

Zofia Hanusz\*, Magdalena Ćwiklińska\*, Zbigniew Siarkowski\*\*

\*Katedra Zastosowań Matematyki

\*\*Katedra Maszyn i Urządzeń Rolniczych  
Akademia Rolnicza w Lublinie

## OKREŚLANIE WIELOKRYTERIALNEJ FUNKCJI CELU PRZY DOBORZE ROZSIEWACZY NAWOZÓW MINERALNYCH

### Streszczenie

W pracy przedstawiono metodykę doboru postaci i parametrów równania trójwymiarowego opisującego zależność jednostkowych kosztów eksploatacji agregatu do nawożenia mineralnego od jego wydajności i czasu wykorzystania w ciągu roku. Pokazano różne metody poszukiwania analitycznej postaci funkcji oraz metody badania jakości dopasowania krzywej regresyjnej. Uzyskana zależność może być wykorzystywana przy podejmowaniu decyzji odnośnie sposobu wykonywania zabiegu nawożenia mineralnego w gospodarstwie prowadzącym produkcję zbóż.

**Słowa kluczowe:** funkcja celu, dobór parametrów, rozsiewacze, nawozy mineralne

### Wstęp

Zagadnienie określania analitycznej postaci funkcji celu jest zagadnieniem złożonym w przypadku braku dostatecznych przesłanek, co do kształtu szukanej zależności wynikających z interpretacji fizycznych badanego zjawiska. W takiej sytuacji badacz musi stosować różne próby, których zarys przedstawiono w pracach Siarkowski [2001], Hanusz, Siarkowski [2005]. W niniejszej pracy przedstawiono sposób postępowania prowadzący do uzyskania wielowymiarowej zależności opisującej jednostkowe koszty eksploatacji agregatów do nawożenia mineralnego [ $\text{zł} \cdot \text{ha}^{-1}$ ] w zależności od jego wydajności [ $\text{ha} \cdot \text{h}^{-1}$ ] i rocznego wykorzystania [ $\text{h} \cdot \text{rok}^{-1}$ ]. Praca nie zawiera interpretacji fizycznej opracowanej zależności. Nie mniej jednak należy wspomnieć, że opracowana zależność może być wykorzystywana przy podejmowaniu decyzji odnośnie sposobu wykonania zabiegu nawożenia mineralnego w gospodarstwie prowadzącym produkcję zbóż.

## Cel pracy

Celem opracowania jest praktyczne zastosowanie metodyki postępowania przy doborze postaci i parametrów równania trójwymiarowego opisującego zależność jednostkowych kosztów eksploatacji agregatu do nawożenia mineralnego od jego wydajności i czasu wykorzystania w ciągu roku. Problem, jaki należy rozwiązać, polega na znalezieniu postaci funkcji oraz wyznaczeniu jej parametrów. Do jego rozwiązania wykorzystano metodę Gaussa-Newtona z programu *Statistica* [2001]. Pokazane zostaną różne podejścia do poszukiwania analitycznej postaci funkcji oraz metody sprawdzania jakości dopasowania krzywej regresyjnej.

## Dobór postaci funkcji regresyjnej

Obserwacje w postaci trójek  $(X, Y, Z)$  uzyskano na podstawie obliczeń przeprowadzonych przy wykorzystaniu bazy danych o rozsiewaczach nawozów, opracowanej w Akademii Rolniczej w Lublinie [Skwarcz, Marczuk 2005]. Zmienna  $Z$  określa jednostkowe koszty eksploatacji agregatów do nawożenia [ $\text{zł} \cdot \text{ha}^{-1}$ ],  $Y$  - wydajność agregatu [ $\text{ha} \cdot \text{ha}^{-1}$ ], natomiast  $X$  - wykorzystanie agregatu w okresie użytkowania [h]. W analizie rozpatrzono cztery wydajności oraz czternaście różnych wartości wykorzystania agregatu. Uzyskane wyniki dotyczą agregatów optymalnych z punktu widzenia jednostkowych kosztów eksploatacji w podanych klasach wydajności.

Jakość dopasowania funkcji określono w dwóch etapach:

Za rozwiązanie dopuszczalne przyjęto takie, dla którego zachodzi warunek:

$$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \hat{z}_i)^2} \leq 10^{-6},$$

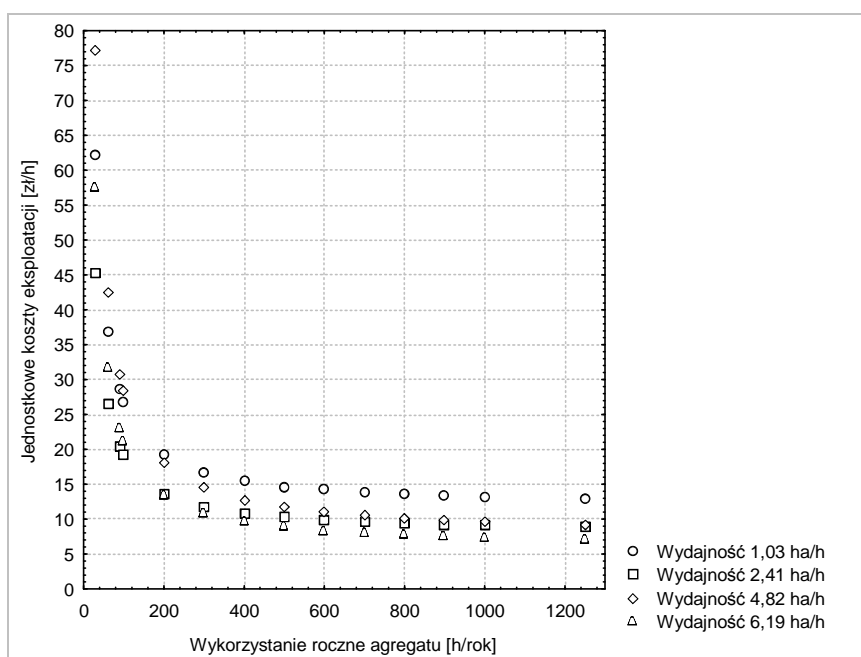
gdzie:

- $z_i$  – wartość obserwowana,
- $\hat{z}_i$  – wartość uzyskaną z funkcji regresyjnej ( $i = 1, 2, \dots, n$ )
- $n$  – liczba wszystkich obserwacji.

Spośród rozwiązań uzyskanych w etapie pierwszym jako najlepsze przyjmuje się rozwiązanie o największej wartości współczynnika determinacji  $R^2 = \sum_{i=1}^n (z_i - \hat{z}_i)^2$ .

Wartości jednostkowych kosztów eksploatacji [ $\text{zł} \cdot \text{ha}^{-1}$ ] w zależności od rocznego wykorzystania agregatów [ $\text{h} \cdot \text{rok}^{-1}$ ] dla czterech różnych wydajności agregatów do nawożenia mineralnego [ $\text{ha} \cdot \text{h}^{-1}$ ] przedstawiono na rys. 1. W oparciu o wykres punktów doświadczalnych, do opisu zależności można przyjąć dwie podstawowe możliwości określania zależności dwuwymiarowej:

- Doboru funkcji logarytmicznej lub pierwiastkowej z uwagi na duży zakres przyjmowanych wartości zmiennej  $X$  (rocznego wykorzystania agregatów).
- Doboru funkcji typu hiperbolicznego z uwagi na kształt wykresu, duże wartości zmiennej  $Z$  (kosztów eksploatacji) dla małych argumentów zmiennej  $X$  (rocznego wykorzystania agregatów) oraz małe wartości  $Z$  dla dużych wartości zmiennej  $X$ . Układ punktów przedstawiony na rys. 1. sugeruje istnienie asymptoty pionowej i poziomej. Takie asymptoty posiadają funkcje wymierne, w których stopień licznika jest nie większy od stopnia mianownika. Jedną z takich funkcji może być funkcja homograficzna, czyli funkcja będąca ilorazem dwóch funkcji liniowych.



Rys. 1. Jednostkowe koszty eksploatacji agregatów do nawożenia mineralnego w zależności od ich wydajności i rocznego wykorzystania

Fig. 1. Unitary running costs of mineral fertilization units depending on their performance and annual usage

Do znalezienia funkcji regresyjnej, w pierwszej kolejności rozpatrzono zależności dwuwymiarowe postaci  $Z = f(X)$ , wyrażające zależność kosztów eksploatacji agregatów od rocznego wykorzystania. Rozważono cztery postacie funkcji: logarytmiczną, wykładniczą, potęgową oraz hiperboliczną. Dla zależności logarytmicznej i wykładniczej postaci  $Z = a \ln(X)$  oraz  $Z = \exp(aX + b)$  uzyskano współczynniki determinacji zawierające się w przedziale  $[0,07; 0,57]$  a uzyskane funkcje opisywały zależność ze zbyt małą dokładnością. Wartości regresyjne wyraźnie odbiegały od wartości doświadczalnych.

Kolejną poszukiwaną funkcją do opisu zależności była funkcja potęgowa postaci:  $Z = aX^b$ . Dla rozważanych punktów doświadczalnych uzyskano zależność  $Z = 600X^{0,48}$  ze współczynnikiem determinacji  $R^2 = 0,94$  dla wydajności agregatu  $1,03 \text{ ha} \cdot \text{h}^{-1}$ . Podobne zależności uzyskano dla pozostałych trzech wydajności agregatów. Mimo wysokich współczynników determinacji dla zależności potęgowych wartości regresyjne także odbiegały od wartości obserwowanych.

Ostatnim podejściem było dopasowanie funkcji homograficznej postaci:

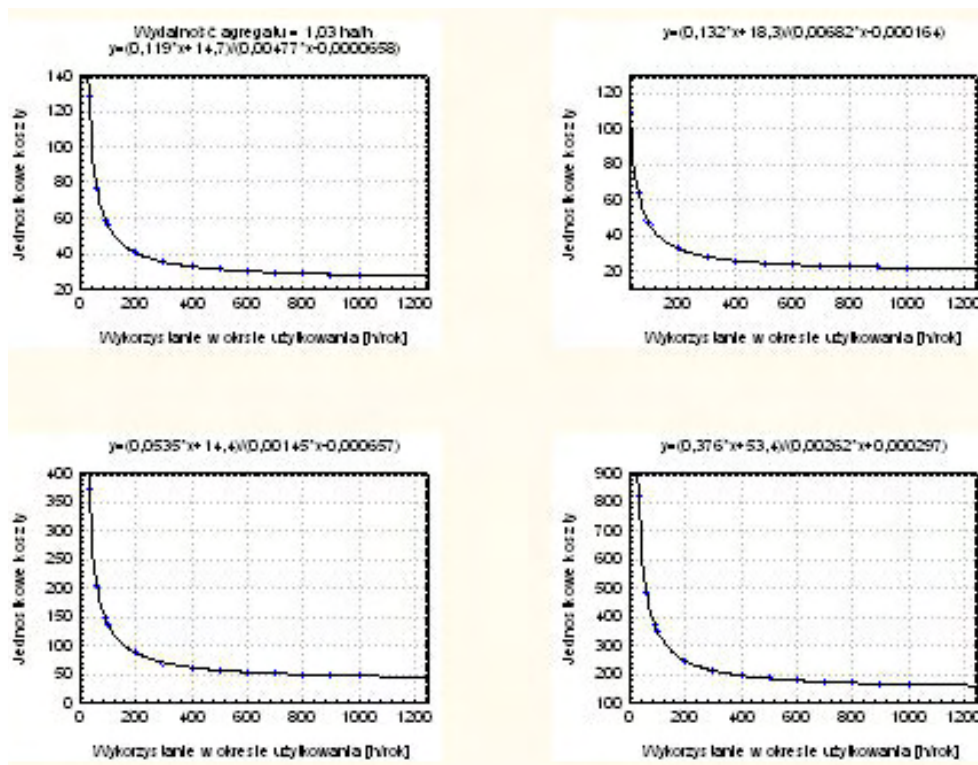
$$Z = \frac{aX + b}{cX + d}. \quad (1)$$

Dla czterech ustalonych wydajności agregatów, uzyskane współczynniki determinacji wynosiły około 0,99. Obraz graficzny funkcji przedstawiono na rys. 2.

Dla funkcji homograficznych przedstawionych na rys. 2. uzyskane wartości regresyjne różnią się od wartości doświadczalnej z wystarczającą dokładnością, co obrazuje położenie punktów doświadczalnych na wszystkich rysunkach.

### **Uogólnienie zależności dwuwymiarowej do trójwymiarowej**

W celu podjęcia decyzji o sposobie uogólnienia zależności dwuwymiarowych, wyrażających zależności kosztów eksploatacji agregatów od rocznego wykorzystania dla różnych wydajności agregatów, na jedną zależność trójwymiarową w tabeli 1 przedstawiono wartości współczynników w równaniu regresji opisanej równaniem (1) dla czterech wydajności agregatów. Z analizy danych zawartych w tabeli 1 wynika brak jednolitego trendu zmian poszczególnych współczynników regresji. Spowodowane jest to tym, że agregat o wydajności  $2,41 \text{ ha} \cdot \text{h}^{-1}$  charakteryzuje się niższymi kosztami eksploatacji niż agregat o wydajności  $1,03 \text{ ha} \cdot \text{h}^{-1}$ .



Rys. 2. Jednostkowe koszty eksploatacji agregatów do nawożenia mineralnego w zależności od ich wykorzystania

Fig. 2. Unitary running costs of mineral fertilization units depending on their usage

Tabela 1. Wartości współczynników regresji równania (1) dla czterech wydajności agregatów do nawożenia mineralnego

Table 1. Values of regression factors of equation (1) for four efficiencies of mineral fertilization units

Wydajność $ha \cdot h^{-1}$	Parametr równania			
	$a$	$b$	$c$	$d$
1,03	0,1190	14,7	0,00477	-0,000658
2,41	0,1320	18,3	0,00682	-0,0001640
4,82	0,0535	14,4	0,00145	-0,0006570
6,19	0,3760	53,4	0,00262	-0,0002970

Przyjęto, zatem założenie, że poszczególne współczynniki regresji z równania (1) należy uzmiennić, wykorzystując do tego celu zależność wielomianową. Uzyskane równania regresji dla poszczególnych współczynników występujących w równaniu (1) oraz współczynniki determinacji przyjęły następujące postaci:

$$a(Y) = 0,0129 Y^3 - 0,108 Y^2 + 0,232 Y \quad R^2 = 0,99 \quad (2)$$

$$b(Y) = 1,43 Y^3 - 11,85 Y^2 + 27 Y \quad R^2 = 0,99 \quad (3)$$

$$c(Y) = 0,00255 Y^3 - 0,00278 Y^2 + 0,0078 Y \quad R^2 = 0,94 \quad (4)$$

$$d(Y) = 0,000184 Y^3 - 0,0015 Y^2 + 0,00145 Y \quad R^2 = 0,94 \quad (5)$$

gdzie  $Y$  oznacza wydajność agregatu do nawożenia mineralnego.

Po wstawieniu równań dla uzmiennionych współczynników (2)-(5) do równania (1) uzyskano szukaną funkcję opisującą jednostkowe koszty eksploatacji agregatu w zależności od wydajności i czasu wykorzystania w okresie użytkowania:

$$\hat{Z} = \frac{(0,0129 Y^3 - 0,108 Y^2 + 0,232 Y)X + 1,43 Y^3 - 11,85 Y^2 + 27 Y}{(0,00255 Y^3 - 0,00278 Y^2 + 0,0078 Y)X + 0,000184 Y^3 - 0,0015 Y^2 + 0,0015 Y}, \quad (6)$$

gdzie:

$X$  – wykorzystanie agregatu w okresie użytkowania,

$Y$  – wydajnością agregatu

$\hat{Z}$  – oszacowany koszt jednostkowy eksploatacji. Dla funkcji opisanej równaniem (6) współczynnik determinacji wynosi  $R^2 = 0,91$ , natomiast błąd średniokwadratowy dopasowania tym równaniem wynosi

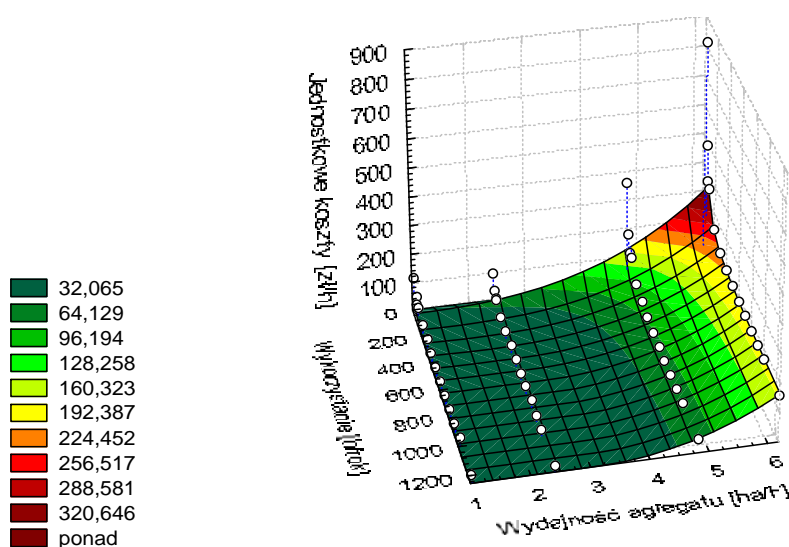
$$SSE = \frac{\sum_{i=1}^n (z_i - \hat{z}_i)^2}{n - k} = 23,8; \text{ gdzie } k = 12 \text{ jest liczbą wszystkich parametrów w równaniu.}$$

W innym podejściu, w którym poszukiwano zależności funkcyjnej kosztów jednostkowych eksploatacji agregatu od wydajności i czasu wykorzystania w okresie użytkowania na podstawie jednej postaci funkcji uzyskano:

$$\hat{Z} = \frac{0,0327 XY^3 - 0,122 XY^2 + 7,74 Y^2 + 52,7}{0,02 Y - 0,04}, \quad (7)$$

Zmienne  $X$  i  $Y$  mają takie same znaczenie jak w równaniu (6). Współczynnik determinacji dla funkcji (7) wynosi  $R^2 = 0,98$  natomiast błąd średniokwadratowy dopasowania  $SSE = 4,63$ .

Porównując błędy średniokwadratowe dopasowania można stwierdzić, że funkcja zadana równaniem (7) lepiej niż funkcja (6) opisuje ogólną zależność jednostkowych kosztów eksploatacji agregatów do nawożenia mineralnego od wydajności i czasu wykorzystania w okresie użytkowania zadana równaniem. Poza tym funkcja (7) przyjmuje prostszą postać. Wykres tej funkcji przedstawiono na rys. 3. Wartości regresyjne dla tej funkcji obarczone są mniejszymi błędami niż wartości regresyjne otrzymane na podstawie funkcji (6).



Rys. 3. Jednostkowe koszty eksploatacji agregatów do nawożenia mineralnego w zależności od ich wydajności i wykorzystania w okresie użytkowania

Fig. 3. Unitary running costs of mineral fertilization units depending on their efficiency and usage during their period of use

### Podsumowanie

W pracy określono postać i wartości parametrów funkcji opisującej jednostkowe koszty eksploatacji agregatów do nawożenia mineralnego w zależności od ich wydajności i ich wykorzystania w okresie użytkowania. Porównano różne metody postępowania w poszukiwaniu funkcji celu dla dwóch zmiennych objaśniających jedną zmienną objaśnianą. Dla danych eksperymentalnych rozważanych w pracy wykazano, że funkcja trójwymiarowa uzyskana w jednym postępowaniu optymalizacyjnym jest lepsza od funkcji uzyskanej poprzez uzmiennianie stałych w zależności dwuwymiarowej.

Można stwierdzić, że w sytuacji, w której jest możliwe określenie postaci funkcji oraz oszacowanie parametrów występujących w jej definicji wówczas jakość dopasowania będzie lepsza niż funkcji otrzymanej w wyniku uzmienniania stałych. Ponadto można także stwierdzić, że im więcej jest uzmiennianych parametrów w funkcji regresyjnej tym jakość dopasowania będzie gorsza. Wynika to z nakładania się błędów powstających w poszczególnych etapach postępowania.

### **Bibliografia**

Hanusz Z., Siarkowski Z. 2005. Określanie funkcji celu przy doborze maszyn rolniczych. *Inżynieria Rolnicza* nr 14(74), s. 135-145.

Siarkowski Z. 2001. Propozycje uogólniania funkcji jednej zmiennej na funkcje wielowymiarowe. *Inżynieria Rolnicza* nr 9(29) s. 109-117.

StatSoft, Inc. 2001. STATISTICA (data analysis software system), version 6. [www.statsoft.com](http://www.statsoft.com).

Skwarcz J., Marczuk A. 2005. The selection of machines for mineral fertilization. International Conference - Conference Proceedings Science and Research – Tools of Global Development Strategy Czech University of Agriculture Prague; Technical Faculty, Prague, s. 231-237.

## **DETERMINING MULTICRITERION OBJECTIVE FUNCTION WHEN SELECTING MINERAL FERTILIZER DISTRIBUTORS**

### **Summary**

The paper presents a methodology of selecting a form and parameters of the three-dimensional equation describing dependence of unitary running costs of the mineral fertilization unit from its performance and time of usage per year. Various methods of searching for an analytical form of the function and methods of testing the quality of regressive curve matching were shown. The derived dependence can be used when making decisions regarding a method of mineral fertilization procedure on a corn production farmstead.

**Key words:** objective function, parameter selection, distributors, mineral fertilizers