

Marian Szarycz, Eugeniusz Kamiński, Kamil Jałoszyński
Instytut Inżynierii Rolniczej
Akademia Rolnicza we Wrocławiu

MATEMATYCZNE MODELOWANIE PROCESU SUSZENIA W NIERUCHOMYM ZŁOŻU. CZĘŚĆ I. MODEL MATEMATYCZNY

Streszczenie

W pracy sformułowano model matematyczny suszenia rozdrobnionego materiału roślinnego w nieruchomym złożu w oparciu o równania bilansowe ciepła i masy. Pozwala on na symulację komputerową procesu i obliczanie wilgotności i temperatury suszonego materiału i powietrza w dowolnej chwili.

Słowa kluczowe: model matematyczny, suszenie w nieruchomym złożu

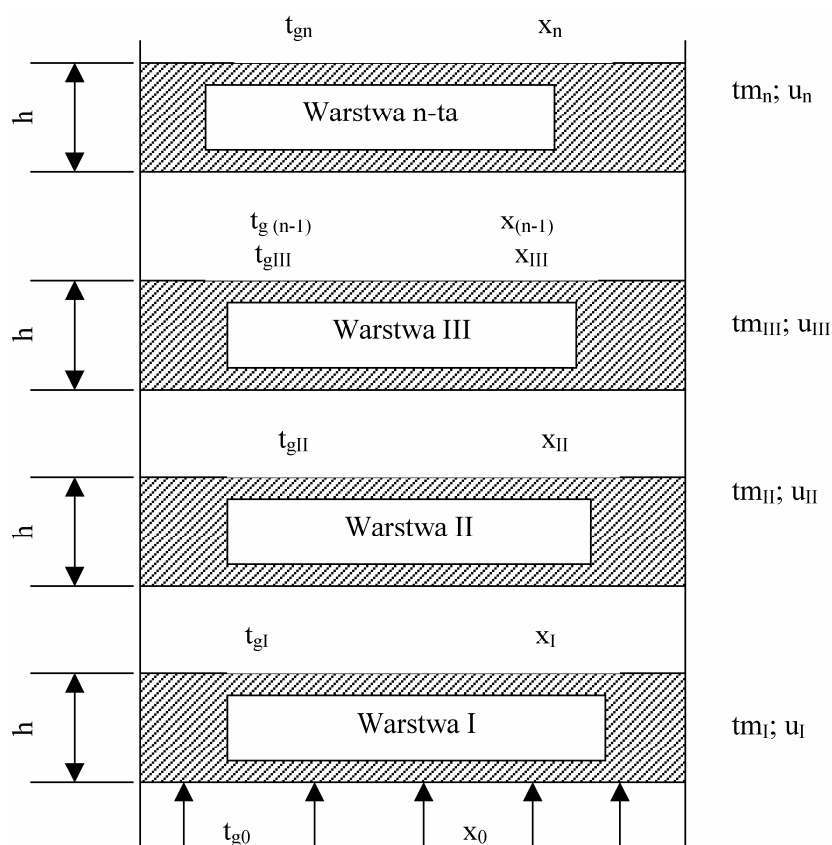
Wstęp

Suszenie w grubym nieruchomym złożu, jakkolwiek proste pod względem technicznym i technologicznym jest skomplikowane w opisie matematycznym transportu ciepła i masy. Wynika to z faktu, że odbywa się ono w niestacjonarnym polu temperatur oraz wilgotności w suszonym złożu, a także przy zmieniającej się w czasie temperaturze i wilgotności czynnika suszącego, co powoduje zróżnicowanie rozkładu temperatur i wilgotności suszonego materiału wzdłuż wysokości warstwy. Przy niekorzystnych warunkach suszenia (niewłaściwa temperatura i wilgotność względna czynnika suszącego, jego prędkość przepływu, wysokość warstwy) występuje nie tylko nierównomierność suszenia, ale może wystąpić również nawilgacanie warstw górnych na skutek skraplania pary wodnej z nasyconego i oziębionego powietrza.

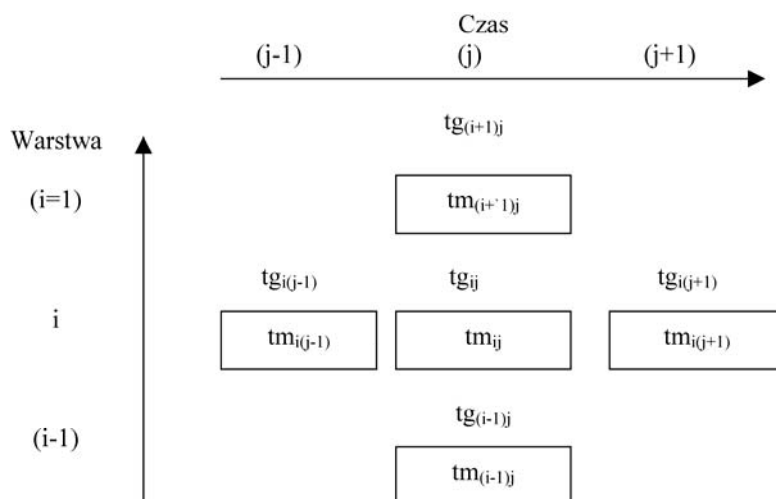
Dlatego prognozowanie rozkładu temperatur i wilgotności w suszonej warstwie, a także parametrów przepływającego czynnika suszącego może być istotnym elementem przy symulacji komputerowej procesu.

Semantyczny model suszenia w nieruchomym złożu

Na rysunku 1 zaproponowano semantyczny (przyczynowo – skutkowy) model suszenia w grubym nieruchomym złożu. Całą wysokość podzielono na n warstw elementarnych o grubości h równej wymiarowi charakterystycznemu cząstek złoża (średnica zastępcza). W takiej warstwie elementarnej warunki suszenia są jednako-
kowe dla wszystkich cząstek i według przyjętego założenia są równe warunkom suszenia pojedynczego elementu. Poszczególne warstwy elementarne „rozsunięto” w ten sposób, aby parametry czynnika wychodzącego z warstwy były parametrami wejściowymi dla warstwy następnej. Proces analizowano w m krokach czasowych. Algorytm obliczeń przedstawia rysunek 2.



Rys. 1. Schemat ideowy suszenia w nieruchomej warstwie
 Fig. 1. Schematic diagram for drying in a fixed layer



Rys. 2. Algorytm obliczeń
Fig. 2. Calculations algorithm

Bilans transportu ciepła i masy w trakcie suszenia

Model bazuje na równaniach bilansowych ciepła i masy (wilgotności) w dynamicznym procesie suszenia:

- Elementarne ciepło dostarczone przez czynnik suszący do elementarnej warstwy dq_d jest wykorzystane na podniesienie jej temperatury dq_t oraz na odparowanie wody dq_r .

$$dq_d = dq_t + dq_r \quad (1)$$

- Ciepło pochłonięte przez warstwę elementarną jest równe ubytkowi entalpii czynnika suszącego di_g

$$di_g = dq_d \quad (2)$$

- Przyrost zawartości wody w powietrzu dx_g jest równy jej ubytkowi w warstwie

$$dx_g = \frac{M_s}{M_p} du \quad (3)$$

gdzie:

- M_s – sucha substancja elementarnej warstwy,
- M_p – masa początkowa warstwy,
- du – elementarna zmiana zawartości wody warstwy.

Formułowanie modelu i równania pomocnicze

$$dq_d = -F \cdot v_g \cdot \zeta_g \cdot c_g \cdot dtg \quad (4)$$

gdzie:

- F – powierzchnia suszarki,
- v_g – prędkość przepływu czynnika suszającego,
- ζ_g – gęstość czynnika suszającego,
- c_g – ciepło właściwe czynnika suszającego,
- dtg – zmiana temperatury powietrza przez elementarną warstwę w czasie kroku czasowego j.

skąd:

$$dtg = \frac{-dq_d}{F \cdot v_g \cdot \zeta_g \cdot c_g} \quad (5)$$

Ciepło zużyte na nagrzanie materiału określa równanie:

$$dq_t = V \cdot \zeta_m \cdot c_m \cdot dtm \quad (6)$$

gdzie:

- V – elementarna objętość,
- ζ_m – gęstość materiału,
- c_m – ciepło właściwe materiału,
- dtm – zmiana temperatury materiału w elementarnej objętości w złożu.

Elementarny przyrost temperatury materiału (z równania 6) wyraża się zależnością:

$$dtm = \frac{dq_t}{V \cdot \zeta_m \cdot c_m} \quad (7)$$

Różnica między temperaturą gazu a materiału wynosi:

$$\Delta t = tg_{|i-1|j} - tm_{ij} \quad (8)$$

przechodząc do różniczkowania otrzymujemy:

$$d\Delta t = dtg - dtm \quad (9)$$

podstawiając do ostatniego równania zależności (5) i (7) otrzymujemy:

$$d\Delta t = \frac{-dq_d}{F \cdot v_g \cdot \zeta_g \cdot c_g} + \frac{dq_t}{V \cdot \zeta_m \cdot c_m} \quad (10)$$

wprowadzając współczynnik wykorzystania ciepła na nagrzanie Ψ

$$\Psi = \frac{dq_t}{dq_d} \leq 1 \rightarrow dq_t = \Psi dq_d \quad (11)$$

i wstawiając zależności (11) do równania (10) otrzymujemy:

$$d\Delta t = -dq_d \left[\frac{1}{F \cdot v_g \cdot \zeta_g \cdot c_g} - \Psi \frac{1}{V \cdot \zeta_m \cdot c_m} \right] \quad (12)$$

lub oznaczając wyrażenie w nawiasie przez m

$$d\Delta t = -dq_d \cdot m \quad (13)$$

Ilość (strumień) dostarczonego ciepła wyraża równanie:

$$dq_d = (a\alpha) \cdot F \cdot \Delta t \cdot dh \quad (14)$$

Objęściowy współczynnik przyjmowania ciepła ($a\alpha$) obliczano z zależności zaproponowanej w literaturze przedmiotu (IHVE 1970)

$$(a\alpha) = a \cdot 1,36 m_p^{0,59} \left\{ \frac{0,0006 \cdot (1,72 + 0,00463 \cdot t_g)}{d_e} \right\}^{0,41} \quad (15)$$

gdzie:

- m_g – masowe natężenie przepływu gazu [kg/s],
- a – stosunek powierzchni nasion do ich objętości.

podstawiając równanie (14) do (13) i dzieląc przez Δt otrzymujemy:

$$\frac{d\Delta t}{\Delta t} = -(a\alpha) \cdot F \cdot m \cdot dh \quad (16)$$

całkując powyższe równanie

$$\int_{\Delta t_0}^{\Delta t} \frac{d\Delta t}{\Delta t} = -(a\alpha) \cdot F \cdot m \int_0^h dh \quad (17)$$

otrzymuje się:

$$\frac{\Delta t}{\Delta t_0} = \exp\{-(a\alpha) \cdot F \cdot m \cdot h\} \quad (18)$$

Z równania (13) wynika, że

$$dq_d = \frac{d\Delta t}{m} \quad (19)$$

Wstawiając tę zależność do równania (5) otrzymuje się:

$$dtg = \frac{d\Delta t}{F \cdot v_g \cdot \zeta_g \cdot c_g \cdot m} \quad (20)$$

Równanie (18) można zapisać w postaci:

$$\Delta t = \Delta t_0 \cdot \exp\{-(a\alpha) \cdot F \cdot m \cdot h\} \quad (21)$$

Po różniczkowaniu względem zmiennej h otrzymujemy:

$$d\Delta t = \Delta t_0 \cdot \exp\{-(a\alpha) \cdot F \cdot m \cdot h\} F(-a\alpha) \cdot m \cdot dh \quad (22)$$

Wstawiając różniczkę $d\Delta t$ z równania (22) do (20) i porządkując otrzymuje się:

$$dtg = \frac{\Delta t_0 \cdot F(-a\alpha) \cdot m \exp\{-(a\alpha) \cdot F \cdot m \cdot h\}}{F \cdot v_g \cdot \zeta_g \cdot c_g \cdot m} dh \quad (23)$$

Scałkowanie ostatniego równania pozwoli na określenie temperatury gazu:

$$\int_{tg_{ij}}^{tg_{s_{i|j-1}}} dtg = \frac{\Delta t_0 \cdot F(-a\alpha) \cdot m \exp\{-(a\alpha) \cdot F \cdot m \cdot h\}}{F \cdot v_g \cdot \zeta_g \cdot c_g \cdot m} \int_0^h dh \quad (24)$$

Z lewej strony zmieniono granice całkowania ze względu na ujemny przyrost temperatury. Rozwiązaniem całki jest równanie

$$tg_{ij} = tg_{i|j-1} - \frac{\Delta t_0 \cdot \exp\{-(a\alpha) \cdot F \cdot m \cdot h\}}{F \cdot v_g \cdot \zeta_g \cdot c_g \cdot m} \Big|_0^h \quad (25)$$

Wstawiając za $\Delta t_0 = tg_{i|j-1}$ oraz granice całkowania po wysokości otrzymujemy:

$$tg_{ij} = tg_{i|j-1} - \frac{tg_{j|i-1} - tm_{i|j-1}}{F \cdot v_g \cdot \zeta_g \cdot c_g \cdot m_{ij}} \left\{ 1 - \exp[(-a\alpha)F \cdot h \cdot m_{ij}] \right\} \quad (26)$$

gdzie:

$$m_{ij} = \frac{1}{F \cdot v_g \cdot \zeta_g \cdot c_g} - \Psi_{ij} \frac{1}{V \cdot \zeta_m \cdot c_m} \quad (27)$$

$$\Psi_{ij} = \frac{M \cdot c_m [tl_{ij} - tm_{i|j-1}|]}{M \cdot c_m [tl_{ij} - tm_{i|j-1}|] + M_s \cdot \Delta u_{ij} \cdot F} \quad (28)$$

gdzie:

- M – masa elementarnej objętości,
- M_s – sucha masa elementarnej objętości,
- tl_{ij} – temperatura materiału bez uwzględnienia parowania (z bilansu uproszczonego):

$$tl_{ij} = tg_{i|j-1}| - [tg_{j|i-1}| - tm_{i|j-1}|] \exp\left(-\frac{6 \cdot \alpha}{c_m \cdot \zeta_m \cdot d_e}\right) \quad (29)$$

a temperatura materiału:

$$tm_{ij} = tg_{i|j-1}| + [tg_{j|i-1}| - tg_{ij}|] \Psi_{ij} \frac{F \cdot v_g \cdot \zeta_g \cdot c_g}{M \cdot c_m} \quad (30)$$

Zawartość wody w powietrzu nad i-tą warstwą oblicza się z zależności:

$$x_{ij} = x_{j|i-1}| + \frac{\Delta u_{ij} \frac{M_s}{\Delta \tau}}{v_g \cdot \zeta_g \cdot F} \quad (31)$$

Model zakłada, że jeżeli wilgotność względna czynnika suszącego ϕ_{ij} przekroczy 90% należy ponownie obliczyć zawartość wody w powietrzu według równania, gdyż wtedy nie obowiązują równania suszenia materiału w cienkiej warstwie (możliwość nawilżania):

$$x_{ij} = x'_{ij} = \frac{0,9 \cdot 0,622 \cdot Ps_{ij}}{P_{AT} - 0,9 \cdot Ps_{ij}} \quad (32)$$

$$P_s = 100 \cdot \exp\left\{72,74 - 8,2 \ln(t_g + 273) + 0,00571(t_g + 273) - \frac{7235}{t_g + 273}\right\} [Pa] \quad (33)$$

[Kaleta 1993].

Zmianę zawartości wody w materiale oblicza się z bilansu wymiany masy między materiałem a powietrzem:

$$\Delta u_{ij} = \Delta u'_{ij} = \frac{x_{ij} - x_{j|i-1}}{\frac{M_s}{\Delta \tau}} \cdot F \cdot v_g \cdot \zeta_g \quad (34)$$

Wielkość ubytku wilgoci Δu_{ij} w czasie $\Delta \tau$ otrzymuje się z empirycznego równania cienkiej warstwy materiału [Pabis 1965; Pabis i in. 1998; Srivastawa, Jon 2002]

$$U_{red} = \frac{u(\tau) - u_r}{u_0 - u_r} \quad (35)$$

$$u(\tau) = U_{red}(u_0 - u_r) + u_r \quad (36)$$

$$U_{red} = Ae^{-K\tau} \quad (37)$$

Jeżeli występuje jedynie II okres suszenia:

$$u_{ij} = u_{(i-1)j} - Ae^{-K_{ij}\Delta\tau}(u_0 - u_{r_{ij}}) + u_{r_{ij}} \quad (38)$$

Współczynnik suszarniczy zależy od temperatury gazu i wilgotności względnej powietrza (dla przyjętej jego prędkości):

$$K = f(t_g, \varphi_g) \quad (39)$$

Równowagowa zawartość wody jest zależna od temperatury i wilgotności gazu:

$$u_r = f(t_g, \varphi_g) \quad (40)$$

Podsumowanie

Zaproponowany dynamiczny model matematyczny suszenia rozdrobnionego złoża został sformułowany w oparciu o równania bilansu ciepła i masy czynnika suszącego i suszonego złoża, z uwzględnieniem równań opisujących transport wewnętrzny i zewnętrzny tych czynników. Pozwala on na obliczanie rozkładu wilgotności i temperatury w złożu i w powietrzu wzdłuż wysokości warstwy jako funkcje czasu suszenia.

Bibliografia

IHVE, Guide Book C. 1970. Londyn.

Kaleta A. 1993. Zbiór zadań z techniki cieplnej. Wyd. SGGW, Warszawa s. 86.

Pabis S. 1965. Suszenie płodów rolnych. PWRiL. Warszawa s. 79-89.

Pabis S., Jayas D.S., Cenkowski S. 1998. Grain drying theory and practice. Wiley, New York.

Srivastawa V.K., John J. 2002. Deep bed grain drying modeling. Energy conversion and management. Nr 43. s. 1689-1708.

**MATHEMATICAL MODELLING OF DRYING PROCESS
IN A FIXED BED.
PART 1. MATHEMATICAL MODEL**

Summary

The paper formulates mathematical model for drying shredded plant material in a fixed bed, based on heat and mass balance equations. The model allows to simulate the process using a computer, and to calculate humidity and temperature of dried material and air at any time.

Key words: mathematical model, deep-bed drying