

Andrzej Graboś, Marek Boryga  
Akademia Rolnicza w Lublinie  
Katedra Podstaw Techniki

## MODYFIKACJA MACIERZOWEJ METODY KINEMATYKI W ZAKRESIE WYZNACZANIA PRĘDKOŚCI

### Streszczenie

W pracy przedstawiono zależności opisujące prędkości liniowe środków połączeń ruchowych oraz środków mas ogniów dla otwartych łańcuchów kinematycznych. W przeciwieństwie do klasycznej metody macierzowej kinematyki, przedstawiona metoda nie wymaga różniczkowania względem czasu współrzędnych wektora położenia i stosowania operatorów różniczkowania. Weryfikację przedstawionych zależności przeprowadzono na dwóch przykładach.

**Słowa kluczowe:** metoda macierzowa, notacja Denavita-Hartenberga, współrzędne środka masy, prędkość liniowa, prędkość kątowa

### Wykaz oznaczeń

- $l_i, \lambda_i$  – długości poszczególnych ogniów, [m]  
 $s_i, c_i, s_{ij}, c_{ij}$  – oznaczenia funkcji trygonometrycznych sinus i cosinus kąta  $\theta_i$  oraz sumy kątów  $\theta_i$  i  $\theta_j$ ,  
 $x_{Si}, y_{Si}, z_{Si}$  – współrzędne środka masy ogniwa  $i$ , [m]  
 $(r_{Oi})_0$  – wektor położenia środka połączenia ruchowego ogniwa  $i-1$  z  $i$ ,  
 $(r_{Si})_0$  – wektor położenia środka masy ogniwa  $i$ ,  
 $V_{Oi}$  – wektor prędkości liniowej środka połączenia ruchowego ogniwa  $i-1$  z  $i$ ,  
 $V_{Si}$  – wektor prędkości liniowej środka masy ogniwa  $i$ ,  
 $\omega_i$  – wektor prędkości kątowej ogniwa  $i$  względem układu współrzędnych podstawy.

## Wprowadzenie

Układy nośne rolniczych maszyn manipulacyjnych są otwartymi łańcuchami kinematycznymi, składającymi się ze zbioru sztywnych członów połączonych w pary kinematyczne. W opisie matematycznym kinematyki tego rodzaju obiektów wykorzystywane są najczęściej następujące metody:

- metoda macierzowa,
- metoda wektorowa,
- metoda układów wieloczłonowych.

Macierzowa metoda analizy kinematyki polega na przekształceniach układów współrzędnych (przy wykorzystaniu współrzędnych jednorodnych) związanych z poszczególnymi ogniwami. Przy wiązaniu układów współrzędnych z członami wykorzystuje się notację Denavita-Hartenberga [Craig 1989]. Do obliczeń wektorów położenia dowolnego punktu należącego do ruchomego członu wykorzystuje się macierze przekształceń i wektor położenia tego punktu w układzie związanym z tym członem. Prędkości i przyspieszenia liniowe oblicza się w oparciu o wzory rekurencyjne przy użyciu operatorów różniczkowania lub poprzez różniczkowanie analityczne wektora położenia. Prędkości i przyspieszenia kątowe liczy się także przy użyciu wzorów rekurencyjnych.

W metodzie wektorowej względne usytuowanie osi par kinematycznych i położenie członów łańcucha kinematycznego opisuje się za pomocą iloczynów skalarnych i wektorowych, przy czym podobnie jak w metodzie macierzowej wykorzystuje się wymiarowanie obiektu przy użyciu współrzędnych Denavita-Hartenberga. Wykorzystuje się ponadto równanie trzech wersorów Chace'a oraz równanie zamknięcia łańcucha kinematycznego [Morecki i in. 2002].

W metodach układów wieloczłonowych (multibody systems) rozwiązanie zadania na położenia dokonuje się poprzez rozwiązanie numeryczne układu równań nieliniowych złożonych z równań więzów wynikających z zależności geometrycznych pomiędzy współrzędnymi uogólnionymi opisującymi sąsiednie człony i równań kierujących wynikających z zależności określających zadanie kinematyki (proste lub odwrotne). Równanie dla prędkości i przyspieszenia otrzymuje się poprzez różniczkowanie jedno- i dwukrotne ww. równań.

## Cel i zakres pracy

Celem pracy jest wyprowadzenie i weryfikacja zależności umożliwiających określenie prędkości środków połączeń ruchowych oraz prędkości środków mas ogniw bez konieczności różniczkowania względem czasu wektora położenia oraz stosowania operatora różniczkowania. Wyprowadzone zależności zostały zweryfi-

kowane na przykładzie dwóch łańcuchów kinematycznych, z których w pierwszym osie par kinematycznych były równoległe, zaś w drugim prostopadłe. W opracowanej metodzie przyjęto następujące założenia:

- w łańcuchu kinematycznym występują wyłącznie pary obrotowe,
- wzajemne usytuowanie osi par jest równoległe lub prostopadłe,
- położenie środków mas ogniw jest dowolne, tzn. żadna ze współrzędnych środka masy w układzie związanym z ogniwnem nie jest równa zeru.

## Metodyka

Dokonując analizy kinematyki otwartych łańcuchów kinematycznych wprowadza się macierz orientacji i położenia układu współrzędnych związanego z ogniwnem względem układu związanego z podstawą jako iloczyn kolejnych macierzy przekształceń

$$T_{i0} = A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_i \quad (1)$$

Gdy dany jest wektor opisujący położenia środka masy  $S_i$  ogniwa  $i$  w układzie współrzędnych związanym z tym członem oraz dane są macierze kolejnych przekształceń, wtedy można wyznaczyć wektor  $(r_{S_i})_0$  opisujący położenie punktu  $S_i$  w układzie podstawy

$$(r_{S_i})_0 = T_{i0} \cdot (r_{S_i})_i \quad (2)$$

Wektory prędkości kątowej członów względem układu związanego z podstawą można wyznaczyć z równania

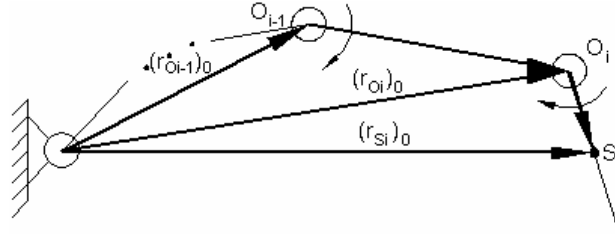
$$\omega_i = \omega_{10} + A_1 \cdot \omega_{21} + A_1 \cdot A_2 \cdot \omega_{32} + \dots + A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_{i-1} \cdot \omega_{i,i-1} \quad (3)$$

przy czym prędkość względna ogniwa  $\omega_{i,i-1} = [0 \quad 0 \quad \dot{\theta}_i \quad 0]^T$

Współrzędne wektorów prędkości kątowych członów względem chwilowo unieruchomionych układów współrzędnych, których początki leżą w środkach mas ogniw można obliczyć z zależności

$$(\omega_i)_i = T_{i0}^{-1} \cdot \omega_i \quad (4)$$

Powyższe zależności są wykorzystywane zarówno w klasycznej metodzie macierzowej, jak i w metodzie zmodyfikowanej. W klasycznej metodzie macierzowej przeprowadza się następnie różniczkowanie względem czasu wektorów położenia (2), lub wykorzystuje operator różniczkowania. W metodzie zmodyfikowanej wyznacza się natomiast prędkości środków połączeń ruchowych. Wykorzystuje się przy tym zasady określania prędkości w ruchu względnym (rys. 1).



Rys. 1. Otwarty łańcuch kinematyczny

Fig. 1. Open kinematic chain

$$V_{O_i} = \sum_{i=1}^k \omega_i \times [(r_{O_i})_0 - (r_{O_{i-1}})_0] \quad (5)$$

Jednocześnie wykorzystując zdobyte doświadczenia w zakresie stosowania macierzowej metody kinematyki zauważono, że różnicę wektorów położenia środków par kinematycznych występującą w zależności (5) można przedstawić jako różnicę ostatnich kolumn w macierzach orientacji i położenia.

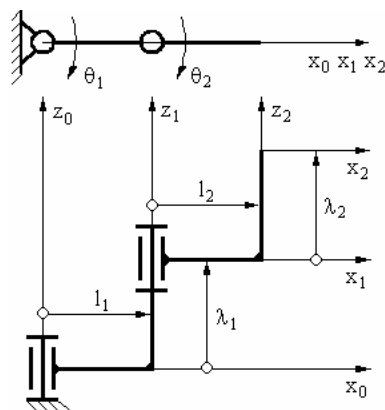
Analogicznie określono zależności na prędkości środków mas ogniw

$$V_{S_i} = \omega_i \times [(r_{S_i})_0 - (r_{O_{i-1}})_0] + V_{O_{i-1}}, \quad i = 1, \dots, k \quad (6)$$

Przedstawione zależności wykorzystuje się w dalszym etapie do obliczeń energii kinetycznej ruchu obrotowego i postępowego ogniw i energii potencjalnej.

### Wyniki badań i ich analiza

Przedstawione zależności (wzory nr 5 i 6) zweryfikowano na dwóch przykładach. W pierwszym przykładzie analizie poddano otwarty łańcuch kinematyczny, w którym osie par są równoległe (rys. 2).



Rys. 2. Łańcuch kinematyczny z parami o osiach równoległych

Fig. 2. Kinematic chain with pairs with parallel axes

Macierze przekształceń  $A_i$  mają postać:

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & l_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & l_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Przy założeniu dowolnego położenia środków mas ogniw  $S_1$  i  $S_2$  wektory położenia w układach związanych z członami mają postać:

$$(r_{S_1})_1 = [x_{S_1} \quad y_{S_1} \quad z_{S_1} \quad 1], \quad (r_{S_2})_2 = [x_{S_2} \quad y_{S_2} \quad z_{S_2} \quad 1] \quad (8)$$

Wektory położenia środków mas w układzie podstawy wynoszą:

$$(r_{S_1})_0 = \begin{bmatrix} (l_1 + x_{S_1})c_1 - y_{S_1}s_1 \\ (l_1 + x_{S_1})s_1 + y_{S_1}c_1 \\ z_{S_1} + \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (r_{S_2})_0 = \begin{bmatrix} (l_2 + x_{S_2})c_{12} - y_{S_2}s_{12} + l_1 c_1 \\ (l_2 + x_{S_2})s_{12} + y_{S_2}c_{12} + l_1 s_1 \\ z_{S_2} + \lambda_1 + \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Prędkości kątowe ogniw względem osi układu współrzędnych związanego z podstawą wynoszą:

$$\omega_1 = [0 \quad 0 \quad \dot{\theta}_1 \quad 0]^T, \quad \omega_2 = [0 \quad 0 \quad \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \quad 0]^T \quad (10)$$

Wykorzystując opracowane zależności (5) uzyskano prędkości środków połączeń ruchowych:

$$V_{O_1} = \omega_1 \times [(r_{O_1})_0 - (r_{O_0})_0] J, \quad V_{O_1} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1 l_1 s_1 \\ \dot{\theta}_1 l_1 c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$V_{O_2} = V_{O_1} + \omega_2 \times [(r_{O_2})_0 - (r_{O_1})_0] J, \quad V_{O_2} = \begin{bmatrix} -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) l_2 s_{12} - \dot{\theta}_1 l_1 s_1 J \\ (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) l_2 c_{12} + \dot{\theta}_1 l_1 c_1 J \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Prędkości liniowe środków mas w układzie podstawy obliczone z zależności (6) wynoszą odpowiednio:

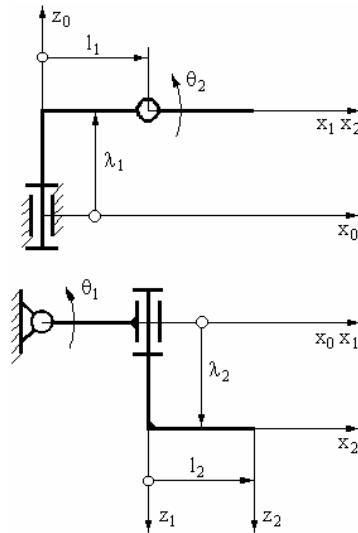
$$V_{S_1} = \omega_1 \times [(r_{S_1})_0 - (r_{O_0})_0] J + V_{O_0}, \quad V_{S_1} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1 [(l_1 + x_{S_1})s_1 + y_{S_1}c_1] J \\ \dot{\theta}_1 [(l_1 + x_{S_1})c_1 - y_{S_1}s_1] J \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$V_{S_2} = \omega_2 \times [(r_{S_2})_0 - (r_{O_1})_0] J + V_{O_1}$$

$$V_{S_2} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1 [(l_2 + x_{S_2})s_{12} + y_{S_2}c_{12} + l_1s_1] - \dot{\theta}_2 [(l_2 + x_{S_2})s_{12} + y_{S_2}c_{12}] \\ \dot{\theta}_1 [(l_2 + x_{S_2})c_{12} - y_{S_2}s_{12} + l_1c_1] + \dot{\theta}_2 [(l_2 + x_{S_2})c_{12} - y_{S_2}s_{12}] \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Identyczne zależności otrzymano poprzez różniczkowanie względem czasu współrzędnych wektorów położenia środków układów współrzędnych oraz wektorów położenia środków mas ogniw.

W drugim przykładzie analizie poddano otwarty łańcuch kinematyczny w którym osie par są prostopadłe (rys. 3)



Rys. 3. Łańcuch kinematyczny z parami o osiach prostopadłych  
Fig. 3. Kinematic chain with pairs with perpendicular axes

Macierze przekształceń  $A_i$  mają postać:

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & l_1c_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 & l_1s_1 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_2c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & l_2s_2 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Wektory położenia środków mas S1 i S2 w układach związanych z członami mają postać jak w zależnościach (wzory nr 8). Wektory położenia środków mas w analizowanym przykładzie wynoszą:

$$(r_{s1})_0 = A_1 \cdot (r_{s1})_1, \quad (r_{s1})_0 = \begin{bmatrix} (l_1 + x_{s1})c_1 + z_{s1}s_1 \\ (l_1 + x_{s1})s_1 - z_{s1}c_1 \\ y_{s1} + \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$(r_{s2})_0 = T_{20} \cdot (r_{s2})_2, \quad (r_{s2})_0 = \begin{bmatrix} (l_2 + x_{s2})c_1c_2 - y_{s2}c_1s_2 + (\lambda_2 + z_{s1})s_1 + l_1c_1 \\ (l_2 + x_{s2})s_1c_2 - y_{s2}s_1s_2 - (\lambda_2 + z_{s1})c_1 + l_1s_1 \\ (l_2 + x_{s2})s_2 + y_{s2}c_2 + \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Prędkości kątowe

$$\omega_1 = [0 \ 0 \ \dot{\theta}_1 \ 0]^T \quad \omega_2 = \omega_{10} + A_1 \cdot \omega_{21}, \quad \omega_2 = [s_1\dot{\theta}_2 \ -c_1\dot{\theta}_2 \ \dot{\theta}_1 \ 0]^T \quad (18)$$

Wykorzystując opracowane zależności (wzór nr 5) uzyskano:

$$V_{o1} = \omega_1 \times [ (r_{o1})_0 - (r_{o0})_0 ] J, \quad V_{o1} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1 l_1 s_1 \\ \dot{\theta}_1 l_1 c_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$V_{o2} = V_{o1} + \omega_2 \times [ (r_{o2})_0 - (r_{o1})_0 ] J,$$

$$V_{O2} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1 [(l_2 s_1 c_2 - \lambda_2 c_1 + l_1 s_1) - \dot{\theta}_1 l_2 c_1 s_2] \\ \dot{\theta}_1 [(l_2 c_1 c_2 + \lambda_2 s_1 + l_1 c_1) - \dot{\theta}_1 l_2 s_1 s_2] \\ \dot{\theta}_1 l_2 c_2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Prędkości liniowe środków mas w układzie podstawy obliczone z opracowanej zależności (wzór nr 6) wynoszą:

$$V_{s1} = \omega_1 \times [ (r_{s1})_0 - (r_{o0})_0 ] J + V_{o0}, \quad V_{s1} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1 [(l_1 + x_{s1})s_1 - z_{s1}c_1] \\ \dot{\theta}_1 [(l_1 + x_{s1})c_1 + z_{s1}s_1] \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$V_{s2} = \omega_2 \times [ (r_{s2})_0 - (r_{o1})_0 ] J + V_{o1} \quad (22)$$

$$V_{s_2} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_1[(l_2 + x_{s_2})s_1c_2 - y_{s_2}s_1s_2 - (\lambda_2 + z_{s_2})c_1 + l_1s_1] - c_1\dot{\theta}_2[(l_2 + x_{s_2})s_2 + y_{s_2}c_2] \\ \dot{\theta}_1[(l_2 + x_{s_2})c_1c_2 - y_{s_2}c_1s_2 + (\lambda_2 + z_{s_2})s_1 + l_1c_1] - s_1\dot{\theta}_2[(l_2 + x_{s_2})s_2 + y_{s_2}c_2] \\ \dot{\theta}_2[(l_2 + x_{s_2})c_2 - y_{s_2}s_2] \end{bmatrix}$$

Identyczne zależności otrzymano poprzez różniczkowanie względem czasu współrzędnych wektorów położenia środków układów współrzędnych oraz wektorów położenia środków mas.

### Wnioski

1. Weryfikacja zaproponowanej metody, przeprowadzona na dwóch przykładach, potwierdziła poprawność podanych w pracy zależności na prędkości środków połączeń ruchowych oraz środków mas ogniów.
2. Przedstawiona metoda nie wymaga przeprowadzania dodatkowych obliczeń w stosunku do klasycznej metody macierzowej, a jednocześnie eliminuje uciążliwy etap różniczkowania względem czasu wektorów położenia. Dzięki temu metoda ta może być wykorzystana przy opracowaniu autorskich programów do symbolicznego wyrowadzania równań prędkości.
3. Wstępnym etapem przy obliczaniu środków mas ogniów wg przedstawionej metody jest obliczenie środków połączeń ruchowych. Mogą one być wykorzystane w programach do animacji ruchu mechanizmu.

### Bibliografia

Craig J.J. 1989. Introduction to Robotics. Mechanics and Control. Addison-Wesley Publ. Comp.

Morecki A., Knapczyk J., Kędzior K. 2002. Teoria mechanizmów i manipulatorów, WNT, Warszawa.



## **MODIFICATION OF MATRIX METHOD OF KINEMATICS AS REGARDS DETERMINATION OF SPEED**

### **Summary**

The study presents relations describing the linear velocity of movement connection centres and link mass centres for open kinematic chains. Contrary to the classical method of matrix kinematics, the presented method does not require differentiation against time of coordinates of position vector and applying differential operators. The verification of the presented relation was made on two examples.

**Key words:** matrix method, Denavit-Hartenberg notation, centre of mass coordinates, linear velocity, angular velocity