycki 1950a, F. Kuska 1953) lub Merkatora-Gaussa (J. Szaflarski 1965), czy też Lamberta-Gaussa (J. Różycki 1973). Według J. Snydera (1987) odwzorowanie to w literaturze amerykańskiej określane jest mianem Transverse Mercator (poprzeczne Merkatora). J. Snyder (1993) nazywa je również Lambert's spherical transverse Mercator (poprzeczne sferyczne Merkatora-Lamberta).

Zaproponowane odwzorowanie J.H. Lambert opisał jako konforemną adaptację odwzorowania sinusoidalnego będącego ówcześnie w powszechnym użyciu (J. Snyder 1987). Wyprowadził również wzory (3) dla konforemnego odwzorowania walcowego elipsoidy na płaszczyznę, zwanego odwzorowaniem Merkatora dla elipsoidy. Wyniki jego badań przez wiele lat pozostawały w zapomnieniu, co mogło wynikać z ich niezrozumienia (F. Biernacki 1949, J. Snyder 1987).

$$\begin{cases} y = A\ln\left[tg\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\varphi}{2}\right)\left(\dfrac{1-e\sin\varphi}{1+e\sin\varphi}\right)^{e/2}\right] \\ x = A\lambda \end{cases} \tag{3}$$

gdzie *A* jest współczynnikiem wyrażającym proporcjonalność zmiennych zespolonych płaszczyzny i elipsoidy z zachowaniem konforemności.

Dalsze prace nad odwzorowaniami konforemnymi, jak podaje F. Biernacki (1949), prowadził francuski matematyk i astronom Joseph Louis Lagrange (ur. w 1736 r. w Turynie – zm. w 1813 r. w Paryżu). W rozprawie *Sur la construction des cartes géographiques, premier et second memoir* (1779) rozwiązał on ogólnie problem konforemnego odwzorowania powierzchni obrotowej na płaszczyznę metodą funkcji zmiennej zespolonej. Podał także ogólny wzór na skalę tego odwzorowania. Swoją uwagę skupił na problematyce konforemnych odwzorowań kołowych powierzchni obrotowych, a otrzymane rezultaty odniósł do kuli oraz spłaszczonej elipsoidy obrotowej[5]. Podjął również problem konforemnych odwzorowań powierzchni obrotowych na kulę określając go – za pomocą funkcji zmiennych zespolonych – ogólnym związkiem:

$$\varphi_k + i\lambda_k = f(\varphi + i\lambda) \tag{4}$$

gdzie *f* oznacza pewną funkcję analityczną.

[4] Termin „konforemny" został użyty po raz pierwszy w 1843 roku przez C. Gaussa w pracy zatytułowanej *Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie*. Rozróżnienie terminologiczne, a tym samym większą ścisłość w definiowaniu pojęć „równokątność" i „konforemność", wprowadził matematyk C. Caratheodory w 1932 roku. Od tego czasu „równokątność" jest rozumiana jako zachowanie wierności kątów bez względu na zwrot kąta, a „konforemność" jest szczególnym przypadkiem równokątności, gdzie obok wielkości zachowane są również zwroty kątów, czyli wiernie odwzorowują się kąty skierowane (F. Biernacki 1949).

Najprostszy przypadek otrzymujemy wtedy, gdy współrzędne izometryczne[6] na kuli (φ_k, λ_k) przyrównamy do współrzędnych izometrycznych na powierzchni obrotowej (φ, λ), czyli i. Jest to tzw. konforemne odwzorowanie sferyczne Lagrange'a. Zmniejszając stopień ogólności swych badań, odkrył on zależność między szerokością geograficzną na elipsoidzie (elipsoidalną) a odpowiadającą jej szerokością geograficzną na kuli (kulistą). Opisuje ją wzór:

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}\pm\frac{1}{2}\varphi_k\right)=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}\pm\frac{1}{2}\varphi\right)\left(\frac{1\mp e\sin\varphi}{1\pm e\sin\varphi}\right)^{\frac{e}{2}} \tag{5}$$

Odwzorowanie wykorzystujące tę zależność nosi nazwę konforemnego odwzorowania Lagrange'a elipsoidy obrotowej spłaszczonej na kulę. Drugie współrzędne na obu bryłach pozostają w relacji $\lambda_k = \lambda$. Jako promień kuli, jak podaje F. Biernacki (1949), obiera się najczęściej promień równikowy odwzorowywanej elipsoidy obrotowej (*R*=*a*). Ponieważ zależność ta została zbadana w 1807 r. przez profesora uniwersytetu w Halle, a później w Lipsku – Carla Mollweide'go (ur. w 1774 r. w Wolfenbüttel – zm. w 1825 r. w Lipsku), odwzorowanie to w literaturze określane jest również mianem konforemnego odwzorowania Mollweidego elipsoidy na kulę. Bezpośrednie wzory definiujące to odwzorowanie, jak podaje F. Biernacki (1949), C. Mollweide zawarł w pracy *Einige Projections-Arten der sphäroidischen Erde.*

Problemem tym zajmował się również Johann Carl Friedrich Gauss (ryc. 5) (ur. w 1777 r. w Brunszwiku – zm. w 1855 r. w Getyndze), który będąc naukowcem o szerokich zainteresowaniach, zajmował się matematyką, fizyką, astronomią oraz geodezją (R. Ogrissek 1983).

Głównym celem C. Gaussa było znalezienie takiego odwzorowania, które pozwoliłoby na lepsze przystosowanie obrazu sferycznego do obszaru odwzorowywanego, niż pozwalało na to odwzorowanie Lagrange'a zdefiniowane wzorem (5). W tym celu C. Gauss zmodyfikował wzór (4) wprowadzając dodatkowe zmienne α i k:

$$\varphi_{ik} + i\lambda_k = \alpha(\varphi_{ie} + i\lambda) - \ln k \tag{6}$$

gdzie φ_{ik} jest szerokością izometryczną dla kuli, a φ_{ie} szerokością izometryczną dla elipsoidy.

Po uwzględnieniu modyfikacji C. Gaussa wzór

Ryc. 5. Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855) (źródło: http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Gauss.html)

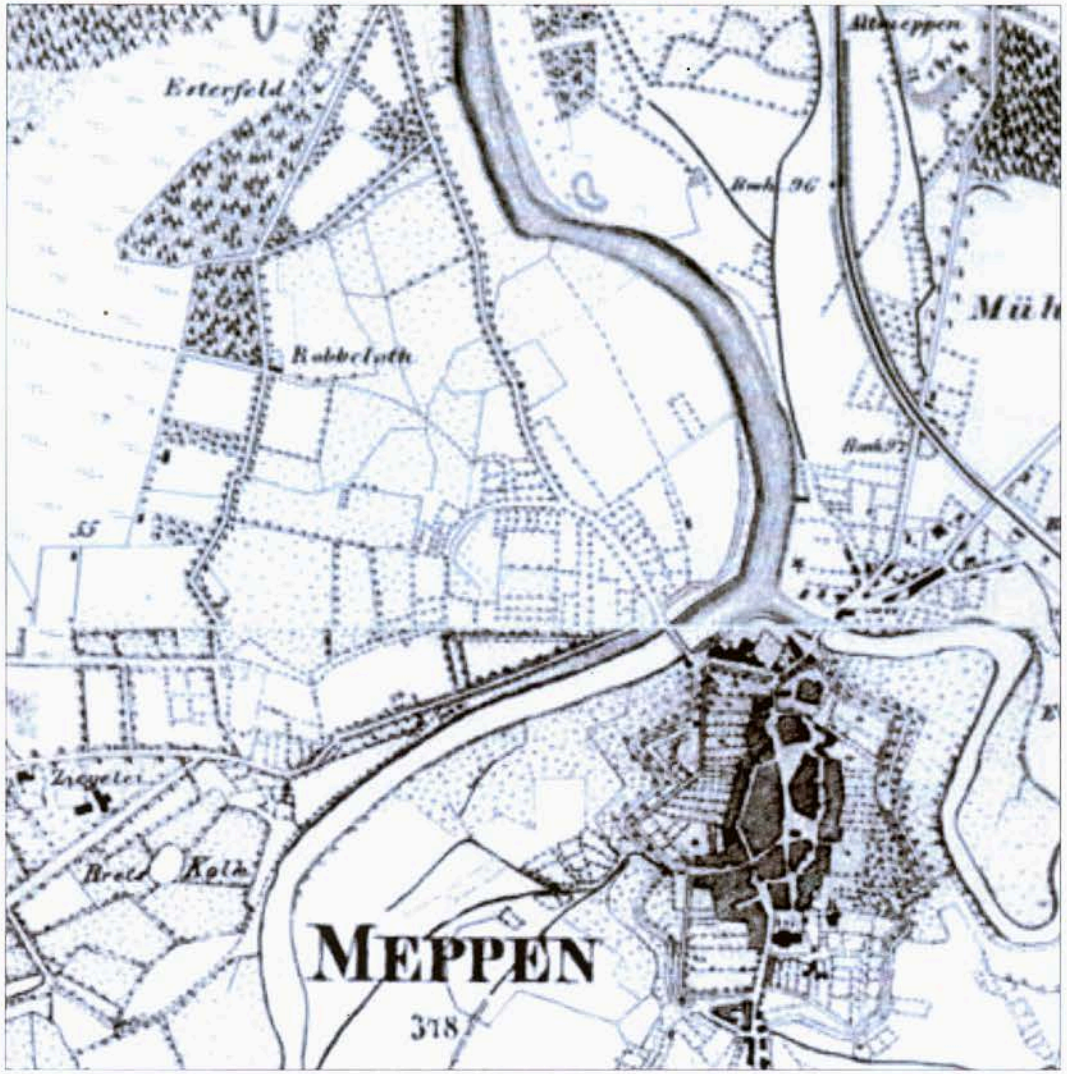
na konforemne odwzorowanie elipsoidy na kulę przyjął postać:

$$\begin{cases} \lambda_k = \alpha\lambda \\ \mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}\pm\dfrac{1}{2}\varphi_k\right)=\dfrac{1}{k}\mathrm{tg}^{\alpha}\left(\dfrac{\pi}{4}\pm\dfrac{\varphi}{2}\right)\left(\dfrac{1\mp e\sin\varphi}{1\pm e\sin\varphi}\right)^{\alpha\frac{e}{2}} \end{cases} \tag{7}$$

Parametry α, k i R (promień kuli) C. Gauss określił z dodatkowego warunku, jakim było uzyskanie jednakowych, minimalnych wartości zniekształceń liniowych dla wąskiego pasa w otoczenieniu równoleżnika o przyjętej wartości szerokości geograficznej φ' na elipsoidzie. Z tego względu promień kuli jest wyznaczany odmiennie niż w konforemnym odwzorowaniu Lagrange'a elipsoidy obrotowej spłaszczonej na kulę i jest on średnim geometrycznym promieniem krzywizny elipsoidy w szerokości φ'. Dzięki wyznaczeniu stałych α, k i R z powyższego warunku, odwzorowanie elipsoidy na kulę doskonale nadaje się do przedstawienia pasów rozciągających się wzdłuż równoleżników. Tak sformułowane odwzorowanie zostało podane przez autora w 1843 r., a rok później ogłoszone w pracy zatytułowanej *Untersuchungen über einige Gegenstände der höheren Geodezie.* Nosi ono

[5] Do połowy XVIII wieku Ziemia była uważana za kulę. Dopiero dwie ekspedycje astronomiczno-geodezyjne Francuskiej Akademii Nauk rozstrzygnęły rozgorzały w XVIII wieku spór o kształt Ziemi, spowodowany wywodami teoretycznymi I. Newtona (J. Szaflarski 1965).

[6] Pojęcie współrzędnych izometrycznych wyjaśniają F. Biernacki (1949) i I. Gajderowicz (1999).



Ryc. 6. Fragment arkusza 34 (Meppen) mapy topograficznej okolic Hanoweru wydanego w 1858 r., skala oryginału 1:21 333 (źródło: http://www.lgn.de/produkte/historische_karten/index.htm)

Fig. 6. Fragment of sheet 34 (Meppen) of a topographic map of the Hannover area published in 1858; original scale 1:21 333

nazwę odwzorowania Gaussa elipsoidy na kulę (F. Biernacki 1949) lub konforemnego odwzorowania Gaussa elipsoidy obrotowej spłaszczonej na kulę (F. Kuska 1953) lub rzutu równokątnego Gaussa (A. Łomnicki 1956).

Przypadek, gdy α =1 i k =1 jest zatem wspomnianym wcześniej odwzorowaniem odkrytym przez J.L. Lagrange'a w 1779 r., a zbadanym przez K. Mollweidego (1807) i przytoczonym przez C. Gaussa w jego klasycznej pracy z 1822 r. W pracy tej C. Gauss rozpatrzył także przypadek szczególny, gdy α =1, natomiast stała k jest określana z warunku dodatkowego. Była nim jednakowa wartość skali m (gdzie m jest funkcją punktu powierzchni) dla zewnętrznych skrajnych szerokości odwzorowywanego obszaru, a tym samym dla szerokości środkowej możliwie bliska minimalnej wartości, którą przez odpowiedni dobór promienia kuli R można uczynić równą 1 (F. Biernacki 1949).

Wspomniana powyżej praca była odpowiedzią na ogłoszony w tym samym roku przez Królewskie Towarzystwo Naukowe w Kopenhadze konkurs na rozwiązanie zadania dotyczącego odwzorowania jednej powierzchni na drugą z zachowaniem podobieństwa cząsteczkowego. C. Gauss podał ją do wiadomości publicznej w 1822 r. Problem ten nurtował C. Gaussa, zainspirowanego lekturą rozprawy J.L. Lagrange'a, już od 1816 roku. Nagrodzona rozprawa ukazała się drukiem dopiero w 1825 r. C. Gauss sformułował w niej „równanie różniczkowe dla konforemnego odwzorowania dowolnych dwóch powierzchni na siebie" i zauważył, że „problem zależy tylko od proporcjonalności wielkości podstawowych pierwszego rzędu teorii powierzchni" (F. Biernacki 1949, s. 239).

Konforemne odwzorowanie Gaussa elipsoidy obrotowej spłaszczonej na kulę było z powodzeniem stosowane w wielkoskalowej kartografii niemieckiej w pracach Pruskiego Urzędu Pomiarowego w latach 1876–1913. Współrzędne obliczone dla kuli odwzorowywano na płaszczyznę z zastosowaniem poprzecznego odwzorowania Merkatora (pierwszego odwzorowania Lamberta). Złożenie tych dwóch przekształceń nosi nazwę pruskiego rzutu podwójnego (A. Łomnicki 1956). Stało się ono powszechne i używane przy opracowywaniu map wielkoskalowych od czasu przyjęcia elipsoidy[7] obrotowej spłaszczonej jako bryły przybliżającej kształt Ziemi i odwzorowywanej na płaszczyznę. Umożliwiało to uniknięcie skomplikowanych obliczeń bazujących na równaniach odwzorowawczych elipsoidy na płaszczyznę.

Dokonania C. Gaussa w dziedzinie geodezji wiążą się także z wcześniejszymi pracami triangulacyjnymi na obszarze Królestwa Hanoweru, wykonywanymi przez oficerów Hanowerskiego Korpusu Inżynierów w latach 1827–1861. Jako jeden z pierwszych opracowany został arkusz *Meppen 34* (ryc. 6) (internet 5).

Zastosowane wówczas odwzorowanie A. Łomnicki (1956) nazwał współrzędnymi hanowerskimi. Polegało ono na złożeniu dwóch przekształceń, z których pierwszym etapem jest odwzorowanie elipsoidy na walec, a drugim odwzorowanie pobocznicy walca na płaszczyznę z zachowaniem określonych warunków. W 1865 r. francuski profesor kartografii A. Germain jako pierwszy określił tego typu złożenie przekształceń mianem Transverse Mercator (J. Snyder 1987), czyli terminem, który jest stosowany także w odniesieniu do pierwszego odwzorowania Lamberta (poprzecznego Merkatora).

Niestety, podobnie jak w przypadku Kremera, C. Gauss nie opublikował szczegółów dokonanych przez siebie obliczeń (J. Szaflarski 1965), co groziło popadnięciem w zapomnienie jego dokonań. Nie stało się tak dzięki Oskarowi Schreiberowi, który po śmierci C. Gaussa, na podstawie zachowanej korenspondencji, opublikował jego metodę w 1866 r. w pracy pt. *Theorie der Projektionsmethode der hannoverschen Landesvermessung*, zawierającej rozwinięcie Gaussowskich formuł (A.R. Hinks 1921, internet 6).

Odwzorowanie opracowane przez Gaussa było odpowiedzią na potrzeby wojska. Zmieniające się techniki wojenne, wraz z którymi modernizowała się armia, wymusiły konieczność opracowywania coraz dokładniejszych map. Ich niezwykle istotną własnością miała być wiernokątność oraz możliwie niewielkie zniekształcenia odległości. Z tego względu zastosowanie znalazły odwzorowania poprzeczne walcowe dzielone na pasy odwzorowawcze przebiegające wzdłuż kół wielkich, za które obierano dwa przeciwległe południki.

Metodę Gaussa stosowano w XIX w. także poza Europą, m.in. do sporządzenia map topograficznych Egiptu. Prace z ramienia Egiptian Survey Department nadzorował J.I. Craig, który powyższe odwzorowanie zaadaptował do wszystkich map tej instytucji i nazwał je odwzorowaniem konforemnym Gaussa. Część kartografów z początku XX w. (A.R. Hinks 1921) uważała jednak, że taka nazwa jest niepoprawna. Zwracali oni uwagę na to, że słowo „konforemne" należało zastąpić jego nowszym odpowiednikiem, tj. słowem „ortomorficzne" oraz że odwzorowaniem Gaussa nazywano wówczas także odwzorowanie stożkowe ortomorficzne. Również J. Różycki (1950a) zauważa, że pod nazwą: odwzorowanie Gaussa w literaturze kartograficznej i geodezyjnej rozumiane jest odwzorowanie stożkowe wiernokątne kuli na płaszczyznę.

Osobą, której udało się na podstawie rękopisu odtworzyć odwzorowanie zastosowane przez Gaussa – wykorzystane przy kartowaniu okolic Hanoweru, a nie opublikowane – był niemiecki matematyk i geodeta Johannes Heinrich Luis Krüger (ryc. 7) (ur. w 1857 r. w Elze k. Hanoweru – zm. w 1923 r. tamże). Stopień doktora uzyskał w 1883 r. w Tybindze broniąc rozprawy na temat linii geodezyjnych na sferoidzie. Jego najdonioślejszą publikacją była praca pt. *Konforme Abbildung des Erdellipsoids in die Ebene*, wydana w Poczdamie w 1912 r. (J. Szaflarski 1965;

[7] W. Kosiński (2002) jako jedną z pierwszych podaje elipsoidę obliczoną w 1810 r. przez J. Delambre o parametrach: a = 6 376 985 m, b = 6 356 323 m, p = 1:309. Natomiast A. Łomnicki (1927) podaje, że J. Delambre obliczył parametry elipsoidy w 1806 r. i miały one wynosić a = 6 375 650 m i b = 6 356 323 m.

Ryc. 7. Johannes Heinrich Luis Krüger (1857–1923) (źródło: J. Bollmann, W. G. Koch, 2001)

J. Bollmann, W.G. Koch 2001). L. Krüger odtworzył i rozwinął dokonania C. Gaussa, stąd odwzorowanie, które przedstawił we wspomnianej pracy, znane jest pod nazwą odwzorowania Gaussa-Krügera.

Można je przedstawić na dwa sposoby. Pierwszy z nich polega na wiernokątnym odwzorowaniu elipsoidy na pobocznicę walca w położeniu normalnym (gdzie obraz południka początkowego przyjmujemy za oś *X*), a następnie na odwzorowaniu pobocznicy walca na płaszczyznę z zachowaniem warunku wiernokątności. W tym drugim kroku konieczne jest, aby oś *X* przeszła na nową oś *X'*, która przedstawia wierne rozwinięcie południka początkowego. Wykorzystując liczby zespolone i rozwinięcie ich funkcji w szereg Taylora, otrzymujemy układ równań (8) na współrzędne płaskie płaszczyzny *X'Y'* wyrażone za pomocą szerokości i długości geograficznej φ i λ.

Drugi sposób zaproponowany przez L. Krügera pozwala na lepsze wniknięcie w istotę tego odwzorowania (A. Łomnicki 1956). Kolejne kroki konstrukcji odwzorowania Gaussa-Krügera tym sposobem, tj. jako odwzorowania potrójnego, zostały sformułowane w pracy J. Balcerzaka, J. Panasiuka i U. Pokrowskiej (1999) następująco:

1) przejście od współrzędnych elipsoidalnych do geograficznych sferycznych (za pomocą odwzorowania Lagrange'a);

2) przejście od współrzędnych geograficznych sferycznych do współrzędnych biegunowych sferycznych;

3) przejście od współrzędnych biegunowych sferycznych do współrzędnych prostokątnych płaskich w odwzorowaniu poprzecznym Merkatora (pierwszym odwzorowaniu Lamberta);

4) odwzorowanie płaszczyzny XOY na płaszczyznę xoy w taki sposób, aby południk osiowy odwzorował się na odcinek osi *x* ze współczynnikiem skali liniowym równym jeden.

L. Krüger pierwsze przejście wykonywał rozwijając funkcję w szereg Taylora, zamiast wzoru podanego przez J.L. Lagrange'a (4), a promień kuli dobierał tak, aby obwód koła wielkiego na niej był równy obwodowi elipsy południkowej. Odwzorowanie poprzeczne Merkatora, wykorzystane w kolejnym kroku, L. Krüger zmodyfikował w taki sposób, że współrzędną *y* wyznaczył za pomocą wzoru przybliżonego.

Obraz południka środkowego jest odwzorowywany bez zniekształceń (współczynnik zmiany skali na południku osiowym jest równy jeden) i obierany za oś rzędnych prostokątnego układu współrzędnych płaskich danego pasa. Osią odciętych owego układu jest natomiast obraz równika. Obrazy pozostałych południków i równoleżników są liniami krzywymi symetrycznymi względem obu osi.

Zniekształcenia długości wzrastają dość szybko wraz z oddalaniem się od południka osiowego, dlatego nie stosuje się tego odwzorowania do przedstawiania całej powierzchni elipsoidy. Stosuje się natomiast serię odwzorowań wzdłuż słupów południkowych, z których każdy odwzorowuje się na właściwy sobie walec poprzeczny styczny wzdłuż południka osiowego. Największe zniekształcenia długości występują w obrazie równika na krawędziach odwzorowywanego pasa. Wartości zniekształceń długości w tych punktach determinują użyteczny rozmiar słupa południkowego. Biorąc pod uwagę powyższe argumenty, L. Krüger zaproponował podział elipsoidy na trzystopniowe słupy południkowe, obierając południk Greenwich jako południk graniczny pierwszej strefy odwzorowawczej. Słupy te ponumerował liczbami arabskimi o wartościach rosnących w kierunku wschodnim (F. Kuska, 1953). W podobny sposób skonstruował słupy

$$
\begin{cases}
x' = s(\varphi) + \dfrac{\lambda^2}{2!} R \sin\varphi \cos\varphi + \dfrac{\lambda^4}{4!} R \sin\varphi \cos^3\varphi (5 - tg^2\varphi + 9e^2 \cos^2\varphi + 4e^2 \cos^4\varphi) + \ldots \\
y' = \lambda R \cos\varphi + \dfrac{\lambda^3}{3!} R \cos^3\varphi (1 - tg^2\varphi + e^2 \cos^2\varphi) + \ldots
\end{cases}
\tag{8}
$$

sześciostopniowe, których południki graniczne były zgodne z podziałem *Międzynarodowej Mapy Świata* (*MMŚ*). Różniły się od niego jedynie numeracją.

Odwzorowanie Gaussa-Krügera w trzystopniowych słupach odwzorowawczych wprowadzono w całych Niemczech w 1927 r., natomiast w Polsce w 1928 r. w słupach dwustopniowych. Stosowano je do obliczeń wyników triangulacji państwowej zgodnie z przepisami ówczesnego Ministerstwa Robót Publicznych. Elipsoidą odniesienia była elipsoida Bessela z punktem przyłożenia w Borowej Górze (J. Różycki 1950b).

W 1947 roku obszar Polski podzielono na trzystopniowe słupy południkowe z przyjętą na południku środkowym skalą m_0=0,999935. Dzięki temu zmniejszone zostały zniekształcenia na krawędziach słupów odwzorowawczych. W trzystopniowych słupach zniekształcenia liniowe nie przekraczały 15 cm na 1 km, a zniekształcenia powierzchni nie były większe niż 0,03 ha na 1 km^2. Tak zmodyfikowane odwzorowanie Gaussa-Krügera nosiło nazwę odwzorowania południkowego wiernokątnego (J. Różycki 1973). W 1949 r. Główny Urząd Pomiarów Kraju postanowił przyjąć skalę m_0=1 jako obowiązującą dla całej Polski. Właśnie to ostatnie odwzorowanie – zdaniem J. Różyckiego (1950b) i R. Kadaja (2000) – powinno nosić nazwę odwzorowania Gaussa-Krügera.

Opisane odwzorowanie weszło do powszechnego użytku w niemal wszystkich krajach europejskich, przede wszystkim ze względu na jego liczne zalety i przydatność do opracowania map topograficznych oraz obliczeń wyników pomiarów geodezyjnych. Zalety owe A. Macioch (1994) formułuje następująco:

• odwzorowanie jest wiernokątne, co ułatwia opracowanie redukcji odwzorowawczych;

• prawie równoległy układ ekwideformat względem prostoliniowego obrazu południka środkowego wąskiej strefy wyznacza przejrzysty rozkład zniekształceń odwzorowawczych;

• możliwe jest analityczne rozszerzenie każdej ze stref odwzorowawczych;

• przeliczanie współrzędnych punktów ze stref sąsiednich nie sprawia trudności;

• w przypadku map topograficznych zniekształcenia odwzorowawcze długości na krawędziach stref są na tyle małe, że można je zaniedbać (A. Macioch 1994).

Pomimo wyżej wspomnianych zalet, porównywanie siatek kartograficznych map topograficznych krajów europejskich, choć wykonanych w tym samym odwzorowaniu, sprawiało wiele trudności. Było to związane z konstruowaniem tego odwzorowania z zastosowaniem różnych elipsoid odniesienia (J. Różycki 1953). Najbardziej powszechnymi były: elipsoida Hayforda (1910) (Bułgaria, Finlandia, Portugalia, Turcja, Włochy, USA), Bessela (1841) (Niemcy, Austria, Liechtenstein, Luksemburg, Norwegia, Szwecja), Aire'go (1830) (Wielka Brytania) oraz Krassowskiego (1942) (Polska, Czechosłowacja, ZSRR). Stosowano także różne szerokości słupów odwzorowawczych (2°15' – Szwecja, 2°20'– Norwegia, 3°, 6° – Polska, Czechosłowacja, Niemcy) oraz różne współczynniki zmiany skali na południkach osiowych (J. Różycki 1953, J. Szaflarski 1965, A.H. Robinson, R. Sale, A. Morisson 1988).

Odwzorowanie Gaussa-Krügera znalazło zastosowanie w opracowaniu wielkoskalowych map wojskowych całego świata, wykonywanych od 1947 r. przez armię Stanów Zjednoczonych Ameryki. Wykorzystano je opracowując mapy terenów leżących między równoleżnikami 80° S i 84° N, a dla różnych obszarów Ziemi zastosowano różne elipsoidy odniesienia: Clarka 1886, Bessela 1841 (D. Maling 1973, J. Snyder 1987). Walce eliptyczne były sieczne względem elipsoidy w każdym słupie odwzorowawczym, a współczynnik zmiany skali na południkach osiowych wynosił 0,9996. Skala liniowa była zachowana wiernie jedynie wzdłuż obrazów linii równoległych, odległych w terenie od południka osiowego o około 180 km. Na krawędziach sześciostopniowych słupów współczynnik zmiany skali wynosił 1,0016. Taka modyfikacja odwzorowania Gaussa-Krügera zyskała miano UTM (Universal Transverse Mercator)[8].

Od 1949 r. w odwzorowaniu tym wykonywane są mapy wojskowe w państwach członkowskich Paktu Północnoatlantyckiego (NATO) z tą tylko różnicą, że obecnie obowiązującą elipsoidą odniesienia jest elipsoida geocentryczna GRS-80. Odwzorowanie to zostało także zalecone przez Międzynarodową Unię Geodezji i Geofizyki (IUGG) podczas IX Konferencji tej organizacji w Brukseli w 1951 r. i przyjęte przez cywilne służby

[8] W literaturze przedmiotu można spotkać się także z określeniem UTM System, które niekiedy bywa utożsamiane z odwzorowaniem UTM, a na dodatek nie zawsze jest rozumiane jednoznacznie. Niekiedy tą nazwą określa się układ współrzędnych prostokątnych płaskich obejmujący całą kulę ziemską, bazujący na układzie odniesienia WGS-84, zmodyfikowanym odwzorowaniu Gaussa-Krügera (m_0=0,9996) dla obszaru od 80°S do 84°N oraz odwzorowaniu azymutalnym stereograficznym w położeniu normalnym dla obszarów od 80°S do 90°S oraz od 84°N do 90°N. Wielu autorów (A.H. Robinson i inni 1995, E. Sobczyński i inni 2000) ogranicza jednak pojęcie UTM System tylko do układu współrzędnych prostokątnych płaskich opartego na układzie odniesienia WGS-84 oraz zmodyfikowanym odwzorowaniu Gaussa-Krügera (m_0=0,9996) dla obszaru od 80°S do 84°N, określając układ współrzędnych dla wyższych szerokości geograficznych, bazujący na odwzorowaniu stereograficznym, mianem UPS (Universal Polar System).

topograficzne wielu państw (A. Łyszkowicz, S. Łyszkowicz 1995). W Polsce stosowane jest od 1993 r., czyli od momentu pojawienia się perspektywy przystąpienia Polski do Paktu Północnoatlantyckiego (R. Kadaj 2000).

Odwzorowanie UTM bywa utożsamiane z odwzorowaniem Gaussa-Krügera. Obu nazw nie należy jednak używać jako synonimów, zważywszy na jasno zdefiniowane i niezmienne parametry odwzorowania UTM, na co zwraca uwagę również R. Kadaj (2000). Uważa on, iż pod nazwą: odwzorowanie Gaussa-Krügera, należy rozumieć wiernokątne walcowe poprzeczne styczne odwzorowanie elipsoidy niezmieniające skali południka środkowego (m_0=1). Jeśli ta skala jest różna od jedności – zazwyczaj mniejsza (wtedy odwzorowanie jest sieczne) – to powinno się używać nazwy modyfikowane odwzorowanie Gaussa-Krügera. W przypadku zaś, gdy współczynnik zmiany skali na południkach osiowych wynosi 0,9996, to taką modyfikację powinniśmy określać mianem UTM.

Z tego względu odwzorowania zastosowane w nowej edycji polskich cywilnych map topograficznych poprawnie należałoby nazywać modyfikowanymi odwzorowaniami Gaussa-Krügera, gdyż współczynniki zmiany skali na południkach środkowych wynosiły: m_0=0,9993 (Państwowy Układ Współrzędnych Płaskich 1992) oraz m_0=0,999923 (Państwowy Układ Współrzędnych Płaskich 2000) (R. Kadaj 2000). W nowej edycji polskich wojskowych map topograficznych, opracowywanych w standardach NATO, zastosowano odwzorowanie UTM. W obu edycjach map topograficznych zarówno wojskowych, jak i cywilnych, za elipsoidę odniesienia przyjęto elipsoidę geocentryczną GRS-80.

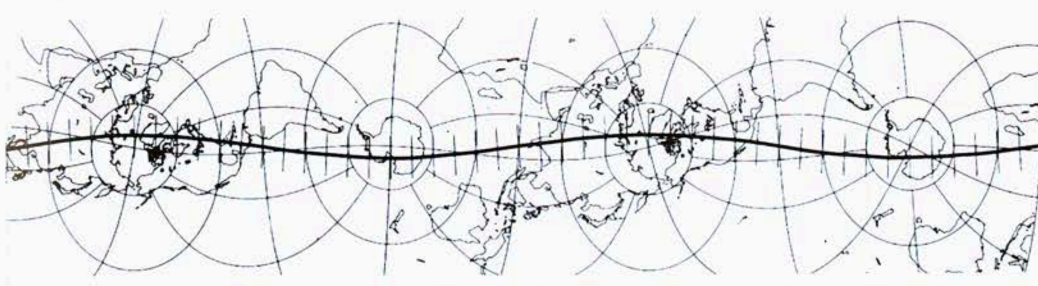
Wszystkie powyższe przykłady dotyczące odwzorowania Gaussa-Krügera odnoszą się do poprzecznego położenia walca. Niekiedy jednak kształt, rozciągłość oraz usytuowanie krajów względem kierunków świata powodują, iż bardziej korzystnym byłoby zastosowanie pojedynczej strefy tego samego rodzaju odwzorowania, ale z centralną linią pokrywającą się raczej z osią terytorium kraju niż z południkiem. Zamiast południka za linię centralną słupa odwzorowawczego wybiera się oś terytorium przecinającą linie siatki geograficznej pod określonym azymutem. Dla otrzymania takiego odwzorowania stosowane są te same podstawy konstrukcji, co w przypadku odwzorowania poprzecznego, zarówno wtedy gdy powierzchnią odniesienia jest kula lub elipsoida. Niezależnie od tej powierzchni odwzorowanie to określane jest w literaturze terminem skośnego odwzorowania Merkatora (Oblique Mercator) ze wskazaniem na formę sferyczną lub elipsoidalną.

Skośne odwzorowanie Merkatora elipsoidy po raz pierwszy było zastosowane przez M. Rosenmunda na początku XX wieku do kartowania topograficznego Szwajcarii, następnie w 1928 r. przez J. Laborde'a na Madagaskarze, a w 1943 r. przez J.H. Cole'a we Włoszech. Natomiast odwzorowanie w formie sferycznej wykorzystał H.J. Andrews w 1935 i 1938 r. do opracowania map Stanów Zjednoczonych Ameryki oraz Eurazji (J. Snyder 1987).

Czwartą odmianę formy elipsoidalnej odzworowania skośnego Merkatora opracował brytyjski geodeta Martin Hotine w 1947 r. Podobnie jak poprzednie – wspomniane powyżej – spełniało ono warunek konforemeności, ale w przeciwieństwie do nich zachowywało stałą skalę wzdłuż linii centralnej. J. Snyder (1987) do określenia tego odwzorowania używa nazwy odwzorowanie skośne Merkatora-Hotine'a (Hotine Oblique Mercator). Sam autor zaś określał je mianem skorygowanego skośnego ortomorficznego (rectified skew orthomorphic). Zastosował je do kartowania topograficznego Borneo, Malezji, Liberii, w latach sześćdziesiątych XX wieku – półwyspu Alaska, a w latach siedemdziesiątych do wykonania map Wielkich Jezior. Wtedy też J.B. Rowland wykorzystał je do konstruowania obrazów otrzymywanych ze zdjęć satelitarnych z satelitów Landsat 1, 2 oraz 3, na krótko przed wprowadzeniem odwzorowania Space Oblique Mercator (J. Snyder 1987, 1993). Linia centralna odwzorowania Hotine'a mogła zostać wybrana jako linia o określonym azymucie przez jeden punkt, znajdujący się zazwyczaj w środku kartowanego obszaru, lub jako linia geodezyjna (najkrótsza linia między dwoma punktami na elipsoidzie).

Drugie z wyżej wymienionych podejść znalazło zastosowanie w sporządzaniu obrazów ze zdjęć satelitarnych. Jednakże rzut toru podsatelitarnego niezupełnie pokrywa się z liniami centralnymi kolejnych odwzorowań Hotine'a. (J. Snyder 1987). Dzieje się tak, gdyż całościowa geometria otrzymywanych w sposób dynamiczny obrazów satelitarnych jest konsekwencją ruchu wirowego Ziemi, orbitującego satelity i urządzenia skanującego.

Z tego względu opracowano nowe odwzorowanie o unikalnych właściwościach, znane jako odwzorowanie SOM (Space Oblique Mercator), które mimo że bardzo przypomina skośne walcowe odwzorowanie Merkatora, nie jest w pełni konforemne. W obrębie pasa skanowania – pasa terenu rejestrowanego przez satelitę



Ryc. 8. Dwa ślady toru podsatelitarnego satelity Landsat 5 (ścieżka 15 – lewa oraz 31 – prawa) w odwzorowaniu SOM (linie siatki kartograficznej co 30°) (źródło: J. Synder 1987)

Fig. 8. Two satellite paths of Landsat 5 (path 15 – left, path 31 – right) on SOM projection (lines in 30 intervals) (from J. Snyder, 1987)

– odstępstwa są zaniedbywalne i z tego wzgledu jest ono użyteczne tylko dla relatywnie wąskich pasów wzdłuż śladu toru podsatelitarnego (internet 7). Przykładowy pas przedstawiono na ryc. 8. Zauważalna jest na niej różnica w długościach obrazów tych samych południków na sąsiednich orbitach. Krótkie proste linie, niemal prostopadłe względem śladu toru podsatelitarnego, są przykładowymi liniami skanowania rozciągniętymi na 15° od owego śladu.

Mimo, że ślad toru podsatelitarnego nie jest kołem wielkim na referencyjnym globie, obiera się go za linię centralną odwzorowania, wzdłuż której współczynnik zmiany skali jest bliski jedności. Ekwideformatami są linie znajdujące się w jednakowych odległościach od śladu toru podsatelitarnego. Ponadto ślad ten jest zakrzywiony, co wynika z nałożenia ruchu satelity po orbicie na ruch wirowy Ziemi, i ograniczony w obszarach polarnych do 81°N i 81°S ze względu na nachylenie orbity satelity do płaszczyzny równika ziemskiego.

Kiedy NASA w 1972 r. wprowadziła na orbitę satelitę ERTS-1 (przemianowanego w 1975 r. na Landsat 1), równania odwzorowania SOM były nieznane. Pierwszą osobą, która zdała sobie sprawę z potrzeby istnienia takiego odwzorowania był A. Colvocoresses, który zdefiniował je geometrycznie w 1974 r. Służba Geologiczna Stanów Zjednoczonych (USGS) miała trudności z wyprowadzeniem formuł odwzorowania i z tego względu – w trakcie konferencji geodezyjnej organizowanej przez Ohio State University w 1976 r. – zaapelowała o pomoc w rozwiązaniu problemu. Na apel odpowiedział m.in. J.P. Snyder, który wziął udział w konferencji w trakcie swojego urlopu (kartografia była jego hobby i dla niej był w stanie poświęcić zaplanowane wakacje, aby uczestniczyć w konferencji). Opracował on jeden z przybliżonych sposobów wyznaczania problematycznych formuł korzystając z kalkulatora kieszonkowego i przekazał go USGS. Do profesjonalnej kadry tej instytucji dołączył później, bo w 1978 r., gdzie rozpoczął swoją drugą karierę w wieku 52 lat jako kartograf matematyczny, będąc wcześniej uznanym inżynierem chemikiem (internet 8).

Formuły matematyczne odwzorowania SOM opracowane zostały także w 1977 r. przez J.L. Junkinsa z Uniwesytetu Virginia, ale ograniczały się tylko do satelitów o orbitach bliskich kołu. Pełne obliczenia dla orbit o dowolnej eliptyczności podał J. P. Snyder w 1981 r. Swoje równania odwzorowawcze rozwinął stosując kombinację narzędzi empirycznych i teoretycznych. Wykonał także programy do testowania swojego rozwiązania na pierwszych programowalnych kalkulatorach oraz w GIS (internet 9).

Opisane wyżej odwzorowanie nie ma innych zastosowań, jak tylko do zobrazowań satelitarnych. Stosowano je przede wszystkim do sporządzania obrazów uzyskiwanych z satelitów systemu Landsat, ale może być również stosowane dla dowolnego satelity poruszającego się dookoła Ziemi po kołowej lub eliptycznej orbicie nachylonej względem osi Ziemi pod dowolnym kątem. Jego zaletą jest również fakt, iż siatka kartograficzna oraz siatka współrzędnych płaskich UTM może być wpasowana na zdjęcie z satelity bez zauważalnych błędów (internet 7).

* * *

Nad teorią przedstawionych powyżej odwzorowań pracowało przez ponad 400 lat wielu wybitnych uczonych. Trudno więc dziwić się powstałemu zamieszaniu terminologicznemu. Aby łatwiej można było dostrzec wkład każdej z wymienionych wyżej osób w rozwój teorii konforemności, informacje o ich dokonaniach zestawiono w tabeli 1.

Zauważalna mnogość nazw wynika stąd, iż osiągnięcia zarówno Merkatora jak i C. Gaussa

Tabela 1. Odwzorowanie Merkatora i jego pochodne

Rok	Autor	Dokonanie	Spotykana nazwa odwzorowania
940	Ch'ien Lo-Chih	Prawdopodobnie jako pierwszy wykonał mapę w odwzorowaniu walcowym normalnym stycznym wiernokątnym	
1511	E. Etzlaub (1462–1532)	Prawdopodobnie jako pierwszy Europejczyk wykonał mapę w odwzorowaniu walcowym normalnym stycznym wiernokątnym	
1569	G. Kremer (Merkator) (1512–1594)	Opracował wielką mapę świata stosując walcowe normalne styczne wiernokątne odwzorowanie kuli	odwzorowanie Merkatora, projekcja wzrastających długości
1599	E. Wright (1558?–1615)	Podał przybliżony sposób obliczenia siatki Merkatora	odwzorowanie Wrighta
1645	H. Bond	Podał dokładniejszy od Wrighta sposób obliczenia odwzorowania Merkatora	
1668	J. Gregory (1638–1675)	Podał pełną matematyczną formę obliczenia odwzorowania Merkatora z wykorzystaniem rachunku całkowego	
1670	I. Barrow (1630–1677)	Podał prostszą wersję udowodnienia formuły matematycznej odwzorowania Merkatora zaproponowanej przez J. Gregory'ego	
1772	J.H. Lambert (1728–1777)	Ustanowił równanie różniczkowe, z którego wyprowadził odwzorowanie Merkatora w położeniu poprzecznym. Wyprowadził wzór konforemnego odwzorowania walcowego elipsoidy na płaszczyznę	poprzeczne odwzorowanie Merkatora, pierwsze odwzorowanie Lamberta, odwzorowanie Gaussa, Merkatora-Gaussa, Lamberta-Gaussa lub Tranverse Mercator, Lambert's spherical transverse Mercator, odwzorowanie Merkatora dla elipsoidy
1779	J.L. Lagrange (1736–1813)	Podjął problem konforemnych odwzorowań powierzchni obrotowych na kulę. Odkrył związek między szerokością geograficzną na kuli (kulistą) a odpowiadającą jej szerokością geograficzną na elipsoidzie (elipsoidalną)	konforemne odwzorowanie sferyczne Lagrange'akonforemne odwzorowanie Lagrange'a elipsoidy obrotowej spłaszczonej na kulę
1807	K. Mollweide (1774–1825)	Zbadał związek między szerokością geograficzną na kuli a odpowiadającą jej szerokością na elipsoidzie oraz podał bezpośrednie wzory konforemnego odwzorowania elipsoidy na kulę	konforemne odwzorowanie Mollweidego elipsoidy na kulę
1827–1861	J.C.F. Gauss (1777–1855)	Dla potrzeb prac triangulacyjnych Królestwa Hanoweru zaproponował dwustopniowe przekształcenie polegające w pierwszej kolejności na konforemnym odwzorowaniu elipsoidy na pobocznicę walca, a tej z kolei na inną płaszczyznę.	współrzędne hanowerskie
1843		Uogólnił formułę konforemnych odwzorowań powierzchni obrotowych na kulę zaproponowaną przez J. Lagrange'a	odwzorowanie Gaussa elipsoidy na kulę, konforemne odwzorowanie Gaussa elipsoidy obrotowej spłaszczonej na kulę, rzut równokątny Gaussa

Rok	Autor	Dokonanie	Spotykana nazwa odwzorowania
1865	Germain		Transverse Mercator (nazwa spotykana w literaturze amerykańskiej dla współrzędnych hanowerskich)
1866	O. Schreiber	Opublikował metodę Gaussa w oparciu o zachowaną korenspondencję	
1876–1913		Pruski Urząd Pomiarowy stosował złożenie odwzorowania Gaussa elipsoidy na kulę oraz poprzecznego odwzorowania Merkatora w kartografii wielkoskalowej	pruski rzut podwójny
XIX/XX w.	J.I. Craig	Zaadaptował współrzędne hanowerskie do wszystkich map Egiptian Survey	odwzorowanie konforemne Gaussa
1903	M. Rosenmund	Opublikował obliczenia elipsoidalnej formy odwzorowania skośnego Merkatora stosowanego w kartowaniu topograficznym Szwajcarii	skośne odwzorowanie Merkatora (Oblique Mercator) – forma elpsoidalna ze współczynnikiem zmiany skali $m_0=1$
1912	J.H. Krüger (1857–1923)	Na podstawie rękopisów odtworzył metodę Gaussa (współrzędne hanowerskie) i rozwinął ją	odwzorowanie Gaussa-Krügera (wiernokątne walcowe poprzeczne styczne odwzorowanie elipsoidy ze współczynnikiem zmiany skali $m_0=1$)
1947		Zmodyfikowane odwzorowanie Gaussa-Krügera stosowane w Polsce o współczynniku $m_0=0,999935$	odwzorowanie południkowe-wiernokątne
1947		Armia Stanów Zjednoczonych zastosowała zmodyfikowane odwzorowanie Gaussa-Krügera o współczynniku $m_0=0,9996$	UTM (Universal Transverse Mercator)
1947	M. Hotine (1898–1968)	Opracował odmianę formy elipsoidalnej skośnego odwzorowania Merkatora zachowującą stałą skalę wzdłuż linii centralnej	skośne odwzorowanie Mekatora Hotine'a (Hotine Oblique Mercator), poprawione skośne odwzorowanie ortomorficzne (rectified skew orthomorphic)
1949		Wojskowe służby topograficzne krajów członokwskich NATO stosują zmodyfikowane odwzorowanie Gaussa-Krügera o współczynniku $m_0=0,9996$	UTM (Universal Transverse Mercator)
1974	A.P. Colvocoresses	Jako pierwszy, zdefiniował geometrycznie odwzorowanie potrzebne do kartowania z obrazów satelitarnych	Space Oblique Mercator – wiernokątne walcowe skośne styczne odwzorowanie elipsoidy niezmieniające skali wzdłuż śladu toru podsatelitarnego ($m_0=1$)
1977	J.L. Junkins	Opracował niekompletne formuły matematyczne odwzorowania SOM	
1981	J.P. Snyder (1926–1997)	Opracował ostateczne formuły matematyczne odwzorowania SOM, podał pełne obliczenia dla orbit dowolnej eliptyczności	

trzeba było odtwarzać z pozostawionych dokumentów. Z tego względu ich dokonania były często przypisywane tym, którzy opracowywali spuściznę poprzedników. Co więcej, C. Gauss często korzystał z prac innych matematyków, nie zawsze się na nich powołując. Dlatego zdarzało się, że dokonania innych naukowców przypisywane były C. Gaussowi (G. Karský 1977).

Zamieszanie terminologiczne zawsze prowadzi do nieporozumień. W dzisiejszych czasach jest ono tym bardziej uciążliwe, jeśli weźmiemy pod uwagę dynamiczny rozwój kartografii komputerowej oraz systemów informacji geograficznej. Odwzorowania wykorzystywane w GIS wymagają precyzyjnego określenia wszystkich parametrów, dlatego jest ważne, aby zarówno użytkownicy jak i autorzy oprogramowania pod tą samą nazwą rozumieli to samo odwzorowanie i definiowali je w ten sam sposób.

Typowy przykład braku jednoznacznego rozumienia danego terminu możemy spotkać w literaturze amerykańskiej (M. Kennedy, S. Kopp 2000), w której odwzorowanie poprzeczne Merkatora (Transverse Mercator) bywa utożsamiane z odwzorowaniem Gaussa-Krügera. Taka sytuacja wyniknęła z unikania w USA po II wojnie światowej niemiecko brzmiących nazw odwzorowań poprzez zastępowanie ich innymi terminami. Jednakże podchodząc od strony matemarycznej do teorii odworowań konforemnych, odwzorowanie poprzeczne Merkatora istotnie można traktować jako szczególny przypadek odwzorowania Gaussa-Krügera (podobnie zresztą jak inne modyfikacje i przybliżenia tego odwzorowania, np. odwzorowanie Thompsona) (B. Gdowski 1964).

Mając na uwadze, że poza środowiskiem matematyków mówienie o kuli nie sugeruje myślenia o szczególnym przypadku elipsoidy, istotne różnice między kolejnymi modyfikacjami odwzorowania Merkatora, których historii jest poświęcony niniejszy artykuł, są – zdaniem autorów – wystarczającym powodem do stosowania precyzyjnych nazw, jednakowo rozumianych przez wszystkich kartografów.

Literatura

Balcerzak J., Panasiuk J., Pokrowska U., 1999, *Wybrane zagadnienia z podstaw teorii odwzorowań kartograficznych*. Warszawa: Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej.

Biernacki F., 1949, *Teoria odwzorowań powierzchni dla geodetów i kartografów*. „Prace Geodezyjnego Instytutu Naukowo-Badawczego" Nr 4, Warszawa: Główny Urząd Pomiarów Kraju.

Bollmann J., Koch W.G., 2001, *Lexikon der Kartographie und Geomatik*. Bd.1, Heilderberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Churski Z., Galon R., 1996, *Siatki kartograficzne*. Toruń: Wydawn. Uniwersytetu Mikołaja Kopernika.

Deetz Ch.H., Adams O.S., 1921, *Elements of map projection with applications to map and chart constrution*. Washington: U.S. Coast and Geodetic Survey.

Gajderowicz I., 1999, *Kartografia matematyczna dla geodetów*. Olsztyn: Wydawnictwo Akademii Rolniczo-Technicznej.

Gdowski B., 1964, Odwzorowanie *Gaussa-Krügera całej sferoidy*. „Geodezja i Kartografia" T. 13, nr 3, s. 209–229.

Hinks A.R., 1921, *Map projections*. Cambridge: Cambridge University Press.

Kadaj R., 2000, *Rady na układy*. „Geodeta" nr 9 (64), s. 14–18.

Karský G., 1977, *Gaussův vzorec, Gaussova metoda...*. „Geodetický a Kartografický Obzor" T. 23/65, č. 5, s. 108–110.

Kennedy M. , Kopp S., 2000, *Understanding map projections. GIS by ESRI*. Redlands, ESRI, Inc.

Kosiński W., 2002, *Geodezja*. Warszawa: Wydawn. SGGW.

Koszarski W., 1984, *Merkator (Gerard Kremer) – twórca nowożytnej kartografii (ur. 5 III 1512, zm. 2 XII 1594)*. „Geografia w Szkole" T. 37, nr 3, s. 172.

Kuska F., 1953, *Matematická kartografia*. (skrypt nr VS 106). Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo.

Łomnicki A., 1956, *Kartografia matematyczna*. Warszawa: PWN.

Łyszkowicz A., Łyszkowicz S., 1995, *Układy współrzędnych geodezyjnych w Polsce i ich transformacje*. „Przegl. Geolog." T. 43, nr 5, s. 412–416.

Macioch A., 1994, *Układy współrzędnych polskich map topograficznych. Ich relacje i skutki praktyczne*. W: *Polska kartografia map topograficznych*. Pod red. B. Horodyskiego. Warszawa: s. 59–69.

Maling D.H., 1973, *Coordinate systems and map projections*. London: George Philip and Sons Limited.

Monmonier M., 2004, *Rhumb lines and map wars: a social history of the Mercator projection*. Chicago: The University of Chicago Press.

Ogrissek R. (red.), 1983, *ABC Kartenkunde*. Leipzig: VEB F.A. Brockhaus Verlag.

Robinson A.H., Sale R., Morrison J., 1988, *Podstawy kartografii*. Warszawa: PWN.

Robinson A.H., Morrison J., Muehrcke P., Kimerling A., Guptill S., 1995, *Elements of cartography*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Różycki J., 1950a, *Krótki zarys teorii odwzorowań kartograficznych. Część I*. Warszawa: PWT.

Różycki J., 1950b, *Odwzorowanie Gaussa-Krügera i jego zastosowanie w Polsce*. „Prace Geodezyjnego Instytutu Naukowo-Badawczego" Nr 8, Warszawa: Główny Urząd Pomiarów Kraju.

Różycki J., 1953, *Krótki zarys teorii odwzorowań kartograficznych. Część II*. Warszawa: PWT.

Różycki J., 1973, *Kartografia matematyczna*. Warszawa: PWN.

Sirko M., 1999, *Zarys historii kartografii*. Lublin: Wydawn. UMCS.

Snyder J.P., 1987, *Map projections – a working manual*. „U.S. Geological Survey Professional Paper" 1395, Washington, DC: U.S. Government Printing Office.

Snyder J.P., 1993, *Flattening the Earth: Two thousand years of map projections*. Chicago: The University of Chicago Press.

Sobczyński E., Tomaszewski Z., Sielecki J., 2000, *Polskie wojskowe mapy w standardach NATO (przewodnik)*. Warszawa: Sztab Generalny WP, Zarząd Geografii Wojskowej.

Szaflarski J., 1965, *Zarys kartografii*. Wyd. 2. Warszawa: PPWK.

Wereszczyński J., 1970, *Kartografia nawigacyjna. Część I. Podstawy matematyczne*. Warszawa: PWN.

Źródła internetowe

1. http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/toolbox/map/mercatorprojection.html
2. http://www.lib.virginia.edu/speccol/exhibits/lewis_clark/exploring/ch1-5.html
3. http://www.math.ubc.ca/~israel/m103/mercator/mercator.html
4. http://geography.about.com/library/weekly/aa030201b.htm
5. http://www.lgn.de/produkte/historische_karten/index.htm
6. http://fsinf.dyndns.org:8080/~xenia/Studium/Examen/examench7.html#x12-1160022
7. http://hcgl.eng.ohio-state.edu/~yi/map636/group61.htm
8. http://exchange.manifold.net/manifold/manuals/5_userman/mfd50Space_Oblique_Mercator.htm
9. http://cgis.towson.edu/tugis2003/abstracts/abstractdetail.asp?id=101

Recenzował dr hab. Jerzy Balcerzak

From Mercator to Space Oblique Mercator

Summary

Key words: Gerard Kremer (Mercator), conformal cylindrical projection, Mercator projection, Gauss-Krüger projection, UTM (Universal Transverse Mercator), SOM (Space Oblique Mercator)

Encountered problems with the naming of projections of Mercator, Gauss, Gauss-Krüger and UTM led the authors to this attempt to systematize the terminology in the field.

Gerard Kremer (Mercator) – the founder of modern cartography, who is most famous for his 1569 map of the world, was the first to apply the conformal cylindrical projection in normal aspect. Now it is referred to as Mercator projection, although Ch'ien Lo-Chih (940), Erhard Etzlaub (1511) and Edward Wright (1599) are also sometimes considered to be its authors. Henry Bond (1645) and James Gregory (1668) worked on the mathematical formula of this projection.

The theory of conformal projections of a sphere onto a plane intrigued not only cartographers, but also scientists of other disciplines. In 1772 German mathematician J.H. Lambert invented differential equation, from which he developed the formula for Mercator projection in transverse aspect. Further research on conformity were conducted by French mathematician and astronomer J.L. Lagrange. In 1779 he generally solved the problem of conformal projection of an oblate surface onto a plane. He analysed a specific case of a projection of an oblate ellipsoid flattened at the poles onto a sphere, which later became known as Lagrange conformal projection. In literature it is also referred to as Mollweide's conformal projection of an ellipsoid onto a sphere.

Also C. Gauss researched this field. In 1825 he elaborated a differential equation for a conformal projection of any two surfaces onto one another. He was looking for a solution, which would make it possible to relate spherical image to the projected area better than in the case of Lagrange's projection. The results he presented in detail for oblate ellipsoid. And it is this particular case, when an oblate ellipsoid is projected onto a sphere, which is referred to as Gauss projection. It is also referred to as a conformal transformation of a sphere on a side of a transverse cylinder, or a conformal transformation of a sphere onto a tube in transverse aspect, known as Lambert-Gauss or Mercator-Gauss projection.

C. Gauss also authored a two stage projection used for triangulation, first applied in the area of Hannover (Hannover coordinates). L. Krüger retrieved it from manuscripts and developed further; so that now it is known as Gauss-Krüger projection. It is a transverse tangent conformal cylindrical projection of an ellipsoid with the scale reduction factor along the central meridian being 1.0. In the late 1940s a variant of this projection (m_0=0.9996) called UTM (Universal Transverse Mercator) was widely applied.

Earlier research had been conducted on possible applications of two diagonal variants of conformal projections (M. Rosemund, M. Hotine). An ellipsoid version of diagonal Mercator projection which is scale conformal along the central meridian found wider use. It was authored by Hotine, and known as modified diagonal orthomorphic projection. It was used for presentation of images from the first series of Landsat satellites. However a tangent conformal cylindrical

diagonal transverse ellipsoid projection, scale conformal along the satellite's path (m_0=1.0) proved more practical for such applications. Its mathematical formula was developed by J.P. Snyder in 1981. It is usually referred to as SOM (Space Oblique Mercator) projection.

Translated by M.Horodyski

От Меркатора до Space Oblique Mercator

Резюме

Встречаемые проблемы с номенклатурой относительно проекций Меркатора, Гаусса, Гаусса-Крюгера и UTM привели авторов настоящей статьи к попытке систематизирования терминологии в этой области.

Gerard Kremer (Merkator) – создатель современной картографии, которому наибольшую славу принесла карта мира 1569 г., одним из первых применил цилиндрическую равноугольную проекцию в нормальном положении. Сегодня именно такую проекцию называем проекцией Меркатора, хотя её авторство приписывается тоже Ch'ien Lo-Chih (940), Erhard Etzlaub (1511), а также Edward Wright (1599). Математической записью этой проекции занимались, между другими, Henry Bond (1645) и James Gregory (1668).

Теория равноугольных проекций шара на плоскость интересовала не только картографов, но и учёных других дисциплин. Немецкий математик J.H. Lambert (Ламберт) в 1772 г. разработал дифференциальное уравнение, из которого вывел проекцию Меркатора в поперечном положении. Дальнейшие работы по теории конформности вёл французский математик и астроном J.L. Lagrange (Лагранж). В своей работе в 1779 г. он решил в общих чертах проблему конформной проекции вращающейся поверхности на плоскость. Он изучил особый случай проекции сплющенного вращающегося эллипсоида на шар, позднее называемой конформной проекцией Лагранжа. В литературе она именуется также конформной проекцией Mollweide эллипсоида на шар.

Этой проблемой занимался также C. Gauss (Гаусс), который в 1825 г. разработал „дифференциальное уравнение для конформной проекции любых двух поверхностей на себя". Он разработал преобразования, проектирующие вращающуюся поверхность на шар, и приспособил эту теорию для вращающегося эллипсоида. Именно этот случай, когда вращающийся эллипсоид проектируем на шар, называем проекцией Гаусса. Она понимается также как конформное преобразование шара на бок поперечного цилиндра, называемая иногда проекцией Ламберта-Гаусса или Меркатора-Гаусса.

Гаусс был также автором двухступенчатой проекции, использованной во время триангуляционных работ, которая была использована впервые в окрестностях Ганновера (ганноверские координаты). На основе рукописи воссоздал её и развил L. Kruger (Крюгер), поэтому сейчас она известна под названием проекции Гаусса-Крюгера. Эта равноугольная цилиндрическая поперечно-касательная проекция эллипсоида с коэффициентом изменения масштаба m_0 =1. В конце сороковых годов XX века широкое применение нашла разновидность этой проекции (m_0 = 0,9996) определённая названием UTM (Universal Transverse Mercator).

Ранее велись работы по использованию косых вариантов цилиндрических конформных проекций (M. Rosenmund, M. Hotine). Более широкое применение нашёл вариант эллипсоидальной формы косой проекции Меркатора, сохраняющей постоянный масштаб вдоль центральной линии авторства Hotine, известной под названием улучшенной косой ортоморфической проекции. Использовано их, между прочим, для представления изображений, полученных из первых спутников системы Landsat. Для этих целей, однако, более пригодна была бы равноугольная косая цилиндрическая касательная проекция эллипсоида, не меняющая масштаб вдоль следа подспутниковой траектории (m_0 =1), конечные математические формулы которой разработал J.P. Snyder в 1981 г. В литературе предмета она определяется названием проекции SOM (Space Oblique Mercator).

Перевод Р. Толстикова