Karol ANDRZEJCZAK, Barbara POPOWSKA
Politechnika Poznańska, Poznań

TRÓJPARAMETROWY MODEL ZDATNOŚCI SYSTEMU Z DWOMA TYPAMI ZAGROŻEŃ

Słowa kluczowe

Funkcja przetrwania, funkcja ryzyka, konkurujące zagrożenia, rozkład Weibulla, zagrożenie incydentalne, zagrożenie starzeniowe.

Streszczenie

W pracy przedstawiono trójparametrowy model czasu zdatności systemu technicznego narażonego na dwa typy zagrożeń. Do pierwszego typu zagrożeń należą wszelkie zagrożenia incydentalne, a do drugiego tak zwane zagrożenia starzeniowe. Motywacją do napisania tej pracy była właśnie idea połączenia badań tych dwóch typów zagrożeń, z jakimi mamy często do czynienia w praktyce, zwłaszcza w kontekście systemów technicznych.

Celem pracy jest wskazanie alternatywy dla masowo stosowanego rozkładu Weibulla w badaniu czasów zdatności systemów. W punkcie 1 opisano trójparametrowy model, zdefiniowany jako minimum dwóch zmiennych losowych. Uzasadniono zarówno potrzebę wprowadzenia tego modelu, jak i jego przewagę nad dotychczasowym sposobem modelowania czasu zdatności systemu. W punkcie 2 przedstawiono podstawowe charakterystyki funkcyjne i liczbowe wprowadzonego modelu zdatności systemu. Ponadto obliczono wpływ parametrów, dla różnych kombinacji ich wartości, na ustalenie przyczyny utraty zdatności systemu.

Wprowadzenie

Świadomość różnorakich zagrożeń i skutków, jakie niosą ze sobą wytwory cywilizacji technicznej, jest warunkiem koniecznym przeciwdziałania im, nie tylko w fazie eksploatacji tych wytworów, ale już w fazie formułowania potrzeby ich projektowania. Badania obejmujące proces uszkadzania obiektu technicznego i wywoływanych skutków są ważne zarówno ze względu na bezpieczeństwo ich użytkowników lub operatorów, jak i ponoszonych strat ekonomicznych oraz zagrożeń środowiskowych.

Przedstawiona metoda modelowania czasu zdatności systemu znana jest z literatury pod nazwą metody rywalizujących zagrożeń [2]. Badamy system, dla którego można wyróżnić wiele różnorodnych zagrożeń mogących spowodować utratę jego zdatności. Wyróżnione zagrożenia systemu dzielimy na dwa typy. Do pierwszego typu zagrożeń zaliczamy wszelkie zagrożenia zewnętrzne oraz te wewnętrzne, które są niezależne od czasu eksploatacji systemu. Zagrożenia te nazywamy zagrożeniami incydentalnymi. Z kolei zdarzenia, które są źródłem zagrożeń zależnych od czasu eksploatacji systemu, tj. z takich powodów, jak: docieranie, zużywanie się, zmiany fizykochemiczne lub zmęczeniowe materiału itp. zaliczamy do drugiego typu zagrożeń. Ten typ zagrożeń nazywamy zagrożeniami starzeniowymi.

W pracy podajemy model i jego charakterystyki niezawodnościowe dla systemów, które wymagają uwzględnienia obydwu typów zagrożeń. W szczególności w punkcie 1 wprowadzony został trójparametrowy model czasu zdatności takiego systemu. Przegląd literatury wskazuje, że zagadnienie rywalizujących zagrożeń uwzględniające jednocześnie wyróżnione dwa typy zagrożeń nie było dotychczas przedmiotem badań, mimo że problem ten wydaje się występować w sposób naturalny i być dość powszechny. W punkcie 2 wyznaczone zostało prawdopodobieństwo przyczyny utraty zdatności ze względu na parametry charakteryzujące typ zagrożeń systemu. Zinterpretowane zostały parametry modelu oraz wyznaczona została podstawowa charakterystyka niezawodnościowa, tj. oczekiwany czas zdatności systemu opisanego trójparametrową rodziną rozkładów.

Wprowadzony w tej pracy model zdatności może być zastosowany, na przykład, w analizie uszkodzenia samochodu osobowego. Najczęstsze przyczyny awarii samochodów można podzielić na te, które charakteryzują się stałą albo zmienną intensywnością uszkodzenia. Należą do nich między innymi uszkodzenia: komponentów elektronicznych, kondensatorów, reflektorów, elementów tłumiących drgania (resory, wkłady gumowe), elementów półprzewodnikowych, akumulatora, łożysk, tarcz. Jeśli przyczyną uszkodzenia samochodu jest utrata zdatności opony, to modelem czasu zdatności tego elementu może być również trójparametrowy rozkład uwzględniający zarówno możliwość utraty zdatności opony z powodu zużycia eksploatacyjnego, jak i gwałtownego uszkodzenia mechanicznego.

1. Trójparametrowy model czasu zdatności systemu

Niech T oznacza losowy czas zdatności systemu. Utrata zdatności następuje w wyniku jednego zdarzenia, spośród wszystkich zdarzeń zagrażających obydwu typów. Modelem przetrwania incydentalnych zagrożeń jest jednoparametrowa rodzina rozkładów wykładniczych, charakteryzująca się własnością braku pamięci. Rodzina ta jest oznaczana $EXP(\lambda)$.

Funkcja przetrwania (zwana niezawodnością) S: $\boldsymbol{R}_{+}\rightarrow[0, 1]$ określona jest wzorem $S(t) = P(T > t)$. Funkcja ta jest podstawową miarą bezpieczeństwa systemu, określonego jako prawdopodobieństwo utrzymania stanu zdatności w czasie $[0, t]$.

Funkcja przetrwania dla rodziny rozkładów wykładniczych dana jest wzorem:

$$S_E(t;\lambda) = \exp(-\lambda t),\ t \geq 0 \tag{1}$$

gdzie $\lambda > 0$ jest odwróconym parametrem skali. Zagrożenia incydentalne nie są spowodowane procesami starzeniowymi systemu, a ich przyczynami mogą być zdarzenia wywołane czynnikami zewnętrznymi lub specyficznymi wewnętrznymi, wynikającymi z błędów konstrukcyjnych lub operatorskich. Modelem przetrwania systemu zagrożeń starzeniowych jest dwuparametrowa rodzina rozkładów Weibulla $W(\lambda, \beta)$, której funkcja przetrwania dana jest wzorem:

$$S_W(t;\lambda,\beta) = \exp\left(-(\lambda t)^{\beta}\right),\ t \geq 0 \tag{2}$$

gdzie $\lambda > 0$ jest odwróconym parametrem skali, a $\beta > 0$ parametrem kształtu. Rozkład Weibulla dla $\beta < 1$ jest modelem uszkodzenia systemu w okresie jego docierania, a dla $\beta > 1$ w okresie dojrzałej eksploatacji. Funkcja ryzyka, zwana również intensywnością uszkodzenia systemu, w tym przypadku zależy od czasu eksploatacji systemu. Funkcja ta dana jest wzorem:

$$h_W(t;\lambda,\beta) = \lambda\beta(\lambda t)^{\beta-1} \tag{3}$$

W szczególnym przypadku, tj. dla $\beta = 1$ otrzymujemy równość $W(\lambda, 1) = EXP(\lambda)$. Dane dotyczące eksperymentów niezawodnościowych systemu technicznego często służą do estymacji parametrów weibullowskiego modelu czasu jego zdatności. Podstawowy problem dotyczy wówczas zbadania prawdziwości hipotezy $\beta = 1$, przeciw jednej z hipotez alternatywnych $\beta < 1$ – system jest w fazie docierania lub $\beta > 1$ – system starzeje się.

Uwzględniając oddziaływania zewnętrzne na system, nie możemy wykluczyć zagrożeń incydentalnych, które mogą pojawić się w okresie starzeniowym systemu. Jeżeli zagrożenia incydentalne oraz zagrożenia starzeniowe, objawiające się rosnącą intensywnością utraty zdatności, występują razem, to w badaniu bezpieczeństwa takiego systemu nie możemy pomijać jednego typu zagrożeń na rzecz badania tylko drugiego typu. Zauważmy, że dotychczas, jeżeli zdiagnozowany został proces starzeniowy systemu, to dalsze wnioskowanie statystyczne zwykle było czynione na podstawie rozkładu Weibulla. Oczywiście, takie upraszczające założenie jest czasami wystarczające. Niemniej istnieje wiele przypadków, w których zaniedbanie uszkodzeń incydentalnych w okresie starzeniowym systemu może być przyczyną poważnych obciążeń we wnioskowaniu statystycznym, dotyczącym badania czasu przetrwania zagrożeń przez ten system. Przecież nawet wtedy, kiedy procesy starzeniowe pozostają najczęstszą przyczyną utraty zdatności, incydentalne zdarzenia mogą pojawiać się z dość dużym prawdopodobieństwem. Stąd bardziej realistycznym sposobem modelowania czasu zdatności jest rozważenie modelu rywalizujących zagrożeń, który uwzględnia jednocześnie zagrożenia starzeniowe i incydentalne.

Koncepcja modelu jest oparta na prostych założeniach. Po pierwsze przyjmujemy, że czas T zdatności systemu jest funkcją zmiennych losowych postaci:

$$T = \min\{E, W\} \tag{4}$$

gdzie E jest zmienną losową o rozkładzie $EXP(\lambda_1)$, a W zmienną losową o rozkładzie $W(\lambda_2, \beta)$, dla $\beta > 1$. Po drugie przyjmujemy, że zmienne losowe E i W są niezależne. Przy przyjętych założeniach rozkład zmiennej losowej T należy do trójparametrowej rodziny rozkładów, którą oznaczamy $T(\lambda_1, \lambda_2, \beta)$.

Jak już było zasygnalizowane, celem tej pracy jest pokazanie możliwości zastosowania rodziny rozkładów $T(\lambda_1, \lambda_2, \beta)$ zamiast rodziny $W(\lambda_2, \beta)$. W rozważaniach pozostawiliśmy alternatywę $\beta > 1$, przyjmując, że eksploatowane systemy są już dotarte i wyeliminowane zostały wszystkie wczesne zagrożenia.

Stosowanie modeli rywalizujących zagrożeń jest znane w literaturze. Teoria rywalizujących zagrożeń jest ujmowana na o wiele bardziej wyszukanym poziomie niż wprowadzona w tej pracy rodzina rozkładów $T(\lambda_1, \lambda_2, \beta)$ {zob. [4]}. Ale rodzina rozkładów $T(\lambda_1, \lambda_2, \beta)$ zasługuje na specjalne zainteresowanie, ponieważ jest jednym z najprostszych i jednocześnie najpraktyczniejszym i najbardziej intuicyjnym trójparametrowym modelem rywalizujących zagrożeń.

2. Podstawowe charakterystyki trójparametrowego modelu

Do podstawowych charakterystyk funkcyjnych czasu T zdatności systemu należą: intensywność zagrożenia h_T, funkcja przetrwania S_T i gęstość prawdopodobieństwa f_T. Rozważania prowadzimy dla $t \geq 0$ oraz dodatnich parametrów λ_1, λ_2, β. Intensywność zagrożenia systemu jest sumą intensywności zagrożeń z obydwu powodów, tj. $h_T(t;\ \lambda_1, \lambda_2, \beta) = h_E(t;\ \lambda_1) + h_W(t;\ \lambda_2, \beta)$, czyli

$$h_T(t;\lambda_1,\lambda_2,\beta) = \lambda_1 + \lambda_2\beta(\lambda_2 t)^{\beta-1} \tag{5}$$

Funkcja przetrwania systemu obydwu typów zagrożeń przyjmuje postać:

$$S_T(t;\lambda_1,\lambda_2,\beta) = \exp\left(-\lambda_1 t - (\lambda_2 t)^{\beta}\right) \tag{6}$$

Stąd gęstość prawdopodobieństwa losowego czasu zdatności *T:*

$$f_T(t;\lambda_1,\lambda_2,\beta) = \left(\lambda_1 + \lambda_2\beta(\lambda_2 t)^{\beta-1}\right)\exp\left(-\lambda_1 t - (\lambda_2 t)^{\beta}\right) \tag{7}$$

Przyczyną utraty zdatności systemu będzie zdarzenie incydentalne tylko wtedy, gdy $E \leq W$, tj. gdy $T = E$. W przeciwnym przypadku przyczyną utraty zdatności systemu będzie zdarzenie o podłożu starzeniowym. W analizie danych dotyczących czasów zdatności, ze względu na parametry λ_1 i λ_2, szczególną rolę odgrywa przypadek dla $\beta = 2$. Dla tego przypadku wyprowadzone zostały formuły do wyznaczania prawdopodobieństw przyczyny utraty zdatności i funkcja tworząca momenty zmiennej losowej T. Prawdopodobieństwo, że przyczyną utraty zdatności systemu będzie zdarzenie incydentalne dane jest wzorem:

$$P(E \leq W) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp\left(\frac{\lambda_1^2}{4\lambda_2^2}\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{\lambda_1}{2\lambda_2}\right) \tag{8}$$

gdzie erfc(x) jest funkcją specjalną, zwaną w teorii prawdopodobieństwa uzupełniającą funkcją błędu Gaussa. Funkcja ta zdefiniowana jest następująco:

$$\mathrm{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty}\exp(-u^2)du \tag{9}$$

Przykład. Na podstawie danych dotyczących awarii samochodów osobowych pewnej marki, zgłaszanych do stacji serwisowych, oszacowane zostały parametry λ_1 i λ_2 [1/rok] trójparametrowego modelu (dla $\beta = 2$). Estymacja została dokonana tylko na podstawie dwóch typów uszkodzeń, tj. incydentalnych, dla których $\lambda_1 \approx 1$ oraz starzeniowych, dla których $\lambda_2 \approx 2$. Dla tych danych gęstość prawdopodobieństwa (jednostką jest 1 rok eksploatacji) czasu zdatności samochodu przyjmuje postać: f_T $(t;\ 1,\ 2,\ 2) = (1 + 8t)\ \exp(-t - 4t^2)$, natomiast prawdopodobieństwo, że do stacji napraw trafi auto z uszkodzeniem incydentalnym sprowadza się do obliczenia wartości funkcji $P(E \le W) = (\sqrt{\pi}/4)\ \exp(0{,}0625)\ \mathrm{erfc}(0{,}25) \approx 0{,}34126$, gdzie odczytana z tablic uzupełniająca funkcja błędu Gaussa $\mathrm{erfc}(0{,}25) \approx 0{,}72367$. Obliczone ze wzoru (8) prawdopodobieństwa utraty zdatności systemu z powodów incydentalnych, jako różnych wariantów funkcji ilorazu λ_2/λ_1, są zestawione w tabeli 1.

Tabela 1. Prawdopodobieństwa utraty zdatności systemu

λ_2/λ_1	0,1	0,2	0,5	1	1,5	2	5	10
$P(E \le W)$	0,98	0,93	0,75	0,54	0,42	0,34	0,15	0,08

Wnioski z przedstawionych w tabeli prawdopodobieństw są intuicyjnie oczywiste. Widzimy, że jeżeli $\lambda_2 < \lambda_1$, to dominujące stają się zagrożenia incydentalne, co w praktyce przekłada się na potrzebę zwiększenia zabezpieczenia modelowanego obiektu przed tego typu zagrożeniami. W przypadku rozważanych samochodów są to: kolizje, stłuczki uliczne, włamania z uszkodzeniami, awarie urządzeń kontrolnych, zła praca silnika, wymuszone wezwanie na przegląd techniczny.

Do wyznaczenia oczekiwanego czasu zdatności badanego systemu wykorzystana została funkcja tworząca momenty. Funkcja ta dla rodziny rozkładów $T(\lambda_1, \lambda_2, \beta)$ dla $\beta = 2$ ma postać:

$$G(u) = 1 + \exp\left(\frac{1}{2\lambda_2}(\lambda_1 - u)^2\right)\left(\frac{1}{\lambda_2} u \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathrm{erfc}\left(\frac{1}{2\lambda_2}(\lambda_1 - u)\right)\right) \tag{10}$$

Stąd wartość oczekiwana czasu zdatności systemu narażonego na dwa typy zagrożeń wyraża się wzorem:

$$E(T) = \frac{1}{\lambda_2} \exp\left(\frac{\lambda_1^2}{4\lambda_2^2}\right) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathrm{erfc}\left(\frac{\lambda_1}{2\lambda_2}\right) \tag{11}$$

Dla danych z podanego przykładu dotyczącego badanych samochodów, przeciętny czas zdatności wynosi 0,385 [rok], czyli około 4 i pół miesiąca.

Wracając do ogólnego przypadku, możemy zauważyć dość naturalne i spodziewane własności rozważanych rodzin rozkładów:

a) jeżeli intensywność uszkodzenia obiektu z powodów starzeniowych jest dużo większa od intensywności uszkodzenia z powodów incydentalnych, co zapisujemy $\lambda_2 >> \lambda_1$, to trójparametrowy model $T(\lambda_1, \lambda_2, \beta)$ rozkładu czasu zdatności obiektu sprowadza się do modelu rozkładu Weibulla $W(\lambda_2, \beta)$;

b) jeżeli $\lambda_1 >> \lambda_2$, to dla odmiany rozpatrywana rodzina rozkładów sprowadza się do rodziny rozkładów wykładniczych $EXP(\lambda_1)$.

Jeżeli jesteśmy zainteresowani przypadkami zastosowań przedstawionego modelu do badania czasu zdatności systemów, dla których starzenie jest ważne, to dla odwróconych parametrów skali odpowiednie jest założenie nierówności $\lambda_2 \geq \lambda_1$. Z drugiej strony relacja $\lambda_1 > \lambda_2$ oznacza dominującą rolę zagrożeń incydentalnych.

Podsumowanie

Konstruując model czasu zdatności pewnego systemu może okazać się, że uniwersalny rozkład Weibulla jest niewystarczający. W konsekwencji nawet najlepsza estymacja parametrów tego rozkładu może być na tyle obciążona, że nie da dobrego dopasowania funkcji charakteryzujących czas zdatności tego systemu. Z sytuacją taką mamy do czynienia wtedy, kiedy system jest cały czas narażony na różnego rodzaju rywalizujące zagrożenia. Wprowadzona w tej pracy rodzina rozkładów $T(\lambda_1, \lambda_2, \beta)$ jest zaproponowana jako naturalny i prosty model czasu zdatności systemu narażonego zarówno na incydentalne, jak i starzeniowe zagrożenia. Dla wyróżnionych typów rywalizujących zagrożeń wprowadzona rodzina rozkładów jest alternatywą dla rodziny rozkładów Weibulla w modelowaniu starzejących się systemów. Przedstawiony model daje możliwość prognozowania przyczyn utraty zdatności systemu (zob. [1]), a tym samym możliwość przeciwdziałania różnorakim zagrożeniom i ich skutkom, zanim one wystąpią. Jest to naturalny element badań niezawodnościowych systemów. Inspiracją do napisania tej pracy były twierdzenia zawarte w pracy [3]. Ze względu na ograniczone ramy zagadnienie estymacji parametrów wprowadzonego modelu zostało pominięte. Jest to czysto statystyczne zagadnienie i wymaga osobnego opracowania.

Bibliografia

1. Andrzejczak K.: Metody prognozowania przyczyny niezdatności złożonego obiektu dychotomicznego. Materiały XXXIII Zimowej Szkoły Niezawodności, Szczyrk 2005, 17–31.
2. Andrzejczak K.: Probabilistyczny model konkurujących zagrożeń. Problemy Eksploatacji 4/2009 (75), 7–18.
3. Bousquet N., Bertholon H., Celeux G.: An alternative competing risk model to the Weibull distribution for modelling aging in lifetime data analysis. Lifetime Data Anal 12 (2006), 481–504.

4. Chan V., Meeker W.Q.: A failure-time model for infant-mortality and wear-out failure modes. IEEE Trans Reliab. 48 (1999), 377–387.

Recenzent:
Jacek MALINOWSKI

Three parameter model of the system lifetime with two types of risks

Key words

Survival function, risk function, competing risks, Weibull distribution, accidental risk, ageing risk.

Summary

In constructing a lifetime model of any technical system, sometimes the traditionally used Weibull distribution is biased. In consequence, parameter estimation can be fatal. In this situation, it is not possible to find a good fitting function that characterises the system lifetime. Here all possible risks of the system are divided into two types: accidental and ageing risks. The accidental risk has an exponential distribution, and the ageing risk has a Weibull distribution. In this paper, a three parameters model of the system lifetime with both types of risks is presented. Modelling was performed by a simple competing risk distribution as a possible alternative to the Weibull distribution in lifetime analysis. This distribution corresponds to the minimum between the family of exponential and family of Weibull distributions. Our motivation was to take account of both accidental and ageing risks in lifetime data analysis. For this purpose, we introduced a three-parameter model, where such functions as hazard function, survival function, and density function are presented. Then, such characteristics as the expected value and variance of the modelled system lifetime are considered. Finally, the problem of choosing between an exponential, Weibull, or the introduced competing risk model is discussed.