

## ALGORYTM IDENTYFIKACJI MODUŁU RELAKSACJI NA PODSTAWIE POMIARÓW NAPRĘŻENIA W RZECZYWISTYM TEŚCIE RELAKSACJI

Anna Stankiewicz

Katedra Inżynierii Mechanicznej i Automatyki, Uniwersytet Przyrodniczy w Lublinie

**Streszczenie.** W pracy zaproponowano szybki algorytm przybliżonej identyfikacji modułu relaksacji materiałów liniowo lepkosprężystych na podstawie pomiarów naprężenia w rzeczywistym teście relaksacji o stałej prędkości odkształcania próbki w fazie wstępnej testu. Przybliżenie modułu relaksacji w dowolnej chwili czasu wyznaczane jest na podstawie pomiarów naprężenia oraz jego pochodnej w dwu wybranych punktach próbkowania. Badania numeryczne przeprowadzone dla modułu relaksacji opisanego funkcją KWW (Kohlrausch, Williams and Watts) potwierdzają wyniki analizy teoretycznej i dowodzą, że metoda ta zapewnia lepsze przybliżenie modułu relaksacji i naprężenia niż metoda Solvari-Malinena. Algorytm jest także bardziej odporny na zakłócenia niż schemat Solvari-Malinena.

**Słowa kluczowe:** test relaksacji naprężeń, stała prędkość odkształcania, moduł relaksacji, algorytm identyfikacji

### Wprowadzenie

Dla materiałów liniowo lepkosprężystych moduł relaksacji  $G(t)$  może być wyznaczony na podstawie pomiarów naprężenia  $\sigma(t)$  zgromadzonych w złożonym z dwu faz teście relaksacji naprężeń [Lee i Knauss 2000; Solvari i Maline 2006]. W pierwszej fazie testu badana próbka poddawana jest odkształcaniu ze stałą prędkością, aż do osiągnięcia założonej wartości odkształcenia  $\varepsilon_0$  utrzymywanego w drugiej fazie testu. Odkształcenie w takim rzeczywistym teście relaksacji (ang. *ramp-test* [Lee, Knauss 2000]) opisane jest funkcją

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ \frac{\varepsilon_0}{t_R} t & \text{dla } 0 \leq t < t_R \\ \varepsilon_0 & \text{dla } t \geq t_R \end{cases} \quad (1)$$

gdzie  $t_R$  jest czasem narastania odkształcenia, której przebieg ilustruje rysunek 1. Związek między naprężeniem  $\sigma(t)$ , odkształceniem  $\varepsilon(t)$  a modułem relaksacji  $G(t)$  opisuje całkowite równanie konstytutywne [Ferry 1980]

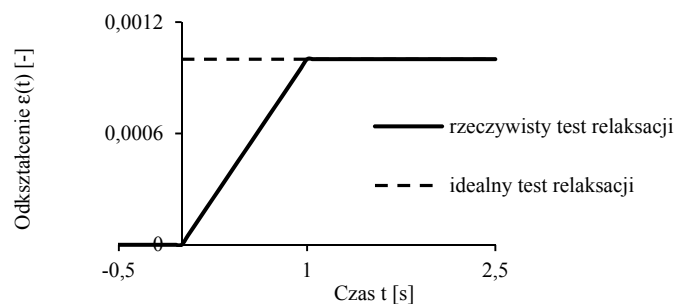
$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t - \lambda) \dot{\epsilon}(\lambda) d\lambda \quad (2)$$

W ciągu ostatnich kilkudziesięciu lat powstało kilka metod wyznaczania modułu relaksacji na podstawie pomiarów naprężenia w teście (1). Są to metody opracowane dla uogólnionego modelu Maxwella, w których przybliżenie modułu relaksacji wyznaczone jest optymalnie [Knauss i Zhao 2007; Solvari i Malinen 2007; Tscharnuter i in. 2011]. W metodach tych dla wyznaczenia przybliżenia modułu relaksacji w wybranej chwili czasu wykorzystuje się wszystkie zgromadzone eksperymentalnie pomiary naprężenia. Alternatywę stanowią algorytmy, w których przybliżenie modułu relaksacji wyznaczone jest w kolejnych chwilach czasu na podstawie jednego albo kilku pomiarów naprężenia: metoda Zapasa-Crafta [1965], rekurencyjna formuła Lee-Knaussa [2000] oraz reguła Solvari-Malinena [2006].

W pracy [Stankiewicz 2012] wyprowadzono nową formułę różniczkową przybliżającą moduł relaksacji. Teoretyczna analiza błędów wskazuje, że zaproponowana metoda zapewnia lepsze przybliżenie modułu relaksacji i naprężenia niż metoda Solvari-Malinena. Metoda ta jest podstawą szybkiego algorytmu identyfikacji przedstawionego w tej pracy.

## Cel i zakres pracy

Celem pracy było opracowanie szybkiego algorytmu przybliżonej identyfikacji modułu relaksacji na podstawie pomiarów naprężenia w rzeczywistym (nieidealnym) teście relaksacji naprężeń o stałej prędkości odkształcania wstępnego, która zapewniłaby lepsze przybliżenie modułu relaksacji niż metoda Solvari-Malinena. Badania numeryczne, stanowiące uzupełnienie analizy teoretycznej przeprowadzonej w pracy [Stankiewicz 2012], obejmowały analizę błędów modeli modułu relaksacji przeprowadzoną dla modeli KWW przy idealnych i zakłóconych pomiarach naprężenia.



Źródło: opracowanie własne

Rys. 1. Przebieg odkształcania w rzeczywistym teście relaksacji;  $t_R = 1$  s,  $\epsilon_0 = 0,001$   
 Fig. 1. Course of strain in the ramp-test;  $t_R = 1$  s,  $\epsilon_0 = 0.001$

### Metoda identyfikacji modułu relaksacji i metoda Solvari i Malinena

Stosując prosty wzór trapezów Solvari i Malinen [2006] opracowali formułę

$$G^{(T2)}(t - t_R) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma(t) - \frac{t_R}{2\varepsilon_0} \dot{\sigma}(t) \quad (3)$$

a następnie uogólnili ją dla materiałów nieliniowo lepkosprężystych [Solvari i in. 2006b].

Zakładając, że moduł relaksacji  $G(t)$  badanego materiału jest funkcją dwukrotnie różniczkowalną taką, że [Hanyga 2005]

$$G(t) \geq 0, -\frac{dG(t)}{dt} \geq 0, \frac{d^2G(t)}{dt^2} \geq 0 \quad \text{dla } t > 0 \quad (4)$$

czyli w szczególności monotonicznie malejącą funkcją wypukłą, w pracy [Stankiewicz 2012], bazując na trzypunktowej uogólnionej metodzie trapezów, wyprowadzono następującą formułę przybliżającą moduł  $G(t - t_R)$

$$G^{(T3)}(t - t_R) = \frac{2}{\varepsilon_0} \sigma(t) - \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma\left(t + \frac{t_R}{2}\right) + \frac{t_R}{2\varepsilon_0} \dot{\sigma}\left(t + \frac{t_R}{2}\right) - \frac{t_R}{2\varepsilon_0} \dot{\sigma}(t) \quad (5)$$

dla każdego  $t \geq t_R$  i dowolnego  $t_R > 0$ .

Obie metody mają podobną genezę, również schemat wyznaczania modułu relaksacji na podstawie pomiarów naprężenia i jego pochodnej w jednym lub dwu punktach pomiarowych jest analogiczny. Badania symulacyjne skuteczności nowej metody ograniczymy więc do porównania jej metodą opartą na formule (3). Ocenimy błąd przybliżenia modułu relaksacji przy idealnych i zakłóconych pomiarach modułu relaksacji.

### Algorytm identyfikacji modułu relaksacji

Moduł relaksacji można wyznaczyć stosując następujący schemat identyfikacji.

1. Zaplanuj eksperyment - test relaksacji naprężeń (1) - o parametrach  $\varepsilon_0$  oraz  $t_R$  - dobierając punkty próbkowania  $t_i \geq t_R$ ,  $i = 1, \dots, N$ , tak aby  $t_{i+1} - t_i = h$  a  $t_R = 2i_0h$  dla pewnego całkowitego  $i_0 \geq 1$ .
2. Przeprowadź test relaksacji naprężeń (1) i zgromadź pomiary  $\bar{\sigma}(t_i) = \sigma(t_i) + z(t_i)$  naprężenia w chwilach czasu  $t_i \geq t_R$ ,  $i = 1, \dots, N$ , gdzie  $z(t_i)$  jest błędem pomiarowym.
3. Wyznacz dla  $i = 2, \dots, N - 1$  moduł relaksacji  $G^{(T3)}(t_i - t_R)$  zgodnie ze wzorem

$$G^{(T3)}(t_i - t_R) = \frac{2}{\varepsilon_0} \bar{\sigma}(t_i) - \frac{1}{\varepsilon_0} \bar{\sigma}\left(t_i + \frac{t_R}{2}\right) + \frac{t_R}{2\varepsilon_0} \dot{\bar{\sigma}}\left(t_i + \frac{t_R}{2}\right) - \frac{t_R}{2\varepsilon_0} \dot{\bar{\sigma}}(t_i) \quad (6)$$

stosując dla przybliżenia pochodnych  $\dot{\bar{\sigma}}(t_i)$  oraz  $\dot{\bar{\sigma}}\left(t_i + \frac{t_R}{2}\right)$  iloraz różnicowy

$$\dot{\bar{\sigma}}(t_i) \approx \frac{\bar{\sigma}(t_{i+1}) - \bar{\sigma}(t_{i-1}))}{2h} \quad (7)$$

Uwaga 1. Iloraz różnicowy (7) był stosowany do przybliżenia pochodnej  $\dot{\bar{\sigma}}(t_i)$  w pracy [Solvari i Malinen 2006].

Uwaga 2. Można pokazać, że przy przyjętych założeniach (4) iloraz różnicowy (7) zapewnia oszacowanie od dołu pochodnej  $\dot{\bar{\sigma}}(t_i)$  o błędzie mniejszym niż  $[\ddot{\bar{\sigma}}(t_{i-1}) - \ddot{\bar{\sigma}}(t_{i+1})] h/4$ .

Uwaga 3. Pochodne w (6) można także oszacować stosując dokładniejszą regułę pięciopunktową

$$\dot{\sigma}(t_i) \approx \frac{-\bar{\sigma}(t_{i+2}) + 8\bar{\sigma}(t_{i+1}) - 8\bar{\sigma}(t_{i-1}) + \bar{\sigma}(t_{i-2})}{12h} \quad (8)$$

Badania numeryczne wskazują jednak, że zastosowanie prostej reguły (7) jest zazwyczaj wystarczające.

### Badania numeryczne

Przykład 1 - idealne pomiary modułu relaksacji. Rozważmy materiał o module relaksacji opisanym modelem KWW (Kohlrausch, Williams and Watts) postaci [Flory i McKenna 2004]:

$$G(t) = G_0 e^{-(t/\tau)^\beta} \quad (9)$$

gdzie  $G_0 = 10^9$  Pa, bezwymiarowy parametr  $\beta = 0.5$ , zaś czas relaksacji  $\tau = 3$  s (materiał A) albo  $\tau = 100$  s (materiał B). Badania symulacyjne algorytmu przeprowadzimy dla materiału A i B, idealnych (niezakłóconych) pomiarów naprężenia oraz trzech prędkości odkształcania w pierwszej fazie testu relaksacji odpowiadających czasom  $t_R = 1$  s,  $t_R = 2$  s,  $t_R = 5$  s oraz czasu trwania eksperymentu  $T = 20$  s dla materiału A i  $T = 100$  s dla materiału B. Liczbę punktów próbkowania  $N$  przyjęto zależnie od parametrów  $t_R$  oraz  $T$ , tak aby spełnione były warunki stosowalności obu badanych metod. Dokładność przybliżenia modułu relaksacji (9) ocenia dla nowego schematu średni względny błąd kwadratowy:

$$ERRLSG^{(T3)} = \frac{1}{N-2} \sum_{i=2}^{N-1} \left[ \frac{G^{(T3)}(t_i) - G(t_i)}{G(t_i)} \right]^2 \cdot 100\% \quad (10)$$

Wskaźnik  $ERRLSG^{(T2)}$  dla metody Solvari-Malinena zdefiniowany jest analogicznie. Wartości wskaźników  $ERRLSG^{(T3)}$  oraz  $ERRLSG^{(T2)}$  dla pomiarów idealnych zestawiono w tabeli 1 dla materiału A, a w tabeli 2 dla materiału B.

Tabela 1. Względne błędy aproksymacji modułu relaksacji dla nowej metody i metody Solvari-Malinena; materiał A, pomiary idealne

Table 1. Mean relative errors of the relaxation modulus approximation for the suggested method and Solvari-Malinen method; material A, noise-free case

Średni błąd zzględnny	Pomiary idealne, $t_R = 1$ s					
	$N = 40$	$N = 80$	$N = 120$	$N = 160$	$N = 200$	$N = 240$
$ERRLSG^{(T3)}$ [%]	0,479	0,104	0,038	0,018	0,011	8,074E-3
$ERRLSG^{(T2)}$ [%]	0,273	0,101	0,061	0,044	0,035	0,03
	Pomiary idealne, $t_R = 2$ s					
	$N = 40$	$N = 80$	$N = 120$	$N = 160$	$N = 200$	$N = 240$
$ERRLSG^{(T3)}$ [%]	0,516	0,118	0,047	0,025	0,016	0,012
$ERRLSG^{(T2)}$ [%]	1,02	0,399	0,247	0,182	0,148	0,127
	Pomiary idealne, $t_R = 5$ s					
	$N = 40$	$N = 80$	$N = 120$	$N = 160$	$N = 200$	$N = 240$
$ERRLSG^{(T3)}$ [%]	0,761	0,216	0,106	0,067	0,048	0,038
$ERRLSG^{(T2)}$ [%]	1,97	1,057	0,831	0,675	0,475	0,563

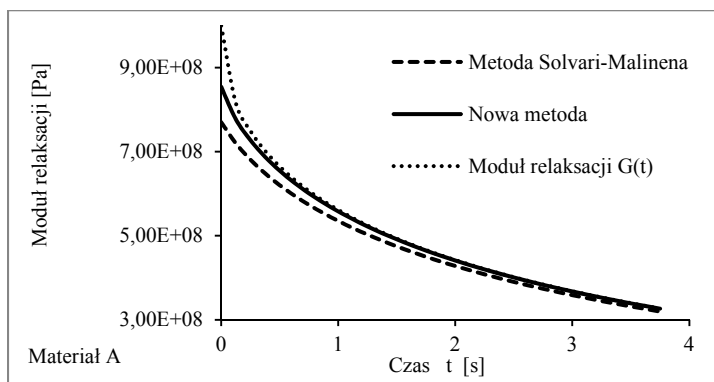
Źródło: obliczenia własne

Tabela 2. Względne błędy aproksymacji modułu relaksacji dla nowej metody i metody Solvari-Malinena; materiał B, pomiary idealne  
 Table 2. Mean relative errors of the relaxation modulus approximation for the suggested method and Solvari-Malinen method; material B, noise-free case

Średni błąd względny	Pomiary idealne, $t_R = 1 s$			
	$N = 200$	$N = 400$	$N = 600$	$N = 800$
$ERRLSG^{(T^3)}$ [%]	1,08E-005	9,089E-006	8,678E-006	8,585E-006
$ERRLSG^{(T^2)}$ [%]	0,006333	0,001882	0,0009507	0,0005967
	Pomiary idealne, $t_R = 2 s$			
	$N = 100$	$N = 200$	$N = 300$	$N = 400$
$ERRLSG^{(T^3)}$ [%]	1,865E-005	1,219E-005	1,082E-005	1,063E-005
$ERRLSG^{(T^2)}$ [%]	0,02357	0,00712	0,003635	0,002299
	Pomiary idealne, $t_R = 5 s$			
	$N = 200$	$N = 400$	$N = 600$	$N = 800$
$ERRLSG^{(T^3)}$ [%]	2,226E-005	3,325E-005	4,03E-005	4,481E-005
$ERRLSG^{(T^2)}$ [%]	0,009923	0,003914	0,002476	0,00187

Źródło: obliczenia własne

Błędy aproksymacji modułu relaksacji materiału B są dla obu metod pomijalnie małe, ponieważ czasy  $t_R$  rozważane w eksperymencie numerycznym są wielokrotnie mniejsze niż czas relaksacji tego materiału. Dla obu materiałów zaproponowana metoda gwarantuje kilka do kilkaset razy lepsze przybliżenie modułu (9) niż metoda Solvari-Malinena. Rysunek 2 ilustruje dla  $t_R = 1 s$  oraz  $N = 160$  przebiegi modułów relaksacji  $G^{(T^3)}(t)$ ,  $G^{(T^2)}(t)$  oraz  $G(t)$  w przedziale czasu  $[0; 3,75]$  sekund.



Źródło: opracowanie własne

Rys. 2. Przybliżenia  $G^{(T^3)}(t)$  i  $G^{(T^2)}(t)$  modułu relaksacji  $G(t)$ ; materiał A, pomiary idealne,  $t_R = 1 s$

Fig. 2. Approximations  $G^{(T^3)}(t)$  and  $G^{(T^2)}(t)$  of the relaxation modulus  $G(t)$ ; material A, noise-free case,  $t_R = 1 s$

Przykład 2 – odporność na zakłócenia. Rozważmy ponownie materiały A i B o module relaksacji (9). Aby przeanalizować wpływ zakłóceń na wyznaczone przybliżenie modułu  $G(t)$  zakłócenia  $z(t_i)$  generowano zgodnie z rozkładem normalnym o zerowej wartości średniej i wariancji równej 5% oraz 10% wartości średniej sygnału  $\sigma(t)$  w przedziale  $[0, T]$ . Eksperyment numeryczny powtórzono  $n = 100$  razy, a wartości średnie  $MERRLSG^{(T^3)}$  oraz  $MERRLSG^{(T^2)}$  wskaźników  $ERRLSG^{(T^3)}$  oraz  $ERRLSG^{(T^2)}$  zestawiono dla materiału A w tabelach 3 (słabsze zakłócenia) oraz 4 (silniejsze zakłócenia). Rysunek 3 ilustruje przykładowe przebiegi modułów relaksacji  $G^{(T^3)}(t)$ ,  $G^{(T^2)}(t)$  oraz  $G(t)$  dla zakłóceń 5%, rysunek 4 dla zakłóceń 10%, rysunek 5 odpowiada zakłóceniom 20%; we wszystkich przypadkach  $t_R = 1$  s a  $N = 120$ .

Tabela 3. Średnie względne błędy aproksymacji modułu relaksacji w nowej metodzie i metodzie Solvari-Malinena; materiał A, pomiary zakłócone 5%

Table 3. Mean relative errors of the relaxation modulus approximation for the suggested method and Solvari-Malinen method; material A, weak noises 5%

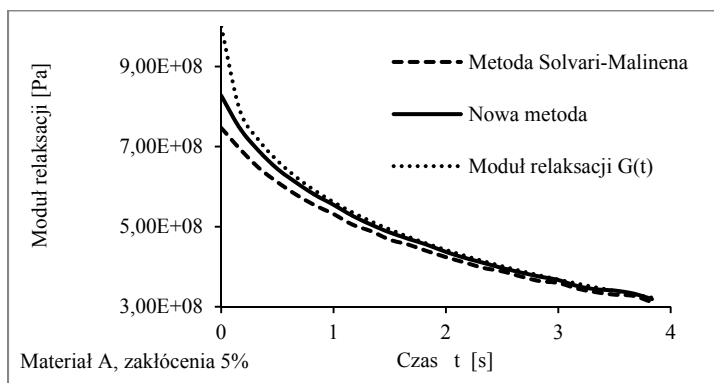
Średni błąd względny	Pomiary zakłócone 5%, $t_R = 1$ s					
	$N = 40$	$N = 80$	$N = 120$	$N = 160$	$N = 200$	$N = 240$
$MERRLSG^{(T^3)}$ [%]	0,04598	0,05876	0,06932	0,1601	0,1612	0,1657
$MERRLSG^{(T^2)}$ [%]	0,8081	0,3061	0,2228	0,3524	0,3529	0,3533
	Pomiary zakłócone 5%, $t_R = 2$ s					
	$N = 40$	$N = 80$	$N = 120$	$N = 160$	$N = 200$	$N = 240$
$MERRLSG^{(T^3)}$ [%]	0,06384	0,085	0,1402	0,4439	0,4396	0,4449
$MERRLSG^{(T^2)}$ [%]	1,006	0,4812	0,4633	1,06	1,093	1,061
	Pomiary zakłócone 5%, $t_R = 5$ s					
	$N = 40$	$N = 80$	$N = 120$	$N = 160$	$N = 200$	$N = 240$
$MERRLSG^{(T^3)}$ [%]	0,07213	0,1963	0,3911	1,483	1,507	1,521
$MERRLSG^{(T^2)}$ [%]	1,817	1,249	1,551	4,345	4,427	4,281

Źródło: obliczenia własne

Tabela 4. Średnie względne błędy aproksymacji modułu relaksacji w nowej metodzie i metodzie Solvari-Malinena; materiał A, pomiary zakłócone 10%  
 Table 4. Mean relative errors of the relaxation modulus approximation for the suggested method and Solvari-Malinen method; material A, strong noises 10%

Średni błąd względny	Pomiary zakłócone 10%, $t_R = 1 s$					
	$N = 40$	$N = 80$	$N = 120$	$N = 160$	$N = 200$	$N = 240$
$MERRLSG^{(T3)}$ [%]	0,06407	0,09932	0,1205	0,3057	0,2971	0,302
$MERRLSG^{(T2)}$ [%]	0,8229	0,3462	0,3172	0,6462	0,6609	0,6468
	Pomiary zakłócone 10%, $t_R = 2 s$					
	$N = 40$	$N = 80$	$N = 120$	$N = 160$	$N = 200$	$N = 240$
$MERRLSG^{(T3)}$ [%]	0,09438	0,1525	0,257	0,8853	0,8926	0,8722
$MERRLSG^{(T2)}$ [%]	1,044	0,6089	0,7129	2,076	2,028	2,074
	Pomiary zakłócone 10%, $t_R = 5 s$					
	$N = 40$	$N = 80$	$N = 120$	$N = 160$	$N = 200$	$N = 240$
$MERRLSG^{(T3)}$ [%]	0,1145	0,3661	0,802	3	3,036	2,947
$MERRLSG^{(T2)}$ [%]	1,934	1,706	2,565	8,407	8,25	8,394

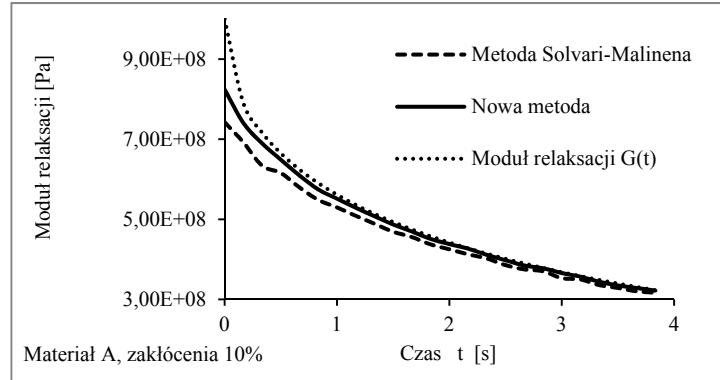
Źródło: obliczenia własne



Źródło: opracowanie własne

Rys. 3. Przybliżenia  $G^{(T3)}(t)$  i  $G^{(T2)}(t)$  modułu relaksacji  $G(t)$ ; materiał A, zakłócenia 5%,  $t_R = 1 s$

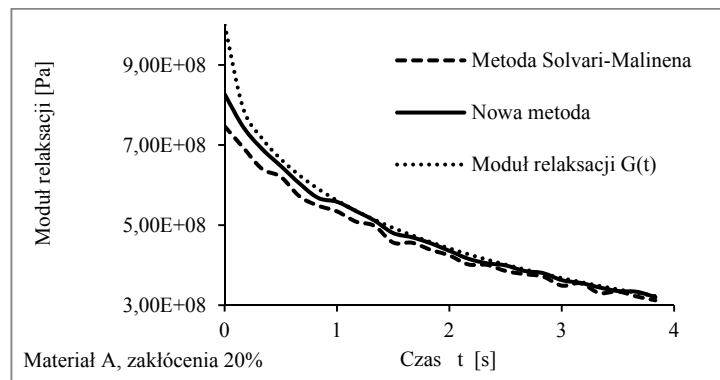
Fig. 3. Approximations  $G^{(T3)}(t)$  and  $G^{(T2)}(t)$  of the relaxation modulus  $G(t)$ ; material A, weak noises 5%,  $t_R = 1 s$



Źródło: opracowanie własne

Rys. 4. Przybliżenia  $G^{(T3)}(t)$  i  $G^{(T2)}(t)$  modułu relaksacji  $G(t)$ ; materiał A, zakłócenia 10%,  $t_R = 1$  s

Fig. 4. Approximations  $G^{(T3)}(t)$  and  $G^{(T2)}(t)$  of the relaxation modulus  $G(t)$ ; material A, strong noises 10%,  $t_R = 1$  s



Źródło: opracowanie własne

Rys. 5. Przybliżenia  $G^{(T3)}(t)$  i  $G^{(T2)}(t)$  modułu relaksacji  $G(t)$ ; materiał A, zakłócenia 20%,  $t_R = 1$  s

Fig. 5. Approximations  $G^{(T3)}(t)$  and  $G^{(T2)}(t)$  of the relaxation modulus  $G(t)$ ; material A, very strong noises 10%,  $t_R = 1$  s

Wskaźniki  $MERRLSG^{(T3)}$  oraz  $MERRLSG^{(T2)}$  mogą być traktowane jako miara odporności algorytmu na zakłócenia pomiarowe. Dla materiału A, dla którego czas  $t_R$  jest rzędu jego czasu relaksacji, wpływ zakłóceń jest istotny, dla zakłóceń silniejszych prawie dwukrotnie większy w obu metodach. Ponad dwukrotnie mniejszy niż w metodzie Solvari-Malinena błąd nowej metody rośnie wraz z liczbą punktów próbkowania zarówno dla słabych jak i silnych zakłóceń. Jest to konsekwencją różniczkowej formuły tej metody, w której występują dwie składowe proporcjonalne do pochodnych naprężenia. Odpowiedni



dobór liczby punktów próbkowania pozwala jednak nawet dla silnych zakłóceń 10% zredukować średni błąd względny  $MERRLSG^{(T3)}$  poniżej 0,5%. Odporność metody na zakłócenia potwierdzają także przebiegi modeli  $G^{(T3)}(t)$  na rysunkach 3-5. Dopiero bardzo silne zakłócenia 20% powodują istotne odchylenia wyznaczonego modelu od  $G(t)$ .

Informacje o wskaźnikach  $MERRLSG^{(T3)}$  oraz  $MERRLSG^{(T2)}$  dla materiału B i zakłóceń 10% zawiera tabela 5. Dla materiału B o dłuższym czasie relaksacji dla  $t_R \leq 2$  s nowa metoda jest silnie odporna na zakłócenia.

Tabela 5. Średnie względne błędy aproksymacji modułu relaksacji w nowej metodzie i metodzie Solvari-Malinena; materiał B, pomiary zakłócone 10%

Table 5. Mean relative errors of the relaxation modulus approximation for the suggested method and Solvari-Malinen method; material B, strong noises 10%

Średni błąd względny	Pomiary idealne, $t_R = 1$ s			
	$N = 200$	$N = 400$	$N = 600$	$N = 800$
$MERRLSG^{(T3)}$ [%]	0,002994	0,006816	0,008493	0,01268
$MERRLSG^{(T2)}$ [%]	0,009438	0,009698	0,01616	0,0256
	Pomiary idealne, $t_R = 2$ s			
	$N = 100$	$N = 200$	$N = 300$	$N = 400$
$MERRLSG^{(T3)}$ [%]	0,003026	0,006608	0,008592	0,0123
$MERRLSG^{(T2)}$ [%]	0,02641	0,01503	0,01883	0,02699
	Pomiary idealne, $t_R = 5$ s			
	$N = 200$	$N = 400$	$N = 600$	$N = 800$
$MERRLSG^{(T3)}$ [%]	0,01766	0,06052	0,1328	0,2371
$MERRLSG^{(T2)}$ [%]	0,04535	0,133	0,2855	0,501

Źródło: obliczenia własne

## Wnioski

- Zaproponowano nowy szybki algorytm identyfikacji modułu relaksacji na podstawie dyskretnych pomiarów naprężenia zgromadzonych w rzeczywistym teście relaksacji bazujący na „trapezoidalnej” metodzie wyprowadzonej w pracy Stankiewicz [2012]. Algorytm jest łatwy do zaimplementowania w dowolnym środowisku programistycznym i zastosowania w trybie *on-line* w czasie eksperymentu reologicznego.
- Przeprowadzone badania wskazują, że nowa metoda pozwala wyznaczyć bardzo dobre przybliżenie modułu relaksacji i jest odporna na zakłócenia pomiarowe. Pozwala ona wyznaczyć przybliżenia modułu relaksacji w dowolnej chwili czasu – to także jej zaleta.
- Opracowana metoda identyfikacji zapewnia lepsze przybliżenie modułu relaksacji niż należąca do tej samej grupy algorytmów metoda Solvari-Malinena, jest też znacząco bardziej odporna na zakłócenia pomiarowe.

7. Opracowany schemat wyznaczania modułu relaksacji może znaleźć zastosowanie do badania własności reologicznych tych materiałów, dla których test relaksacji naprężeń jest ważnym źródłem informacji empirycznej, przykładowo: peletów [Czachor 2010], tworzyw biodegradowalnych [Figiel 2008], żeli stosowanych w przemyśle spożywczym [Jakubczyk i Kamińska 2007] oraz owoców i warzyw [Gołacki i Stropek 2001, 2002].

## Bibliografia

- Czachor G.** (2010): Modele relaksacji naprężeń w płytach pilśniowych zawierających komponent słomy. *Inżynieria Rolnicza*, 1(119), 105-113.
- Ferry J. D.** (1980): *Viscoelastic properties of polymers*. John Wiley & Sons, New York, 7.
- Figiel A.** (2008): Właściwości reologiczne tworzywa biodegradowalnego wyznaczone na podstawie cyklicznego testu relaksacji naprężeń. *Inżynieria Rolnicza*, 4 (102), 271-278.
- Flory A., McKenna G.B.** (2004): Finite step rate corrections in stress relaxation experiments: a comparison of two methods. *Mech. Time-Depend. Mater.*, 8, 17-37.
- Gołacki K., Stropek Z.** (2001): Wyznaczanie właściwości lepko-sprężystych mięszu jabłek na podstawie testu relaksacji naprężeń. *Acta Agrophysica*, 58, 89-96.
- Gołacki K., Stropek Z.** (2002): Wybrane lepko-sprężyste charakterystyki bulw ziemniaka na podstawie testu relaksacji naprężeń. *Inżynieria Rolnicza*, 2(35), 125-132.
- Jakubczyk E., Kamińska A.** (2007): Właściwości mechaniczne porowatych żeli agarowych. *Inżynieria Rolnicza*, 5(93), 195-203.
- Knauss W.G., Zhao J.** (2007): Improved relaxation time coverage in ramp-strain histories. *Mech. Time-Depend. Mater.* 11(3-4), 199-216.
- Lee S., Knauss W.G.** (2000): A note on the determination of relaxation and creep data from ramp tests. *Mech. Time-Depend. Mater.* 4, 1-7.
- Sorvari J., Malinen M.** (2006): Determination of the relaxation modulus of a linearly viscoelastic material. *Mech. Time-Depend. Mater.*, 10, 125-133.
- Sorvari J., Malinen M., Hämäläinen J.** (2006): Finite ramp time correction method for non-linear viscoelastic material model. *Int. Journal of Non-Linear Mechanics*, 41, 1058-1064.
- Stankiewicz A.** (2012): Wyznaczanie modułu relaksacji na podstawie pomiarów naprężenia w rzeczywistym teście relaksacji. *Inżynieria Rolnicza* 4(139) T.1, 401-409.
- Tscharnuter D., Jerabek M., Major-Z., Lang R.W.** (2011): On the determination of the relaxation modulus of PP compounds from arbitrary strain histories. *Mech Time-Depend. Mater.* 15, 1-14.
- Zapas L.J., Craft T.** (1965): Correlation of large longitudinal deformations with different strain histories. *J. Res. Natl. Bur. Stand. A69(6)*, 541-546.

## **ALGORITHM OF RELAXATION MODULUS IDENTIFICATION USING STRESS MEASUREMENTS FROM THE REAL TEST OF RELAXATION**

**Abstract.** The paper suggests a new fast scheme for approximate identification of linear relaxation modulus of viscoelastic materials on the basis of the stress data from ramp-tests where a time-variable strain rate is followed by a constant strain. Approximation of the relaxation modulus in successive time instants is determined on the basis of the stress and stress derivative measurements in only two appropriately chosen sampling points. The method is verified with numerical simulations conducted for KWW (Kohlrausch, Williams and Watts) relaxation modulus. The numerical studies confirm the results of theoretical analysis and prove that this method ensures better approximation of the relaxation modulus and stress modulus than Solvari-Malinen method. Moreover the algorithm is more resistant to disturbances than Solvari-Malinen scheme.

**Key words:** stress relaxation test, ramp-strain history, relaxation modulus, identification method

**Adres do korespondencji:**

Anna Stankiewicz; e-mail: [anna.stankiewicz@up.lublin.pl](mailto:anna.stankiewicz@up.lublin.pl)  
Katedra Inżynierii Mechanicznej i Automatyki  
Uniwersytet Przyrodniczy w Lublinie  
ul. Doświadczalna 50A  
20-280 Lublin