Barbara POPOWSKA, Karol ANDRZEJCZAK
Politechnika Poznańska, Poznań

FUNKCJA PRZETRWANIA STRUMIENIA ZAGROŻEŃ I JEJ APROKSYMACJA

Słowa kluczowe

Funkcja przetrwania, strumień zagrożeń, model szokowych uszkodzeń, czas zdatności systemu, błąd aproksymacji, (D)NBUE.

Streszczenie

W teorii niezawodności podstawowym zagadnieniem jest wyznaczenie funkcji przetrwania dla eksploatowanych obiektów, które są ciągle narażone na utratę zdatności ze względu na różnorakie zagrożenia. Przedstawione w tej pracy metody można zastosować do klasy obiektów, które są zdolne odparować zagrożenie i to wielokrotnie zanim utracą zdatność. Przyjmujemy, że zagrożenia systemu mogą się powtarzać, więc możemy mówić o strumieniach zagrożeń.

Rozważamy zagadnienie aproksymacji rozkładu prawdopodobieństwa w oparciu o funkcję przetrwania obiektu technicznego narażonego na losowy strumień zagrożeń. Wprowadzamy ogólną postać funkcji przetrwania zagrożeń jak i dwa szczegółowe modele: Poissonowski i dwumianowy. W okresie eksploatacji obiektu często trudno jest określić jego czas zdatności, więc przedstawiamy aproksymację funkcji przetrwania i szacujemy błąd tej aproksymacji.

Wprowadzenie

Wyznaczenie funkcji przetrwania dla eksploatowanych obiektów, które są ciągle narażone na utratę zdatności ze względu na różnorakie zagrożenia, jest zasadniczym celem badań niezawodnościowych. Przedstawione w tej pracy metody można zastosować do klasy obiektów, które są zdolne odparować zagrożenie i to wielokrotnie, zanim utracą zdatność. Przyjmujemy, że zagrożenia systemu mogą się powtarzać, więc możemy mówić o strumieniach zagrożeń. Ponadto przyjmujemy, że zagrożenia zdatności obiektu z powodów starzeniowych są marginalne. Matematycznym modelem strumienia zagrożeń obiektu jest ciąg zdarzeń losowych o charakterze impulsowym, znanym w literaturze jako model szokowych uszkodzeń [1], [3], [4], [5].

W pracy tej rozważamy zagadnienie aproksymacji rozkładu prawdopodobieństwa w oparciu o funkcję przetrwania obiektu technicznego narażonego na losowy strumień zagrożeń. Po wprowadzeniu ogólnej postaci funkcji przetrwania zagrożeń, podamy różne modele tej funkcji, powstałe w oparciu o różne rozkłady prawdopodobieństwa wystąpienia zagrożeń. Ponieważ w okresie eksploatacji obiektu często trudno jest określić jego czas zdatności, więc przedstawimy w tej pracy aproksymację funkcji przetrwania i oszacujemy błąd tej aproksymacji. Zasadnicze własności sformułowane są w postaci twierdzeń, które pozwalają zidentyfikować klasę rozkładów rozważanych modeli funkcji przetrwania.

1. Formalizacja zagadnienia

Niech p_1, p_2,… będzie ciągiem prawdopodobieństw zniszczenia systemu z powodu kolejnych zagrożeń. Ciąg ten stanowi rozkład prawdopodobieństwa i jest oznaczany (p_k). Z kolei komplementarny ciąg (q_k), gdzie $q_k = 1 - p_k$ jest ciągiem prawdopodobieństw odparowania kolejnych zagrożeń. Ciągi te mogą być skończone lub nieskończone, ale zawsze muszą sumować się do jedynki. Zauważmy, że wielkość

$$R_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} p_n \tag{1}$$

jest prawdopodobieństwem odparowania przez system sekwencji k początkowych zagrożeń, tj. prawdopodobieństwem tego, że do k-tego zagrożenia włącznie nie nastąpi zniszczenie systemu. Ponieważ $p_k \geq 0$, więc oczywiście $1 = R_0 \geq R_1 \geq$....

Matematycznym modelem strumienia zagrożeń systemu jest ciąg Z_1, Z_2,… losowych chwil pojawiania się zagrożeń. Z kolei $N(t)$ niech oznacza proces zliczający liczbę losowych zagrożeń systemu, jakie pojawią się do chwili $t \geq 0$. Wówczas $P(N(t) = k)$ oznacza prawdopodobieństwo tego, że do chwili t obiekt zostanie k-krotnie zagrożony zniszczeniem.

Jako podstawową miarę bezpiecznego funkcjonowania systemu narażonego na strumień losowych zagrożeń przyjmujemy funkcję czasu określoną wzorem:

$$H(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N(t) = k) R_k\,, \qquad t \geq 0 \tag{2}$$

Funkcję tę nazywamy funkcją przetrwania strumienia zagrożeń systemu. Do jej wyznaczenia niezbędna jest informacja o rozkładzie procesu $N(t)$ zliczającego zagrożenia oraz o zdolności systemu do odparowania zagrożenia w postaci ciągu R_k.

W ujęciu fizycznym funkcja $H(t)$, definiowana wzorem (2) jest prawdopodobieństwem przetrwania (prawdopodobieństwem nieuszkodzenia) systemu do chwili t.

Z czysto matematycznego punktu widzenia taka funkcja przetrwania była rozważana w [1], [3], [4].

2. Poissonowski strumień zagrożeń

W pracy [4] autorzy badali Poissonowski model funkcji przetrwania. Niech dla ustalonej chwili $t > 0$, zmienna losowa $N(t)$ ma rozkład Poissona z parametrem λt, ($\lambda > 0$). Wówczas funkcja przetrwania systemu narażonego na Poissonowski strumień zagrożeń ma postać:

$$H(t) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \qquad t \geq 0 \tag{3}$$

Dla tak zdefiniowanej funkcji przetrwania zachodzą następujące twierdzenia podane i udowodnione w [4], które dotyczą przynależności funkcji (2) do klas rozkładów.

Twierdzenie 1. Jeżeli $R_j R_k \geq R_{j+k}$ dla j, $k = 0, 1,...$, to funkcja przetrwania dana wzorem (3) należy do klasy NBU (new better than used).

Twierdzenie 2. Jeżeli $R_k \sum_{j=0}^{\infty} R_j \geq \sum_{j=k}^{\infty} R_j$ dla $k = 0, 1,...$, to funkcja przetrwania strumień zagrożeń dana wzorem (3) należy do klasy NBUE (new better than used in expectation).

Jeżeli przyjmiemy, że w Poissonowskim modelu funkcji przetrwania rozkład prawdopodobieństwa zniszczenia obiektu przy k-tym zagrożeniu jest rozkładem geometrycznym z parametrem przetrwania zagrożenia $q = 1 - p$, to funkcja (3) przyjmie postać:

$$H(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} q^k = e^{-\lambda p t}, \quad \text{dla } t \geq 0.$$

W tym przypadku funkcja przetrwania strumienia zagrożeń należy do klasy rozkładów wykładniczych z parametrem λp. Stąd oczekiwany czas przetrwania strumienia zagrożeń jest równy $1/(\lambda p)$.

3. Twierdzenia aproksymacyjne

Dla wielu eksploatowanych systemów technicznych prawdopodobieństwo wystąpienia określonej liczby zagrożeń ma rozkład inny od rozkładu Poissona lub rozkład jest wręcz nieznany. Ponadto w praktyce rozkład zdolności systemu do odparowania strumienia zagrożeń może nie być znany. Zajmiemy się więc przypadkiem ograniczonej informacji, z jaką mamy w praktyce często do czynienia. Mianowicie przyjmujemy teraz, że znane są tylko wartość oczekiwana μ i $1<\mu<\infty$ oraz wariancja σ^2 rozkładu liczby zagrożeń obiektu do jego zniszczenia. Nieznany rozkład liczby zagrożeń będziemy aproksymować rozkładem geometrycznym z parametrem $p = 1/\mu$.

Zagadnienie geometrycznej aproksymacji i oceny błędu tej aproksymacji, w przypadku gdy nieznany rozkład prawdopodobieństwa jest z klasy (D)NBUE (discrete new better than used in expectation) podaje następujące twierdzenie udowodnione w [2].

Twierdzenie 3. Jeżeli zmienna losowa o rozkładzie prawdopodobieństwa (p_n) i wartości oczekiwanej μ, $(1<\mu<\infty)$ należy do klasy (D)NBUE, to zachodzą następujące oszacowania dla $q = (1 - 1/\mu)$ i dla każdego $n \in N$

$$\left|R_n - q^n\right| \le \alpha \tag{4}$$

gdzie

$$\alpha = \frac{\mu^2 - \mu - \sigma^2}{2\mu} \tag{5}$$

Określamy aproksymującą funkcję przetrwania postaci

$$H^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N(t) = k)q^k \;, \quad t \ge 0 \,, \; q = (1 - 1/\mu) \tag{6}$$

Aproksymacja taka będzie miała sens, gdy będziemy mogli oszacować błąd aproksymacji funkcji przetrwania systemu strumień zagrożeń, za pomocą funkcji aproksymującej (6). Kolejne twierdzenie pokazuje błąd tej aproksymacji. Błąd ten można wyznaczyć znając tylko wartość oczekiwaną i wariancję nieznanego rozkładu.

Twierdzenie 4. Niech $H(t)$ będzie funkcją przetrwania obiektu technicznego postaci (2). Niech rozkład prawdopodobieństwa (p_k) uszkodzenia systemu przy k-tym zagrożeniu o wartości oczekiwanej μ, $(1< \mu <\infty)$ i wariancji σ^2 należy do klasy (D)NBUE. Wówczas dla funkcji postaci (6) zachodzi następujące oszacowanie

$$\left|H(t)-H^*(t)\right| \le \alpha \tag{7}$$

gdzie α dane jest wzorem (5).

Dowód. Rozkład prawdopodobieństwa (p_k) należy do klasy (D)NBUE stąd z twierdzenia 3 prawdziwe jest oszacowanie $|R_k - q^k| \le \alpha$. Badamy różnicę

$$\left|H(t)-H^*(t)\right| = \left|\sum_{k=0}^{\infty} P(N(t)=k)(R_k - q^k)\right| =$$
$$\le \sum_{k=0}^{\infty} P(N(t)=k)\alpha = \alpha,$$

co kończy dowód.

Zauważmy, że jeżeli $P(N(t) = k)$ jest rozkładem Poissona z parametrem λt, to aproksymacja funkcji przetrwania strumienia zagrożeń ma rozkład wykładniczy

$$H^*(t) = e^{-\frac{\lambda}{\mu}t} \tag{8}$$

4. Dwumianowy strumień zagrożeń

Rozważmy przypadek, kiedy rozkład $P(N(t) = k)$ *jest dwumianowy z parametrami n i* $\overline{p}$. Zakładamy przy tym, że $t\in[0, 1]$, tzn. jako jednostkę przyjmujemy całkowity czas użytkowania systemu. W przedziale $[0, t]$ może z określonym prawdopodobieństwem wystąpić co najwyżej n zagrożeń. Prawdopodobieństwo wystąpienia zagrożenia jest proporcjonalne do czasu. Tak więc

$$P(N(t)=k) = \binom{n}{k}(\overline{p}t)^k(1-\overline{p}t)^{n-k}, \quad k=0, 1,..., n, \quad t\in[0, 1] \tag{9}$$

Wówczas aproksymująca funkcja przetrwania strumień zagrożeń przyjmuje postać

$$H^*(t) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\overline{p}t)^k(1-\overline{p}t)^{n-k}q^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\overline{p}qt)^k(1-\overline{p}t)^{n-k} = (1-p\overline{p}t)^n.$$

Pokażemy teraz przykład, w którym będziemy aproksymować funkcję przetrwania systemu i szacować błąd tej aproksymacji.

Przykład. Rozważmy pewien obiekt techniczny, który jest narażony na strumień zagrożeń. W rzeczywistych warunkach eksploatacji nie znamy rozkładu czasu przetrwania tego obiektu, a więc nie możemy podać dla niego funkcji przetrwania. Możemy jedynie ocenić wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe rozkładu prawdopodobieństwa uszkodzenia urządzenia przy *k*-tym zagrożeniu, a mianowicie $\mu = 1{,}2$; $\sigma = 0{,}1$. Zmienna losowa określająca liczbę zagrożeń, na jakie jest narażony obiekt do chwili *t*, ma rozkład dwumianowy BI(n, $\overline{p}$) z parametrami $n = 4$, $\overline{p} = 0{,}9$. Natomiast zmienną losową określającą numer zagrożenia niszczącego, w którym nastąpiło uszkodzenie rozważanego obiektu będziemy aproksymować rozkładem geometrycznym GE(p), gdzie $p = 1/\mu =$ $= 0{,}83$. Aproksymująca funkcja niezawodności przyjmie postać:

$$H^*(t) = (1 - 0.75t)^4, \qquad t \in [0, 1].$$

Błąd tej aproksymacji, zgodnie z twierdzeniem 4, wynosi $\alpha = 0{,}096$.

Podsumowanie

W pracy zdefiniowana została funkcja przetrwania strumienia zagrożeń, na jakie jest narażony system w trakcie eksploatacji. Modelem strumienia zagrożeń obiektu jest ciąg zdarzeń losowych. Przedstawione metody można zastosować do klasy obiektów, które są zdolne odparować zagrożenie, i to wielokrotnie, zanim utracą zdatność. W szczególności zwrócono uwagę na Poissonowski strumień zagrożeń, dla którego przytoczone zostały dwa twierdzenia o dyskretnych klasach rozkładów.

Szczególna uwaga została zwrócona na zagadnienie aproksymacji funkcji przetrwania obiektu technicznego narażonego na losowy strumień zagrożeń przy informacji ograniczonej tylko do wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego wystąpienia zagrożenia. W praktyce w czasie eksploatacji obiektu często trudno jest wyznaczyć jego funkcję przetrwania, więc przedstawiona w tej pracy aproksymacja tej funkcji oraz oszacowanie błędu tej aproksymacji może mieć praktyczne zastosowanie.

Bibliografia

1. A-Hameed M.S., Proschan F.: Shock models with underlying birth proces. J.Appl.Prob. **12,** 18–28, 1975.

2. Bobrowski D., Popowska B.: The Estimate of the error for Approximation of some Discrete Distribution by the Geometric Distribution, Demonstratio Mathematica, 3, 679–686, 1997.
3. Esary D.J., Marshall A.W., Proschan F.: Shock models and wear processes. Ann. Probab. **1,** 627–649, 1973.
4. Fagiuoli E., Pellerey F.: Preservation of certain classes of life distributions under Poisson shock models. J.Appl.Prob. **31,** 458–465,1994.
5. Pellerey F.: Shock models with underlying counting process. J.Appl.Prob.**31,** 156–166, 1994.

Recenzent:
Jacek MALINOWSKI

Survival function of the sequence of risks and its approximation

Key words

Survival function, sequence of risks, shock model, system lifetime, error of approximation, (D)NBUE.

Summary

In the theory of reliability, a basic topic is determining the survival function of exploited objects. We assume that these objects are constantly exposed to the loss of ability because of various dangers. Methods presented in this publication can be applied to an object that is able to repel the danger many times before it loses its usefulness. We suppose that the danger to the system can repeat many times, which is "the sequence of risks." The technical object is exposed to a random sequence of risks, and we consider the problem of the approximation of the lifetime probability distribution based on the survival function. We introduce a general form of the survival function in the context of a sequence of risks and two particular models: the Poisson and binomial model. In the time of exploitation the object, it is very difficult to find the lifetime distribution, so we introduce an approximation of the survival function, and we estimate the error of this approximation. It can be very useful in practice.