Zbigniew ZDZIENNICKI, Andrzej MACIEJCZYK
Politechnika Łódzka, Łódź

ZASTOSOWANIE SPLOTU FUNKCJI DO OPISU WŁASNOŚCI NIEZAWODNOŚCIOWYCH UKŁADÓW Z REZERWOWANIEM

Słowa kluczowe

Struktury równoległe układów niezawodnościowych, „zimna rezerwa", funkcja gęstości prawdopodobieństwa uszkodzeń, splot funkcji, funkcja błędu.

Streszczenie

Artykuł przedstawia metodę wyznaczania funkcyjnych charakterystyk niezawodnościowych układów z tzw. „rezerwą zimną" (element rezerwowy pozostaje nieczynny – „zimny" do czasu uszkodzenia elementu zasadniczego) . Wyznaczenie charakterystyk niezawodnościowych dokonano w oparciu o funkcję dwóch zmiennych losowych, za pomocą splotu funkcji – funkcji prawdopodobieństw uszkodzeń elementów układu. Prezentowana metoda pozwala wyznaczyć charakterystyki niezawodnościowe układu z „rezerwą zimną" w analitycznej formie. Metodę zastosowano do wyznaczenia funkcji niezawodności układu z „rezerwą zimną", którego elementy mają swoje funkcje prawdopodobieństwa uszkodzeń opisane funkcją Gaussa. Prezentowana metoda zilustrowana została przykładem liczbowym. Wyniki uzyskane w przykładzie przedstawiono także graficznie.

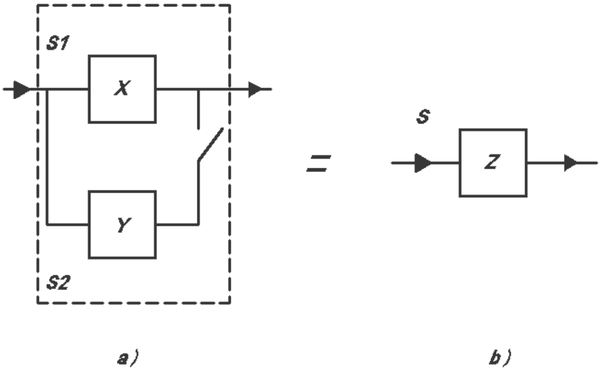
Wprowadzenie

Wśród niezawodnościowych układów równoległych – układów z rezerwowym elementem – układy z niepracującym elementem rezerwowym będącym nieczynnym do chwili dysfunkcji (uszkodzenia) elementu podstawowego układu mają zasadnicze, praktyczne znaczenie.

Znany z danych literaturowych opis takich struktur ma charakter przybliżony i jest zdecydowanie skomplikowany [2]. W niniejszej pracy przedstawiono prostszy sposób wyznaczania charakterystyk niezawodnościowych struktur z rezerwowaniem „zimnym" za pomocą splotu funkcji gęstości prawdopodobieństwa uszkodzeń elementów składowych struktury (podstawowego i rezerwowego). Metoda przedstawiona w pracy obejmuje bardzo szerokie spektrum wspomnianych układów niezawodnościowych i daje dokładne wyniki dotyczące ich charakterystyk niezawodnościowych.

1. Przedstawienie problemu za pomocą funkcji dwóch zmiennych losowych

Rozważany układ niezawodnościowy to struktura dwuelementowa, której schemat przedstawiony jest poniżej (rys. 1).



Rys.1. Schemat blokowy dwuelementowego układu niezawodnościowego z rezerwowaniem „zimnym" (a) i jego schemat zastępczy (b)

Rozważana struktura niezawodnościowa składa się z dwóch, niezależnych niezawodnościowo elementów – S1 i S2. Zmienne losowe X i Y równe są odpowiednio czasom uszkodzeń (dysfunkcji) tych dwóch elementów. Zmienne losowe X i Y opisane są odpowiednio funkcjami zawodności $F_X(t)$ i $F_Y(t)$ (dystrybuantami zmiennych losowych X i Y). Pochodne po czasie tych funkcji są funkcjami prawdopodobieństwa uszkodzeń $f_X(t)$ i $f_Y(t)$ elementów układu (funkcjami gęstości rozkładu zmiennych losowych X i Y).

Element podstawowy S1 rozważanej struktury rozpoczyna pracę w chwili t = 0 i pracuje sam aż do chwili swojego uszkodzenia. W chwili uszkodzenia tego elementu do pracy wchodzi element rezerwowy S2, który do tej pory nie pracował (był nieczynny) i struktura nadal jest sprawna.

Jeśli przez zmienną losową Z oznaczyć czas uszkodzenia całego układu S (uszkodzone kolejno jego oba elementy S1 i S2), to zmienna ta jest funkcją dwóch zmiennych losowych X i Y o następującej postaci:

$$Z = X + Y \tag{1}$$

Funkcja prawdopodobieństwa uszkodzeń całego układu S (funkcja gęstości rozkładu zmiennej losowej Z) jest przedstawiona wyrażeniem [1]:

$$\begin{aligned} f_Z(t) &= \int_0^t f_X(t-\tau) f_Y(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t f_X(\tau) f_Y(t-\tau) d\tau \end{aligned} \tag{2}$$

gdzie:

- $f_X(t)$ – funkcja prawdopodobieństwa uszkodzeń elementu S1 (funkcja gęstości rozkładu zmiennej losowej X),
- $f_Y(t)$ – funkcja prawdopodobieństwa uszkodzeń elementu S2 (funkcja gęstości rozkładu zmiennej losowej Y),
- τ – zmienna całkowania.

Prawe strony zależności (2) są splotem funkcji $f_X(t)$ i $f_Y(t)$, [3]. A zatem możliwe jest zapisanie zależności (2) w postaci symbolicznej:

$$\begin{aligned} f_Z(t) &= f_X(t) * f_Y(t) \\ &= f_Y(t) * f_X(t) \end{aligned} \tag{3}$$

Z powyższych rozważań wynika, że funkcja prawdopodobieństwa uszkodzeń układu z elementem rezerwowym, który wchodzi do pracy dopiero po uszkodzeniu elementu podstawowego układu, równa się splotowi funkcji prawdopodobieństw uszkodzeń elementów: podstawowego i rezerwowego układu.

Dysponując dla omawianego układu niezawodnościowego jedną z jego charakterystyk funkcyjnych – funkcją prawdopodobieństwa jego uszkodzeń – możliwe jest wyznaczenie pozostałych czterech charakterystyk funkcyjnych układu. I tak, funkcja niezawodności rozważanego układu ma postać:

$$R_Z(t) = 1 - \int_0^t f_Z(\tau) d\tau \tag{4}$$

2. Zastosowanie rozwiązania problemu do układów, których elementy mają funkcje prawdopodobieństwa uszkodzeń opisane funkcją Gaussa

Załóżmy, że rozważany układ niezawodnościowy ma element podstawowy opisany funkcją prawdopodobieństwa uszkodzeń o postaci:

$$f_X(t) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(t-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right] \tag{5}$$

a element rezerwowy opisany jest funkcją prawdopodobieństwa uszkodzeń zapisaną poniżej:

$$f_Y(t) = \frac{1}{\sigma_Y\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(t-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right] \tag{6}$$

gdzie:

μ_X, σ_X – parametry funkcji $f_X(t)$; odpowiednio wartość średnia i odchylenie standardowe,

μ_Y, σ_Y – parametry funkcji $f_Y(t)$; odpowiednio wartość średnia i odchylenie standardowe.

Funkcja prawdopodobieństwa uszkodzeń układu jest splotem funkcji (5) i (6). Splot dwóch funkcji Gaussa jest także funkcją Gaussa [4]:

$$f_Z(t) = \left\{\frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(t-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right]\right\} * \left\{\frac{1}{\sigma_Y\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(t-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sigma_Z\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(t-\mu_Z)^2}{2\sigma_Z^2}\right] \tag{7}$$

gdzie:

wartość średnia $$\mu_Z = \mu_X + \mu_Y \tag{8}$$

odchylenie standardowe $$\sigma_Z = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2} \tag{9}$$

W celu wyznaczenia funkcji niezawodności rozważanego układu w oparciu o charakterystykę funkcyjną (7) należy funkcję Gaussa scałkować w granicach od *0* do *t*. Funkcję pierwotną całki z wyrażenia (7) wyrażono za pomocą funkcji błędu erf(t) w następujący sposób [1]:

$$\int \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{t-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right) + C \tag{10}$$

Zatem zależność (4) przybierze w tym przypadku postać:

$$R_Z(t) = 1 - \int_0^t \frac{1}{\sigma_Z\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(\tau-\mu_Z)^2}{2\sigma_Z^2}\right]d\tau = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{t-\mu_Z}{\sigma_Z\sqrt{2}}\right) \tag{11}$$

gdzie wielkości μ_Z i σ_Z są określone przez związki (8) i (9).

Własności niezawodnościowe wielu elementów i układów mechanicznych opisane są za pomocą rozkładu gaussowskiego zmiennej losowej ich uszkodzeń. Jako przykład można podać takie elementy, jak sprzęgła cierne, hamulce, opony, mechanizmy śrubowe, różnego rodzaju ostrza i wiele innych obiektów.

3. Przykład obliczeniowy układu niezawodnościowego z tzw. „zimna rezerwą”

Kosa spalinowa typu BCM 2600 produkcji firmy MAKITA wyposażona jest w nóż z obustronnymi ostrzami. Pozwala to, po zużyciu (stępieniu) ostrzy z jednej strony noża, na dalsze użytkowanie kosy, przekładając jej nóż na „drugą stronę” (użytkując drugie ostrza). A zatem nóż taki można uważać za układ niezawodnościowy z rezerwowaniem „zimnym” – jedne ostrza tworzą element podstawowy układu, a ostrza drugie – element rezerwowy.

Zebrane przez autorów artykułu informacje na temat trwałości ostrzy noży tej kosy wykazały, że trwałość ta ma rozkład gaussowski o wartości średniej μ = = 90 godz. i odchyleniu standardowym σ = 7 godz. Oczywiście ostrza po obu stronach noża mają tę samą trwałość.

Ostrza noża kosy, jako element podstawowy i element rezerwowy układu niezawodnościowego, opisane są przez funkcję prawdopodobieństwa uszkodzeń, zgodnie ze wzorem (5):

$$f(t) = \frac{1}{7\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(t-90)^2}{98}\right].$$

Parametry funkcji gaussowskiej – funkcji prawdopodobieństwa uszkodzeń układu (jaki tworzy nóż kosy BCM 2600) są następujące:
– wartość średnia

$$\mu_Z = 2\mu = 180 \text{ [godz.]},$$

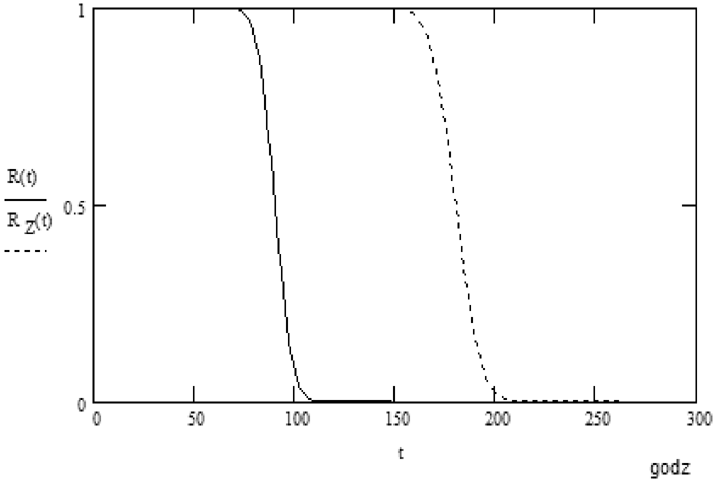
– odchylenie standardowe

$$\sigma_Z = \sigma\sqrt{2} = 9.899 \text{ [godz.]}.$$

Funkcja niezawodności układu, jaki tworzy nóż kosy BCM 2600 jest określona zgodnie z wyrażeniem (11):

$$R_Z(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{t-180}{13,999}\right)$$

Poniżej (rys. 2) przedstawiono wykresy funkcji niezawodności (od prawej strony) układu rozważanego w przykładzie i jego pojedynczego elementu.



Rys. 2. Wykresy funkcji niezawodności

Wnioski

1. Własności niezawodnościowe zaprezentowanego układu z rezerwowaniem „zimnym" zostały w pełni, dokładnie opisane funkcją niezawodności określoną wzorem (4).
2. Możliwe jest opisanie własności niezawodnościowych układu z rezerwowaniem „zimnym" za pomocą rozkładu gaussowskiego zmiennej losowej ich uszkodzeń, co zostało wykazane zależnością (11).
3. Oprócz prezentowanego jako przykład noża kosy spalinowej, w pełni uzasadnione jest opisywanie własności niezawodnościowych wielu elementów i układów mechanicznych, takich jak sprzęgła cierne, hamulce, opony, mechanizmy śrubowe za pomocą rozkładu gaussowskiego zmiennej losowej ich uszkodzeń.

Bibliografia

1. Papoulis A., Pillai S.U.: Probability, Random Variables and Stochastic Processes. McGraw-Hill, 2002.
2. Smith David J.: Reliability, Maintainability and Risk. Practical method for engineers. Butterworth-Heinemann, 2000.
3. Bracewell R.: The Fourier Transform and Its Applications. McGraw-Hill, 1986.
4. Strona internetowa http://mathworld.wolfram.com/Convolution.html.

Recenzent:
Jan SZYBKA

Application of convolution in the description of a standby redundancy system

Key words

Redundancy structures of reliability systems, standby redundancy, failure density probability function, convolution of functions, error function.

Summary

The paper gives a method that allows one to find reliability characteristics for standby redundancy systems. The method is based on the concept of a function of two random variables, and the solution of the problem is done with a convolution of two functions that are probability density functions of the elements of the system. The method allows one to find reliability characteristics systems in their analytical forms (if reliability characteristics of the elements are in the same forms). The method was used to find a reliability function of a standby redundancy system where elements possessed their probability density functions as Gauss functions. In the analysis, we allowed for the fact that the convolution of two Gauss functions is a Gauss function as well. To solve the expression of the reliability function of systems or elements those probability density functions were Gauss functions, we used an error function. That allowed getting a solution of the problem in an analytical form. There were given examples of mechanical elements possessing their probability density functions like Gauss functions. The method was exemplified numerically, and its results were presented graphically.