

Franciszek GRABSKI

Akademia Marynarki Wojennej, Gdynia

STOCHASTYCZNY MODEL BEZPIECZEŃSTWA OBIEKTU W PROCESIE EKSPLOATACJI

Słowa kluczowe

Bezpieczeństwo, procesy semimarkowskie, eksploatacja.

Streszczenie

Teoria procesów stochastycznych dostarcza pojęcia i twierdzenia umożliwiające matematyczny opis i analizę różnych aspektów funkcjonowania systemów, a w tym aspekcie bezpieczeństwa. W pracy jest przedstawiony przykład modelu procesu eksploatacji obiektu w aspekcie bezpieczeństwa. Modelem jest proces semimarkowski o skończonym zbiorze stanów. Teoria procesów semimarkowskich pozwala określić parametry i charakterystyki bezpieczeństwa.

1. Model procesu eksploatacji

Skonstruujemy stochastyczny model procesu eksploatacji o kolejno realizowanych działaniach elementarnych, przyjmując założenie, że możliwe są zdarzenia powodujące na każdym etapie zagrożenie bezpieczeństwa obiektu oraz możliwe jest fatalne zdarzenie powodujące fatalne przerwanie procesu eksploatacji (awaria, katastrofa), zakłócenie każdego działania elementarnego i możliwa jest awaria obiektu.

1.1. Opis i założenia

Rozważmy proces eksploatacji o r różnych kolejno realizowanych działaniach elementarnych. Działanie elementarne oznacza tu realizację określonego zadania. Czas wykonania i -tego zadania, $i = 1, 2, \dots, r$ jest nieujemną zmienną losową ξ_i , $i = 1, 2, \dots, r$ o rozkładzie określonym przez dystrybuantę

$$F_i(t) = P(\xi_i \leq t) = \int_0^t f_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, r \quad (1)$$

gdzie $f_i(x)$, $x \geq 0$ jest gęstością w szerszym sensie rozkładu zmiennej losowej ξ_i , $i = 1, 2, \dots, r$.

Zakładamy, że proces eksploatacji na każdym etapie może być zakłócony przez zdarzenie powodujące zagrożenie bezpieczeństwa obiektu. By nie komplikować modelu, przyjmujemy, że co najwyżej jedno takie zdarzenie może nastąpić w każdym stanie eksploatacyjnym. Przyjmujemy, że czas liczony od chwili rozpoczęcia i -tego etapu procesu eksploatacji do chwili tego zdarzenia jest nieujemną zmienną losową ν_i , $i = 1, \dots, r$ o rozkładzie wykładniczym określonym przez dystrybuantę.

$$P(\nu_i \leq t) = 1 - e^{-\alpha_i t}, \quad i = 1, \dots, r \quad (2)$$

Zażegnanie zagrożenia i kontynuowanie eksploatacji w i -tym stanie trwa przez czas ζ_i , $i = 1, \dots, r$, który jest nieujemną zmienną losową o rozkładzie określonym przez dystrybuantę

$$P(\zeta_i \leq t) = H_i(t) = \int_0^t h_i(x) dx, \quad i = 1, \dots, r \quad (3)$$

W wielu przypadkach można przyjąć, że

$$\zeta_i = [\xi_i - \nu_i]_+, \quad i = 1, \dots, r \quad (4)$$

co oznacza, że

$$\begin{aligned} H_i(t) &= P(\zeta_i \leq t) = P(\xi_i - \nu_i \leq t | \xi_i > \nu_i) = \\ &= \frac{\iint_D \alpha_i e^{-\alpha_i y} f_i(x) dx dy}{\iint_E \alpha_i e^{-\alpha_i y} f_i(x) dx dy} \end{aligned}$$

gdzie

$$D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq x - y \leq t, x > y\}$$

$$E = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x > y\}.$$

Zamieniając całki podwójne na iterowane otrzymujemy

$$H_i(t) = \frac{\int_0^{\infty} \alpha_i e^{-\alpha_i y} [F_i(y+t) - F_i(y)] dy}{\int_0^{\infty} \alpha_i e^{-\alpha_i y} [1 - F_i(y)] dy} \quad (5)$$

Jeżeli niebezpieczeństwo obiektu w i -tym stanie nie zostanie zażegnane, to proces eksploatacji jest kontynuowany do chwili zdarzenia przerywającego eksploatację (do chwili awarii lub katastrofy). Czas trwania i -tego zakłóconego etapu procesu eksploatacji liczony od chwili zakłócenia do chwili fatalnego zdarzenia jest nieujemną zmienną η_i , $i = 1, \dots, r$ o rozkładzie określonym przez dystrybuantę

$$P(\eta_i \leq t) = 1 - e^{-\lambda_i t}, \quad i = 1, \dots, r \quad (6)$$

Zakładamy, że proces eksploatacji jest cykliczny. Przyjmujemy również, że zmienne losowe $\xi_i, \eta_i, \nu_i, \zeta_i$, $i = 1, \dots, r$ są wzajemnie niezależne, a każdy cykl eksploatacji jest generowany przez ich niezależne kopie.

1.2. Konstrukcja modelu

Budowę modelu zaczynamy od określenia stanów:

i , ($i = 1, \dots, r$) – stan eksploatacyjny (etap procesu eksploatacji),

$i + r$, ($i = 1, \dots, r$) – stan zagrożenia bezpieczeństwa w i -tym stanie eksploatacyjnym,

$2r + 1$ – stan przerwania procesu eksploatacji (stan awarii, katastrofy).

Przy powyższych założeniach proces opisujący eksploatację obiektu w aspekcie bezpieczeństwa jest procesem semimarkowskim $\{X(t) : t \geq 0\}$ o zbiorze stanów $S = \{1, 2, \dots, 2r, 2r + 1\}$. Graf zmian stanów tego procesu dla $r = 4$ jest przedstawiony na rysunku 1.

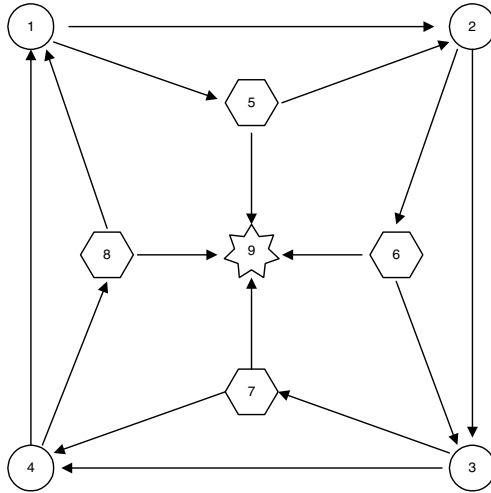
Skonstruowanie stochastycznego modelu polega na określeniu jądra procesu

$$Q(t) = [Q_{ij}(t) : i, j \in S],$$

gdzie

$$Q_{ij}(t) = P(X(\tau_{n+1}) = j, \tau_{n+1} - \tau_n \leq t | X(\tau_n) = i)$$

oznacza prawdopodobieństwo zmiany stanu z i na j w czasie nie większym niż t .



Rys. 1. Graf zmian stanów procesu eksploatacji

Zdefiniujemy najpierw prawdopodobieństwa przejścia ze stanu i do stanu $j=i+1$ w czasie nie większym t , dla $i = 1, \dots, r-1$.

$$\begin{aligned} Q_{ii+1}(t) &= P(\xi_i \leq t, \nu_i > \xi_i) = \\ &= \iint_D \alpha_i e^{-\alpha_i y} f_i(x) dx dy \end{aligned}$$

gdzie

$$D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x \leq t, y > x\}$$

Stąd otrzymujemy

$$Q_{ii+1}(t) = \int_0^t f_i(x) dx \int_x^\infty \alpha_i e^{-\alpha_i y} dy = \int_0^t e^{-\alpha_i x} f_i(x) dx \quad (7)$$

Podobnie

$$Q_{r1}(t) = \int_0^t f_r(x) dx \int_x^\infty \alpha_r e^{-\alpha_r y} dy = \int_0^t e^{-\alpha_r x} f_r(x) dx \quad (8)$$

Dla $i = 1, \dots, r$ mamy

$$Q_{i i+r}(t) = P(\nu_i \leq t, \nu_i < \xi_i) = \int_0^t \alpha_i e^{-\alpha_i u} [1 - F_i(u)] du \quad (9)$$

Dla $i = 1, \dots, r-1$ oraz $t \geq 0$ mamy

$$Q_{i+r i+1}(t) = P(\zeta_i \leq t, \eta_i > \zeta_i) = \int_0^t e^{-\lambda_i x} h_i(x) dx \quad (10)$$

Podobnie dla $t \geq 0$

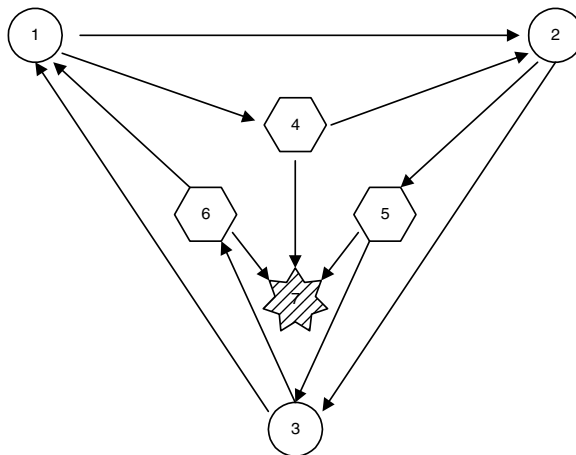
$$Q_{2r 1}(t) = P(\zeta_i \leq t, \eta_i > \zeta_i) = \int_0^t e^{-\lambda_r x} h_r(x) dx \quad (11)$$

Dla $i = 1, \dots, r$ mamy oraz $t \geq 0$

$$Q_{i+r 2r+1}(t) = P(\eta_i \leq t, \zeta_i > \eta) = \int_0^t \lambda_i e^{\lambda_i x} [1 - H_i(x)] dx \quad (12)$$

2. Model procesu eksploatacji dla $r = 3$

Dla $r = 3$ graf zmian stanów procesu jest przedstawiony na rysunku 2.



Rys. 2. Graf zmian stanów procesu eksploatacji dla $r = 3$

Jądro procesu ma postać

$$Q(t) = \begin{bmatrix} 0 & Q_{12}(t) & 0 & Q_{14}(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{23}(t) & 0 & Q_{25}(t) & 0 & 0 \\ Q_{31}(t) & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{36}(t) & 0 \\ 0 & Q_{42}(t) & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{47}(t) \\ 0 & 0 & Q_{53}(t) & 0 & 0 & 0 & Q_{57}(t) \\ Q_{61}(t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{67}(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{77}(t) \end{bmatrix} \quad (13)$$

gdzie niezerowe elementy określone są wzorami (7) – (12).

Funkcja

$$G_i(t) = P(\tau_{n+1} - \tau_n \leq t | X(\tau_n) = i) = \sum_{j \in S} Q_{ij}(t) \quad (14)$$

jest dystrybuantą rozkładu zmiennej losowej T_i , która oznacza czas trwania stanu i bez względu na to, jaki będzie następny stan procesu.

Korzystając z tego wzoru oraz wzorów (7), (8) dla $i = 1, 2, 3$, mamy

$$G_i(t) = \int_0^t e^{-\alpha_i x} f_i(x) dx + \int_0^t \alpha_i e^{-\alpha_i x} [1 - F_i(x)] dx$$

Całkując przez części pierwszy składnik tej sumy, otrzymujemy

$$G_i(t) = e^{\alpha_i t} F_i(t) + \int_0^t \alpha_i e^{-\alpha_i x} F_i(x) dx + \int_0^t \alpha_i e^{-\alpha_i x} [1 - F_i(x)] dx$$

Ostatecznie

$$G_i(t) = 1 - e^{-\alpha_i t} [1 - F_i(t)], \quad i = 1, 2, 3 \quad (15)$$

W ten sposób otrzymaliśmy dystrybuanty rozkładu zmiennych losowych

$$T_i = \min(\xi_i, \nu_i), \quad i = 1, 2, 3 \quad (16)$$

Wartości oczekiwane tych nieujemnych zmiennych losowych obliczamy, korzystając ze wzoru

$$E(T_i) = \int_0^{\infty} [1 - G_i(t)] dt = \int_0^{\infty} e^{\alpha_i t} [1 - F_i(t)] dt, \quad i = 1, 2, 3 \quad (17)$$

podobnie dla stanów 4,5,6 mamy

$$G_{i+3}(t) = 1 - e^{-\lambda_i t} [1 - H_i(t)], \quad i = 1, 2, 3 \quad (18)$$

$$E(T_{i+r}) = \int_0^{\infty} [1 - G_{i+r}(t)] dt = \int_0^{\infty} e^{\lambda_i t} [1 - H_i(t)] dt, \quad i = 1, 2, 3 \quad (19)$$

Macierz prawdopodobieństw przejścia włożonego łańcucha Markowa ma postać

$$P = \begin{bmatrix} 0 & p_{12} & 0 & p_{14} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{23} & 0 & p_{25} & 0 & 0 \\ p_{31} & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{36} & 0 \\ 0 & p_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{47} \\ 0 & 0 & p_{53} & 0 & 0 & 0 & p_{57} \\ p_{61} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

gdzie

$$p_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} Q_{ij}(t) \quad (21)$$

Biorąc pod uwagę wzory (7) – (12), otrzymujemy

$$\begin{aligned} p_{12} &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha_1 x} f_1(x) dx, & p_{14} &= 1 - p_{12} \\ p_{23} &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha_2 x} f_2(x) dx, & p_{25} &= 1 - p_{23} \\ p_{31} &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha_3 x} f_3(x) dx, & p_{36} &= 1 - p_{31} \\ p_{42} &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda_1 x} h_1(x) dx, & p_{47} &= 1 - p_{42} \end{aligned}$$

$$p_{53} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda_2 x} h_2(x) dx, \quad p_{57} = 1 - p_{53}$$

$$p_{61} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda_3 x} h_3(x) dx, \quad p_{67} = 1 - p_{61}$$

3. Charakterystyki i parametry bezpieczeństwa

Niektóre charakterystyki i parametry procesu SM w rozpatrywanym modelu są wielkościami charakteryzującymi bezpieczeństwo obiektu w procesie eksploatacji. Funkcja

$$\Phi_{iA}(t) = P(\Theta_A \leq t | X(0) = i), \quad t \geq 0 \quad (22)$$

jest dystrybuantą rozkładu zmiennej losowej Θ_{iA} oznaczającej czas pierwszego przejścia procesu SM $\{X(t) : t \geq 0\}$ ze stanu $i \in A'$ do podzbioru stanów A . Z twierdzeń przedstawionych w pracach [Koroluk & Turbin (1976)], [Silvestrov (1980)], [Grabski (2002)] wynika, że przy pewnych założeniach które przedstawiony tu model spełnia, transformaty Laplace'a – Stieltjesa dystrybuant rozkładów zmiennych losowych Θ_{iA} spełniają układ równań liniowych, który w zapisie macierzowym ma postać

$$(\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{q}}_{A'}(s)) \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{A'}(s) = \tilde{\mathbf{b}}(s) \quad (23)$$

gdzie

$$\mathbf{I} = [\delta_{ij} : i, j \in A']$$

$$\tilde{\mathbf{q}}_{A'}(s) = [\tilde{q}_{ij}(s) : i, j \in A']$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{A'}(s) = [\tilde{\varphi}_{iA}(s) : i \in A']^T, \quad \tilde{\mathbf{b}}(s) = \left[\sum_{j \in A} \tilde{q}_{ij}(s) : i \in A' \right]^T$$

$$\tilde{q}_{ij}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dQ_{ij}(t), \quad \tilde{\varphi}_{iA}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} d\Phi_{iA}(t),$$

Wartość oczekiwaną zmiennej losowej Θ_{iA} , $i \in A'$ możemy obliczyć na wiele sposobów. Jeden z nich polega na rozwiązaniu układu równań liniowych, który w notacji macierzowej ma postać

$$(\mathbf{I} - \mathbf{P}_{A'}) \overline{\boldsymbol{\Theta}}_{A'} = \overline{\mathbf{T}}_{A'}, \quad (24)$$

gdzie

$$\mathbf{P}_{A'} = [p_{ij} : i, j \in A'], \quad \overline{\Theta}_{A'} = [E(\Theta_{iA}) : i \in A']^T, \quad \overline{\mathbf{T}}_{A'} = [E(T_i) : i \in A']^T$$

W naszym przypadku zmienna losowa Θ_{iA} , gdzie $i = 1$ oraz $A = \{7\}$ oznacza czas bezpiecznej eksploatacji obiektu. Funkcja

$$S(t) = P(\Theta_{17} > t) = 1 - \Phi_{17}(t), \quad t \geq 0 \quad (25)$$

jest funkcją bezpieczeństwa obiektu. Jej wartość w chwili t jest prawdopodobieństwem bezpiecznej eksploatacji w tej chwili. Transformatę Laplace'a tej funkcji otrzymujemy, korzystając ze związku

$$\tilde{S}(s) = \frac{1 - \tilde{\varphi}_{17}(s)}{s} \quad (26)$$

Przykład 1.

Przyjmijmy w modelu dla $r = 3$

$$F_i(t) = 1 - e^{-\kappa_i t}, \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2, 3$$

oraz założenie (4). Wówczas

$$H_i(t) = 1 - e^{-\kappa_i t}, \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Wtedy, korzystając ze wzorów (7) – (12) otrzymujemy niezerowe elementy jądra procesu

$$Q_{12}(t) = \frac{\kappa_1}{\alpha_1 + \kappa_1} \left(1 - e^{-(\alpha_1 + \kappa_1)t}\right) \quad Q_{14}(t) = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \kappa_1} \left(1 - e^{-(\alpha_1 + \kappa_1)t}\right)$$

$$Q_{23}(t) = \frac{\kappa_2}{\alpha_2 + \kappa_2} \left(1 - e^{-(\alpha_2 + \kappa_2)t}\right) \quad Q_{25}(t) = \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \kappa_2} \left(1 - e^{-(\alpha_2 + \kappa_2)t}\right)$$

$$Q_{31}(t) = \frac{\kappa_3}{\alpha_3 + \kappa_3} \left(1 - e^{-(\alpha_3 + \kappa_3)t}\right) \quad Q_{36}(t) = \frac{\alpha_3}{\alpha_3 + \kappa_3} \left(1 - e^{-(\alpha_3 + \kappa_3)t}\right)$$

$$Q_{42}(t) = \frac{\kappa_1}{\lambda_1 + \kappa_1} \left(1 - e^{-(\lambda_1 + \kappa_1)t}\right) \quad Q_{47}(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \kappa_1} \left(1 - e^{-(\lambda_1 + \kappa_1)t}\right)$$

$$Q_{53}(t) = \frac{\kappa_2}{\lambda_2 + \kappa_2} \left(1 - e^{-(\lambda_2 + \kappa_2)t}\right) \quad Q_{57}(t) = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \kappa_2} \left(1 - e^{-(\lambda_2 + \kappa_2)t}\right)$$

$$Q_{61}(t) = \frac{\kappa_3}{\lambda_3 + \kappa_3} \left(1 - e^{-(\lambda_3 + \kappa_3)t}\right) \quad Q_{67}(t) = \frac{\lambda_3}{\lambda_3 + \kappa_3} \left(1 - e^{-(\lambda_3 + \kappa_3)t}\right)$$

Z postaci tych funkcji wynika, że $\{X(t) : t \geq 0\}$ jest procesem Markowa.

Transformaty Laplace'a-Stieltjesa tych funkcji mają postać

$$\tilde{q}_{12}(s) = \frac{\kappa_1}{s + \alpha_1 + \kappa_1} \quad \tilde{q}_{14}(s) = \frac{\alpha_1}{s + \alpha_1 + \kappa_1}$$

$$\tilde{q}_{23}(s) = \frac{\kappa_2}{s + \alpha_2 + \kappa_2} \quad \tilde{q}_{25}(s) = \frac{\alpha_2}{s + \alpha_2 + \kappa_2}$$

$$\tilde{q}_{31}(s) = \frac{\kappa_3}{s + \alpha_3 + \kappa_3} \quad \tilde{q}_{36}(s) = \frac{\alpha_3}{s + \alpha_3 + \kappa_3}$$

$$\tilde{q}_{42}(s) = \frac{\kappa_1}{s + \kappa_1 + \lambda_1} \quad \tilde{q}_{47}(s) = \frac{\lambda_1}{s + \kappa_1 + \lambda_1}$$

$$\tilde{q}_{53}(s) = \frac{\kappa_2}{s + \kappa_2 + \lambda_2} \quad \tilde{q}_{57}(s) = \frac{\lambda_2}{s + \kappa_2 + \lambda_2}$$

$$\tilde{q}_{61}(s) = \frac{\kappa_3}{s + \kappa_3 + \lambda_3} \quad \tilde{q}_{67}(s) = \frac{\lambda_3}{s + \kappa_3 + \lambda_3}$$

Dla

$$\lambda_1 = 0.01, \quad \lambda_2 = 0.01, \quad \lambda_3 = 0.01$$

$$\alpha_1 = 0.08, \quad \alpha_2 = 0.06, \quad \alpha_3 = 0.04$$

$$\kappa_1 = 1.86, \quad \kappa_2 = 2.94, \quad \kappa_3 = 0.94$$

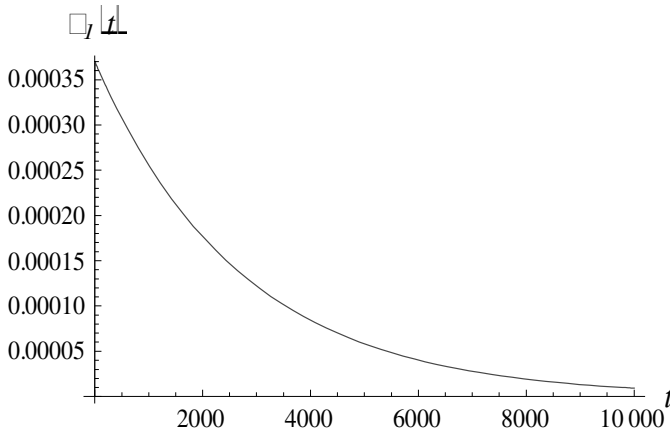
transformata Laplace'a gęstości rozkładu czasu bezpiecznej eksploatacji wynosi

$$\tilde{\varphi}_{17}(s) = \frac{0.0008(2.16791 + s)(4.67947 + s)(2.64379 + 2.42763s + s^2)}{(0.000370008 + s)(0.98987 + s)(1.95016 + s)(3.00973 + s)(9.98083 + 5.73987s + s^2)}$$

Gęstość $\varphi_{17}(t)$, $t \geq 0$ otrzymujemy jako transformatę odwrotną do $\tilde{\varphi}_{17}(s)$

$$\varphi_{17}(t) = 0.000435118e^{-3.00973t} + 0.000158453e^{-1.95016t} - 0.000418903e^{-0.98987t} + 0.000370123e^{-0.000370008t} + e^{-2.86994t}[-0.00054479 \cos(1.32072t) + 0.000333576 \sin(1.32072t)], \quad t \geq 0$$

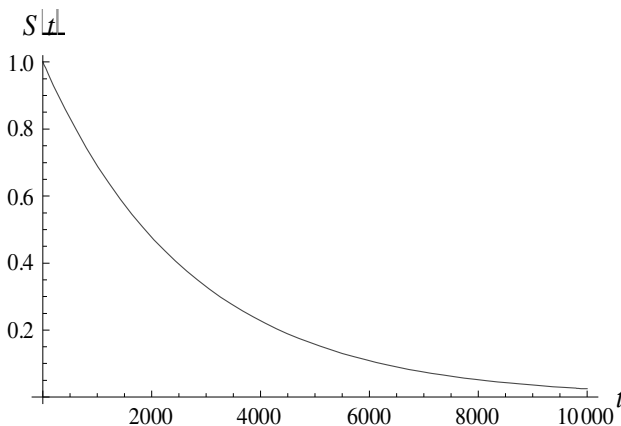
Wykres tej funkcji jest przedstawiony na rysunku 3.



Rys. 3. Gęstość rozkładu czasu bezpiecznej eksploatacji

Funkcja bezpieczeństwa ma postać

$$S(t) = 0.00014457 e^{-3.00973t} + 0.0000812514 e^{-1.95016t} - 0.00042319 e^{-0.98987t} + 1.00031 e^{-0.000370008t} + e^{-2.86994t}[-0.000112511 \cos(1.32072t) + 0.000168008 \sin(1.32072t)], \quad t \geq 0$$



Rys. 4. Funkcja bezpieczeństwa

Oczekiwany czas bezpiecznej eksploatacji wynosi $E(\Theta_{17}) = 2703.48$.

Przykład 2.

Przyjmijmy w modelu dla $r=3$

$$F_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \leq c_i \\ 1 & \text{for } t > c_i \end{cases}, \quad i = 1, 2, 3$$

To oznacza, że czas wykonania i -tego zadania jest zdeterminowany i wynosi c_i .

$$H_i(t) = 1 - e^{-\kappa_i t}, \quad t \geq 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Korzystając ze wzorów (7) – (12), otrzymujemy niezerowe elementy jądra procesu

$$Q_{12}(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \leq c_1 \\ e^{-\alpha_1 c_1} & \text{dla } t > c_1 \end{cases}$$

$$Q_{14}(t) = \begin{cases} (1 - e^{-\alpha_1 t}) & \text{dla } t \leq c_1 \\ (1 - e^{-\alpha_1 c_1}) & \text{dla } t > c_1 \end{cases}$$

$$Q_{23}(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \leq c_2 \\ e^{-\alpha_2 c_2} & \text{dla } t > c_2 \end{cases}$$

$$Q_{25}(t) = \begin{cases} (1 - e^{-\alpha_2 t}) & \text{dla } t \leq c_2 \\ (1 - e^{-\alpha_2 c_2}) & \text{dla } t > c_2 \end{cases}$$

$$Q_{31}(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \leq c_3 \\ e^{-\alpha_3 c_1} & \text{dla } t > c_3 \end{cases}$$

$$Q_{36}(t) = \begin{cases} (1 - e^{-\alpha_3 t}) & \text{dla } t \leq c_3 \\ (1 - e^{-\alpha_3 c_3}) & \text{dla } t > c_3 \end{cases}$$

$$Q_{42}(t) = \frac{\kappa_1}{\lambda_1 + \kappa_1} \left(1 - e^{-(\lambda_1 + \kappa_1)t}\right) \quad Q_{47}(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \kappa_1} \left(1 - e^{-(\lambda_1 + \kappa_1)t}\right)$$

$$Q_{53}(t) = \frac{\kappa_2}{\lambda_2 + \kappa_2} \left(1 - e^{-(\lambda_2 + \kappa_2)t}\right) \quad Q_{57}(t) = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \kappa_2} \left(1 - e^{-(\lambda_2 + \kappa_2)t}\right)$$

$$Q_{61}(t) = \frac{\kappa_3}{\lambda_3 + \kappa_3} \left(1 - e^{-(\lambda_3 + \kappa_3)t}\right) \quad Q_{67}(t) = \frac{\lambda_3}{\lambda_3 + \kappa_3} \left(1 - e^{-(\lambda_3 + \kappa_3)t}\right)$$

W tym przypadku mamy

$$\begin{aligned}
 p_{12} &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha_1 x} dF_1(x) = e^{-\alpha_1 c_1} & p_{14} &= 1 - e^{-\alpha_1 c_1} \\
 p_{23} &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha_2 x} dF_2(x) = e^{-\alpha_2 c_2} & p_{25} &= 1 - e^{-\alpha_2 c_2} \\
 p_{31} &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha_3 x} dF_3(x) = e^{-\alpha_3 c_3} & p_{36} &= 1 - e^{-\alpha_3 c_3} \\
 p_{42} &= \frac{\kappa_1}{\lambda_1 + \kappa_1} & p_{47} &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \kappa_1} \\
 p_{53} &= \frac{\kappa_2}{\lambda_2 + \kappa_2} & p_{57} &= \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \kappa_2} \\
 p_{61} &= \frac{\kappa_3}{\lambda_3 + \kappa_3} & p_{67} &= \frac{\lambda_3}{\lambda_3 + \kappa_3}
 \end{aligned}$$

$$E(T_1) = \frac{1}{\alpha_1} (1 - e^{-\alpha_1 c_1}) \quad E(T_2) = \frac{1}{\alpha_2} (1 - e^{-\alpha_2 c_2}) \quad E(T_3) = \frac{1}{\alpha_3} (1 - e^{-\alpha_3 c_3})$$

$$E(T_4) = \frac{1}{\lambda_1 + \kappa_1} \quad E(T_5) = \frac{1}{\lambda_2 + \kappa_2} \quad E(T_6) = \frac{1}{\lambda_3 + \kappa_3}$$

Rozwiązując równanie (24) dla tych samych wartości parametrów oraz

$$c_i = \frac{1}{\kappa_i}, \quad c_j = \frac{1}{\kappa_j}, \quad j = 3 + i, \quad i = 1, 2, 3,$$

otrzymujemy wartość oczekiwaną czasu bezpiecznej eksploatacji

$$E(\Theta_{17}) = 2701.19.$$

Jak widać, oczekiwany czas bezpiecznej eksploatacji mało się różni od czasu eksploatacji w przypadku, gdy czasy realizacji określonych zadań miały rozkłady wykładnicze o identycznych wartościach oczekiwanych.

Podsumowanie

Analityczne metody badania bezpieczeństwa w procesie eksploatacji urządzeń wymagają tworzenia matematycznych modeli umożliwiających ocenę parametrów i charakterystyk bezpieczeństwa. Dogodny aparat matematyczny mo-

delowania procesów eksploatacji w aspekcie bezpieczeństwa stwarza teoria procesów semimarkowskich. Skonstruowanie procesu semimarkowskiego jako modelu procesu eksploatacji polega na określeniu jądra procesu oraz rozkładu początkowego. Dzięki twierdzeniom teorii procesów semimarkowskich możliwe jest znalezienie rozkładu czasu bezpiecznej eksploatacji oraz parametrów tego rozkładu, takich jak wartość oczekiwana i odchylenie standardowe.

Bibliografia

1. Barlow R.E., Proshan F.: *Mathematical theory of reliability*. Wiley, New York, London, Sydney 1965.
2. Borgoń J., Jaźwiński J., Klimaszewski S., Żmudziński Z., Żurek J.: *Symulacyjne metody badania bezpieczeństwa lotów*. Wydawnictwo Naukowe AS-KON, Warszawa 1998.
3. Grabski F.: *Semi-markowskie modele niezawodności i eksploatacji*. Polska Akademia Nauk, IBS, Warszawa 2002. Seria: *Badania Systemowe*, tom 30.
4. Grabski F.: *Applications of Semi-Markov Processes in Safety and Reliability Analysis*. SSARS 2009, Gdańsk, pp. 94.
5. Grabski F., Jaźwiński J.: *Funkcje o losowych argumentach w zagadnieniach niezawodności bezpieczeństwa i logistyki*. Monografia. WKŁ 2009, s. 344.
6. Koroluk W.S.: *Turbin A.F.(1976) Semi-Markov processes and their applications*. Naukova Dumka, Kiev, (in Russian).
7. Silvestrov D.S.: *Semi-Markov processes with discrete state space* Sovietskoe Radio, Moskva, 1980, (in Russian).

Recenzent:

Wojciech WAWRZYŃSKI

Stochastic model of safety system operation

Key words

Safety, semi-Markov processes, operation.

Abstract

To describe the safety evolution of the system, we constructed a Semi-Markov process by defining the states and the renewal kernel of that one. In our model, the time of the safety system operation is represented by a random variable that denotes the first passage of time from the given state to the subset of states. Appropriate theorems from the Semi-Markov processes theory allow us to calculate the safety function and the mean time of the safety operation.