

WYZNACZANIE MODUŁU RELAKSACJI NA PODSTAWIE POMIARÓW NAPRĘŻENIA W RZECZYWISTYM TEŚCIE RELAKSACJI

Anna Stankiewicz

Katedra Inżynierii Mechanicznej i Automatyki, Uniwersytet Przyrodniczy w Lublinie

Streszczenie. W pracy rozważany jest problem wyznaczenia modułu relaksacji materiałów liniowo lepkosprężystych na podstawie pomiarów naprężenia w rzeczywistym teście relaksacji o stałej prędkości odkształcania próbki w fazie wstępnej testu. Celem pracy jest opracowanie metody przybliżonej identyfikacji modułu relaksacji na podstawie danych z takiego testu. Bazując na uogólnionej metodzie trapezów opracowano metodę, w której przybliżenie modułu relaksacji w dowolnej chwili czasu wyznaczone jest na podstawie pomiarów naprężenia oraz jego pochodnej w dwu wybranych punktach próbkowania. Przy bardzo ogólnych założeniach dotyczących modułu relaksacji badanego materiału pokazano, że metoda ta zapewnia lepsze przybliżenie zarówno modułu relaksacji jak i naprężenia niż metoda Solvari-Malinena. Opracowana metoda jest punktem wyjścia dla syntezy szybkiego algorytmu identyfikacji modułu relaksacji.

Słowa kluczowe: test relaksacji naprężeń, skończony czas odkształcania, moduł relaksacji, algorytm identyfikacji

Wprowadzenie

Moduł relaksacji jest jedną z podstawowych charakterystyk materiałów lepkosprężystych [Ferry 1980]. Znając moduł relaksacji można wyznaczyć inne charakterystyki opisujące materiały w dziedzinie czasu, a także w dziedzinie częstotliwości, w szczególności te, które są najczęściej wykorzystywane w obliczeniach inżynierskich, czyli współczynnik lepkości, moduł Younga, współczynnik Poissona. Dla materiałów liniowo lepkosprężystych moduł relaksacji to – teoretycznie – naprężenie jakie powstaje w materiale przy skokowo podanym jednostkowym stałym odkształceniu. Dla wielu materiałów test relaksacji naprężeń jest wciąż podstawowym źródłem informacji empirycznej o ich własnościach reologicznych. Jest on stosowany, przykładowo, do badania własności reologicznych tworzyw biodegradowalnych [Figiel 2008], mięsa zwierząt gospodarskich [Nowak i Białobrzewski 2009], peletów [Czachor 2010], warzyw i owoców [Bohdziewicz i Grzemski 2011] lub żeli stosowanych w przemyśle spożywczym [Jakubczyk i Kamińska 2007]. Idealny test relaksa-

cji naprężeń o nieskończenie krótkim czasie odkształcania próbki jest w praktyce nierealizowalny [Lee i Knauss 2000; Flory i McKenna 2004]. W rzeczywistym teście relaksacji próbka poddawana jest odkształcaniu stopniowo, aż do osiągnięcia zadanego odkształcenia, które utrzymywane jest w drugiej fazie testu. Często praktyką jest wykorzystywanie danych z rzeczywistego testu relaksacji tak, jakby zostały one uzyskane w teście idealnym. Alternatywą jest stosowanie reguły dziesięciokrotności czasu odkształcania (ang. *ten-times rule* [Lee i Knauss 2000]), zgodnie z którą przyjmuje się, że naprężenie zarejestrowane w rzeczywistym teście relaksacji po czasie przekraczającym dziesięciokrotność czasu odkształcania można traktować jako tożsame z tym, jakie zostałyby uzyskane w teście idealnym. Pierwsze podejście może prowadzić do znacznych błędów (p. przykład 1 w tej pracy). Stosując podejście drugie pomija się istotne informacje o badanym materiale, jakie niesie przebieg naprężenia na początkowym odcinku czasu, gdy dynamika procesu relaksacji jest największa. W ciągu ostatnich kilkudziesięciu lat powstało kilka metod wyznaczania modułu relaksacji na podstawie pomiarów naprężenia w teście relaksacji uwzględniających niezerowy czas odkształcania próbki. Większość bazuje na założeniu, że odkształcenie we wstępnej fazie testu rośnie liniowo w czasie. Metody te można podzielić na dwie klasy. Pierwszą stanowią metody opracowane dla uogólnionego modelu Maxwella, w których przybliżenie modułu relaksacji wyznaczone jest optymalnie, tak aby zapewnić jak najlepsze dopasowanie modelu do danych pomiarowych [Knauss i Zhao 2007; Solvari i Malinen 2007; Tscharnuter i in. 2011]. W metodach tych dla wyznaczenia przybliżenia modułu relaksacji w wybranej chwili czasu wykorzystuje się wszystkie zgromadzone eksperymentalnie pomiary naprężenia. Wymagają one rozwiązania trudnych źle-uwarunkowanych problemów optymalizacji, niezbędne jest więc zastosowanie odpowiednich technik regularyzacji. Drugą grupę stanowią algorytmy, zgodnie z którymi przybliżenie modułu relaksacji wyznaczone jest w kolejnych chwilach czasu na podstawie jednego albo kilku pomiarów naprężenia. Do tej grupy należy najstarsza metoda Zapasa i Crafta [1965], rekurencyjna różniczkowa metoda Lee i Knaussa [2000] oraz reguła Solvari i Malinena [2006]. Metoda Zapasa-Crafta o prostej formule obliczeniowej, akceptowalnie odporna na zakłócenia pomiarowe, jest skuteczna tylko dla niewielkich czasów wstępnego odkształcania próbki, nie pozwala także na wyznaczenie modułu relaksacji dla czasu bliskiego zeru. Rekurencyjna metoda Lee i Knaussa wymaga znajomości dobrego punktu startowego, jej różniczkowa formuła implikuje też mniejszą odporność na zakłócenia. Metoda Solvari-Malinena pozwala wyznaczyć przybliżenie modułu relaksacji w dowolnej chwili czasu, jest jednak ono obciążone większym niż w metodzie Zapasa-Crafta błędem, jej odporność na zakłócenia też nie jest zadowalająca.

Cel i zakres pracy

Celem tej pracy jest opracowanie prostej metody przybliżonej identyfikacji modułu relaksacji na podstawie pomiarów naprężenia w rzeczywistym (nieidealnym) teście relaksacji naprężeń o stałej prędkości odkształcania wstępnego, która zapewniłaby lepszą niż metoda Solvari-Malinena dokładność przybliżenia modułu relaksacji w każdej chwili czasu i akceptowalną odporność na zakłócenia pomiarowe. Bazując na uogólnionej regule trapezów wyprowadzono przybliżoną formułę pozwalającą wyznaczyć moduł relaksacji w dowolnej chwili czasu na podstawie pomiarów naprężenia i jego pochodnej w dwu wybranych punk-

tach próbkowania. Badania objęły także teoretyczną analizę błędów modeli modułu relaksacji i naprężenia.

Material i eksperyment

1. Material

Rozważmy liniowy izotropowy materiał lepkosprężysty, dla którego w zakresie niewielkich deformacji związek między naprężeniem $\sigma(t)$ a odkształceniem $\varepsilon(t)$ opisuje całkowe równanie konstytutywne [Ferry 1980]

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t-\lambda)\dot{\varepsilon}(\lambda)d\lambda \quad (1)$$

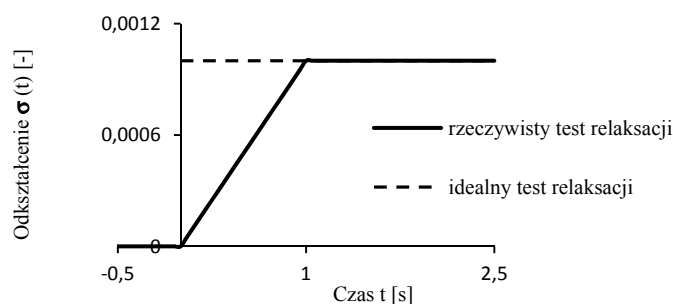
gdzie $G(t)$, $t \geq 0$, jest zależnym od czasu liniowym modułem relaksacji. Moduł $G(t)$ jest to naprężenie, jakie powstaje w materiale opisanym równaniem (1) dla jednostkowego, skokowo podanego odkształcenia $\varepsilon(t)$. Załóżmy, że opis matematyczny modułu relaksacji $G(t)$ jest całkowicie nieznany, natomiast naprężenie $\sigma(t)$ jest dostępne pomiarowo dla każdej chwili czasu $t \in [0, T]$, gdzie $0 < T < \infty$.

2. Eksperyment

Klasycznym sposobem wyznaczania charakterystyk lepkosprężystych jest, złożony z dwu faz, test relaksacji naprężeń [Lee i Knauss 2000]. W pierwszej fazie testu badana próbka poddawana jest odkształcaniu ze stałą prędkością aż do osiągnięcia założonej wartości odkształcenia ε_0 utrzymywanego w drugiej fazie testu. Odkształcenie, w takim rzeczywistym teście relaksacji (ang. *ramp-test* [Lee, Knauss 2000]) opisane jest więc funkcją

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \frac{\varepsilon_0}{t_R}t & \text{dla } 0 \leq t < t_R \\ \varepsilon_0 & \text{dla } t \geq t_R \end{cases} \quad (2)$$

której przebieg ilustruje rysunek 1; t_R oznacza czas narastania odkształcenia.



Źródło: opracowanie własne

Rys. 1. Przebieg odkształcenia w rzeczywistym teście relaksacji; $t_R = 1$ s, $\varepsilon_0 = 0,001$
 Fig. 1. Strain in the ramp-test; $t_R = 1$ s, $\varepsilon_0 = 0.001$

Na podstawie równań (1) oraz (2) naprężenie w drugiej fazie testu, czyli wówczas gdy dla $t \geq t_R$ utrzymywane jest stałe odkształcenie ε_0 , opisane jest całką

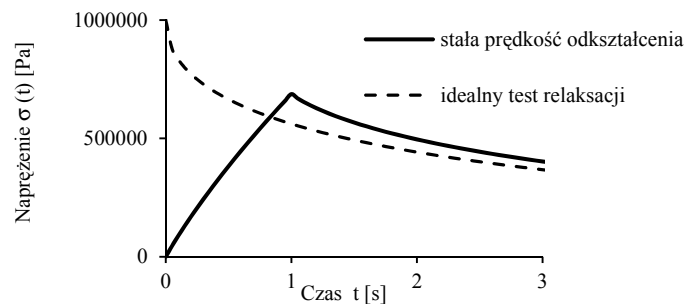
$$\sigma(t) = \frac{\varepsilon_0}{t_R} \int_0^{t_R} G(t - \lambda) d\lambda \quad (3)$$

skąd, poprzez zamianę zmiennych, otrzymujemy

$$\sigma(t) = \frac{\varepsilon_0}{t_R} \int_{t-t_R}^t G(u) du \quad (4)$$

Stąd na podstawie znanego wzoru na różniczkowanie całki o granicach zależnych od parametru [Fichtenholtz 1978, Twierdzenie 6, str. 572] mamy

$$\dot{\sigma}(t) = \frac{\varepsilon_0}{t_R} [G(t) - G(t - t_R)] \quad (5)$$



Źródło: opracowanie własne

Rys. 2. Przebiegi naprężenia w rzeczywistym i idealnym teście relaksacji
Fig. 2. Stress in ramp-tests and in ideal step strain relaxation test

Przykład 1. Rozważmy materiał o module relaksacji opisanym modelem KWW (Kohlrausch, Williams and Watts) postaci $G(t) = G_0 e^{-(t/\tau)^\beta}$ [Flory i McKenna 2004, Solvari i Malinen 2006], gdzie $G_0 = 10^9$ Pa, bezwymiarowy parametr $\beta = 0.5$, zaś czas relaksacji $\tau = 3$ s (materiał A) albo $\tau = 100$ s (materiał B). Czas $t_R = 1$ s, a odkształcenie $\varepsilon_0 = 0.001$. Przebieg naprężenia rejestrowanego w teście przeprowadzonym zgodnie z funkcją (2) ilustruje rysunek 2; linią przerywaną zaznaczono przebieg naprężenia, jakie zostałyby uzyskane dla idealnego testu relaksacji o odkształceniu skokowym postaci $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 1(t)$, gdzie $1(t)$ jest skokiem jednostkowym. Różnica pomiędzy wartością obu sygnałów dla czasu t_R przekracza 22%, a dla czasu $t = 10t_R$ jest rzędu 5% naprężenia z idealnego testu relaksacji. Tak więc wyznaczając moduł relaksacji zgodnie z wynikającą z (1) równością $G(t) = \sigma(t)/\varepsilon_0$ słuszną tylko dla idealnego testu relaksacji często popełnia się istotny błąd. Natomiast stosując regułę dziesięciokrotności czasu t_R traci się istotne informacje dotyczące przebiegu modułu relaksacji dla $t < 10t_R$.

3. Założenia

W pracy przyjmujemy następujące założenia.

Założenie 1. Moduł relaksacji $G(t)$ jest funkcją dwukrotnie różniczkowalną taką, że

$$G(t) \geq 0, -\frac{dG(t)}{dt} \geq 0, \frac{d^2G(t)}{dt^2} \geq 0 \quad \text{dla } t > 0 \quad (6)$$

Założenie to, przyjmowane przez wielu autorów [Galucio i in. 2004; Solvari i Malinen 2007] oznacza, że $G(t)$ jest monotonicznie malejącą funkcją wypukłą. Można pokazać, że jeśli jest ono spełnione, to również naprężenie w rzeczywistym teście relaksacji $\sigma(t)$ (4) jest monotonicznie nierosnącą funkcją wypukłą dla dowolnego $t > t_R$.

Założenie 2. Druga pochodna $d^2G(t)/dt^2$ jest funkcją monotonicznie nierosnącą dla dowolnego $t > 0$.

Założenia 1 i 2 oznaczają, że pochodna $\dot{G}(t)$ rośnie coraz wolniej w czasie. Typowe modele reologiczne (Maxwella, KWW, Pelega) spełniają przyjęte założenia.

Przybliżone metody identyfikacji modułu relaksacji

Pierwszą metodą uwzględniającą skończony czas t_R obciążania próbki jest metoda Zapasa i Crafta [1965], zgodnie z którą dla materiałów liniowo lepkosprężystych

$$G^{(ZC)}(t) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma \left(t + \frac{t_R}{2} \right) \quad (7)$$

Lee i Knauss [2000] zaproponowali formułę różniczkową bazującą na (5), która dla dyskretnych danych pomiarowych przyjmuje postać rekurencyjnego schematu obliczeń

$$G^{(LK)}(t_i) = G^{(LK)}(t_i - t_R) + \frac{t_R}{\varepsilon_0} \dot{\sigma}(t_i) \quad (8)$$

Stosując wzór trapezów do całki (4) Solvari i Malinen [2006a] opracowali formułę

$$G^{(T2)}(t - t_R) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma(t) - \frac{t_R}{2\varepsilon_0} \dot{\sigma}(t) \quad (9)$$

a następnie uogólnili ją dla materiałów nieliniowo lepkosprężystych [Sorvari i in. 2006].

Badania symulacyjne wskazują, że prosta reguła Zapasa-Crafta pozwala wyznaczyć bardzo dobre przybliżenie modułu relaksacji i jest odporna na zakłócenia pomiarowe, jeśli tylko ich wartość średnia jest zerowa. Jej mankamentem jest jednak ograniczenie stosowalności do czasu $t \geq t_R/2$ oraz niesatysfakcjonujące oszacowanie wartości początkowej modułu relaksacji. Stosowalna dla dowolnego $t \geq 0$ metoda Solvari-Malinena zapewnia gorsze przybliżenie modułu relaksacji i jest mało odporna na zakłócenia pomiarowe. Skuteczność schematu Lee i Knaussa, zarówno przy obliczeniach ”w przód” jak i ”wstecz”, może gwarantować tylko bardzo dobry punkt startowy.

Nowa metoda identyfikacji modułu relaksacji

Można pokazać, że dla monotonicznie niemalejącej i wypukłej funkcji $G(t)$ trzy punktowa uogólniona metoda trapezów

$$\int_{t-t_R}^t G(u) du \approx \left[\frac{1}{2} G(t - t_R) + G \left(t - \frac{t_R}{2} \right) + \frac{1}{2} G(t) \right] \frac{t_R}{2} \quad (10)$$

zapewnia lepsze przybliżenie całki $\int_{t-t_R}^t G(u)du$ niż prosta reguła dwupunktowa zastosowana przez Solvari i Malinena w [2006a]. Na podstawie (10) oraz (3) dla dowolnego $t \geq t_R$ otrzymujemy następujące przybliżenie naprężenia

$$\sigma(t) \approx \frac{\varepsilon_0}{t_R} \left[\frac{1}{2} G(t-t_R) + G\left(t - \frac{t_R}{2}\right) + \frac{1}{2} G(t) \right] \frac{t_R}{2} \quad (11)$$

Przybliżając $G\left(t - \frac{t_R}{2}\right)$ zgodnie z formułą Solvari-Malinena (9)

$$G\left(t - \frac{t_R}{2}\right) \approx \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma\left(t + \frac{t_R}{2}\right) - \frac{t_R}{2\varepsilon_0} \dot{\sigma}\left(t + \frac{t_R}{2}\right) \quad (12)$$

na podstawie (11), (12) oraz (5) po prostych przekształceniach otrzymujemy następujący algorytm identyfikacji modułu relaksacji

$$G^{(T3)}(t-t_R) = \frac{2}{\varepsilon_0} \sigma(t) - \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma\left(t + \frac{t_R}{2}\right) + \frac{t_R}{2\varepsilon_0} \dot{\sigma}\left(t + \frac{t_R}{2}\right) - \frac{t_R}{2\varepsilon_0} \dot{\sigma}(t) \quad (13)$$

zdefiniowany dla dowolnego $t_R > 0$ i każdego $t \geq t_R$.

Formuła (13) pozwala wyznaczyć przybliżenie modułu relaksacji w dowolnej chwili czasu $t \geq 0$ na podstawie pomiarów naprężenia i jego pochodnej w punktach próbkowania: $(t+t_R)$ oraz $(t+\frac{3t_R}{2})$. Podobnie jak w metodach Lee-Knaussa oraz Solvari-Malinena przybliżenia modułu relaksacji w kolejnych punktach pomiarowych nie są tu wyznaczane niezależnie. Zależność $G^{(T3)}(t)$ od naprężenia i jego pochodnej w dwu chwilach czasu powoduje, że schemat ten bardziej uwzględnia dynamikę zmian naprężenia niż formuła Solvari-Malinena (9).

Analiza

Szczegółową analizę porównawczą metod Zapasa-Crafta oraz Lee-Knaussa zawiera praca [Flory i McKenna 2004], metody Solvari-Malinena oraz Zapasa-Crafta zostały porównane w pracy [Solvari i Malinen 2006]. Analizę własności nowej metody ograniczymy do porównania jej z mającą podobną genezę metodą Solvari-Malinena. Ocenimy błąd przybliżenia modułu relaksacji oraz naprężenia; ze względu na limit stron dowody twierdzeń wykorzystujące aparat analizy wypukłej pominięto.

Błąd przybliżenia modułu relaksacji

Niech

$$ERRG^{(T3)}(t-t_R) = G^{(T3)}(t-t_R) - G(t-t_R) \quad (14)$$

będzie błędem przybliżenia modułu relaksacji. Można pokazać, że jeśli pomiary naprężenia są bezszumowe to

$$\varphi(t, t_R) \leq ERRG^{(2)}(t-t_R) \leq \frac{1}{2} \xi(t, t_R) \quad (15)$$

gdzie

$$\varphi(t, t_R) = -\frac{1}{2} [G(t-t_R) - G(t)] - \xi(t, t_R) \quad (16)$$

$$\xi(t, t_R) = \frac{1}{2}G\left(t - \frac{t_R}{2}\right) - G(t) + \frac{1}{2}G\left(t + \frac{t_R}{2}\right) \quad (17)$$

Można pokazać, że jeśli spełnione są założenia 1 i 2, to $\xi(t, t_R) \geq 0$ jest malejącą funkcją czasu t dla każdego $t_R > 0$ oraz rosnącą funkcją t_R dla każdego $t \geq t_R$. Stąd $\varphi(t, t_R) \leq 0$ jest rosnącą funkcją t dla każdego $t_R > 0$ oraz malejącą funkcją t_R dla każdego $t \geq t_R$. Wobec tego, biorąc pod uwagę, że przy przyjętych założeniach $\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = G_\infty < \infty$, łatwo stwierdzić, że zarówno dolne jak i górne oszacowanie błędu $ERRG^{(2)}(t - t_R)$ dąży monotonicznie do zera, gdy $t_R \rightarrow 0$ lub $t \rightarrow \infty$. Oznacza to, że dla dostatecznie dużego czasu t błąd przybliżenia modułu relaksacji jest pomijalnie mały niezależnie od czasu $t_R > 0$, a dla dostatecznie małego t_R błąd ten jest pomijalnie mały dla każdej chwili czasu t .

Jeśli spełnione jest założenie 1, to naprężenie w rzeczywistym teście relaksacji jest funkcją wypukłą. Dla każdego $t \geq t_R$ oraz $t_R > 0$ zachodzi więc nierówność

$$\sigma(t) \geq \sigma\left(t + \frac{t_R}{2}\right) + \dot{\sigma}\left(t + \frac{t_R}{2}\right)\left(-\frac{t_R}{2}\right) \quad (18)$$

stąd wobec (13) mamy

$$G^{(2)}(t - t_R) \geq \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma(t) - \frac{t_R}{2\varepsilon_0} \dot{\sigma}(t) \quad (19)$$

a na podstawie (9) otrzymujemy

$$G^{(2)}(t - t_R) \geq G^{(1)}(t - t_R) \quad (20)$$

Wykorzystując (20) oraz (15) można udowodnić następujący rezultat.

Twierdzenie 1. Jeśli spełnione są założenia 1 i 2, a pomiary naprężenia są bezszumowe, to dla każdego $t \geq t_R$ i każdego $t_R > 0$ zachodzi oszacowanie

$$|ERRG^{(T3)}(t - t_R)| \leq |ERRG^{(T2)}(t - t_R)| \quad (21)$$

gdzie

$$ERRG^{(T2)}(t - t_R) = G^{(T2)}(t - t_R) - G(t - t_R) \quad (22)$$

2. Błąd modelu naprężenia

Niech

$$\sigma^{(T2)}(t) = \frac{\varepsilon_0}{t_R} \int_0^{t_R} G^{(T2)}(t - \lambda) d\lambda \quad (23)$$

oraz

$$\sigma^{(T3)}(t) = \frac{\varepsilon_0}{t_R} \int_0^{t_R} G^{(T3)}(t - \lambda) d\lambda \quad (24)$$

będą naprężeniami jakie zostałyby zarejestrowane w rzeczywistym teście relaksacji o parametrach ε_0 i t_R dla modeli $G^{(T2)}(t)$ i $G^{(T3)}(t)$. Wykorzystując wypukłość funkcji $\sigma(t)$ (3) można wyprowadzić następujący rezultat.

Twierdzenie 2. Jeśli spełnione są założenia 1 i 2, a pomiary naprężenia są bezszumowe, to dla każdego $t \geq t_R$ i każdego $t_R > 0$ zachodzi oszacowanie $\sigma^{(T2)}(t) \leq \sigma^{(T3)}(t) \leq \sigma(t)$.

Rezultat ten nie jest zaskoczeniem, ponieważ jak już wspomniano w rozważnym przypadku trypunktowa metoda trapezów zapewnia lepsze przybliżenie naprężenia $\sigma(t)$ (3) niż metoda dwupunktowa. Oszacowania błędów przybliżenia modułu relaksacji oraz naprężenia podano dla pomiarów bezszumowych. Wyniki numerycznej analizy odporności algorytmu na zakłócenia pomiarowe przedstawiono w pracy [Stankiewicz 2012].

Wiadomo, że błąd metody trapezów jest wprost proporcjonalny do kwadratu długości przedziału całkowania. W pracy [Solvari i Malinen 2006] pokazano przy założeniu, że naprężenie $\sigma(t)$ jest funkcją nieskończenie wiele razy różniczkowalną, że własność tę posiadają także algorytmy Zapasa-Crafta i Solvari-Malinena. Wykorzystując dwukrotną różniczkowalność i wypukłość modułu relaksacji oraz uogólnione twierdzenie o wartości średniej można pokazać, że przy przyjętych założeniach zachodzi oszacowanie

$$|ERR\sigma^{(T^3)}(t)| \leq \frac{1}{4} \ddot{\sigma}(\check{t}) t_R^2 \quad (25)$$

gdzie $t < \check{t} < t + t_R$, a zatem opracowana metoda jest również metodą rzędu drugiego.

Podsumowanie

1. Bazując na uogólnionej metodzie trapezów wyprowadzono prostą metodę przybliżonej identyfikacji modułu relaksacji na podstawie pomiarów naprężenia zgromadzonych w teście relaksacji o stałej w czasie prędkości odkształcania wstępnego.
2. Teoretyczna analiza błędów modeli wskazuje, że opracowana metoda zapewnia lepsze przybliżenie zarówno modułu relaksacji jak i naprężenia niż należąca do tej samej grupy metod formuła Solvari-Malinena.
3. Przybliżenie modułu relaksacji w dowolnej chwili czasu wyznaczane jest na podstawie pomiarów naprężenia i jego pochodnej w tylko dwu wybranych punktach próbkowania. Metoda jest punktem wyjścia dla szybkiego algorytmu wyznaczania modułu relaksacji [Stankiewicz 2012], łatwego do zastosowanie w trybie *on-line* w czasie eksperymentu reologicznego.

Bibliografia

- Bohdziewicz J., Grzemski P.** (2011): Właściwości reologiczne warzyw uprawianych pod osłonami. Inżynieria Rolnicza, 8(133), 37-43.
- Czachor G.** (2010): Modele relaksacji naprężeń w płytach pilśniowych zawierających komponent słomy. Inżynieria Rolnicza, 1(119), 105-113.
- Ferry J. D.** (1980): Viscoelastic properties of polymers. John Wiley & Sons, New York.
- Fichtenholtz G. M.** (1978): Rachunek różniczkowy i całkowy. Tom II. PWN, Warszawa.
- Figiel A.** (2008): Właściwości reologiczne tworzywa biodegradowalnego wyznaczone na podstawie cyklicznego testu relaksacji naprężeń. Inżynieria Rolnicza, 4 (102), 271-278.
- Flory A., McKenna G.B.** (2004): Finite step rate corrections in stress relaxation experiments: a comparison of two methods. Mech. Time-Depend. Mater., 8, 17-37.
- Galucio A. C., Deü J-F., Ohayon R.**(2004): Finite element formulation of viscoelastic sandwich beams using fractional derivative operators. Computational Mechanics, 33, 282-291.
- Jakubczyk E., Kamińska A.** (2007): Właściwości mechaniczne porowatych żeli agarowych. Inżynieria Rolnicza, 5(93), 195-203.

- Knauss W.G., Zhao J.** (2007): Improved relaxation time coverage in ramp-strain histories. *Mech. Time-Depend. Mater.* 11(3-4), 199-216.
- Lee S., Knauss W.G.** (2000): A note on the determination of relaxation and creep data from ramp tests. *Mech. Time-Depend. Mater.* 4, 1-7.
- Nowak K., Białobrzewski I.** (2009): Modelowanie w środowisku Matlab reologicznych właściwości mięsa zwierząt gospodarskich. *Inżynieria Rolnicza*, 9(118), 177-180.
- Sorvari J., Malinen M.** (2006): Determination of the relaxation modulus of a linearly viscoelastic material. *Mech. Time-Depend. Mater.*, 10, 125-133.
- Sorvari J., Malinen M., Hämäläinen J.** (2006): Finite ramp time correction method for non-linear viscoelastic material model. *Int. Journal of Non-Linear Mechanics*, 41, 1058-1064.
- Stankiewicz A.** (2012): Algorytm identyfikacji modułu relaksacji na podstawie pomiarów naprężenia w rzeczywistym teście relaksacji. *Inżynieria Rolnicza* 4(193)T.1, 389-399.
- Tscharnuter D., Jerabek M., Major Z., Lang R.W.** (2011): On the determination of the relaxation modulus of PP compounds from arbitrary strain histories. *Mech. Time-Depend. Mater.* 15, 1-14.
- Zapas L.J., Craft T.** (1965): Correlation of large longitudinal deformations with different strain histories. *J. Res. Natl. Bur. Stand. A69*(6), 541-546.

DETERMINATION OF THE RELAXATION MODULUS ON THE BASIS OF THE RAMP-TEST STRESS DATA

Abstract. The problem of the linear relaxation modulus determination on the basis of the stress data from relaxation tests where a constant strain rate is followed by a constant strain is considered. The aim of the paper is to develop a method for approximate identification of relaxation modulus using relaxation data from such ramp test. Generalized three-point trapezoidal rule is used to derive a new method. The approximation of the relaxation modulus in successive time instants is determined on the basis of the stress and stress derivative measurements in only two appropriately chosen sampling points. It is proved under standard assumptions concerning the relaxation modulus of the material that the relaxation modulus and the ramp-test stress models determined according to the suggested method guarantee better approximation of the real relaxation modulus and stress than the Solvari-Malinen method. The method developed is a basis for synthesis of fast identification scheme.

Key words: stress relaxation test, finite ramp time, relaxation modulus, identification method

Adres do korespondencji:

Anna Stankiewicz; e-mail: anna.stankiewicz@up.lublin.pl
Katedra Inżynierii Mechanicznej i Automatyki
Uniwersytet Przyrodniczy w Lublinie
ul. Doświadczalna 50A
20-280 Lublin