# PRÓBKOWANIE SYGNAŁÓW DIAGNOSTYCZNYCH CZĘŚĆ V PRÓBKOWANIE SYGNAŁÓW O NIEOGRANICZONYM PAŚMIE ZA POMOCĄ NIEKLASYCZNYCH JĄDER

Zenon SYROKA
Uniwersytet Warmińsko – Mazurski, Wydział Nauk Technicznych
ul. Oczapowskiego 11, 10 –717 Olsztyn

Streszczenie
W pracy przedstawiono matematyczny opis próbkowania sygnałów diagnostycznych posiadających nieograniczone pasmo przy pomocy nieklasycznych jąder oraz próbkowania sygnałów określonych na zbiorach mierzalnych.

Słowa kluczowe: próbkowanie sygnałów, przestrzenie sygnałów, twierdzenie Shanona, zbiory mierzalne jądra reprodukujące.

SAMPLING OF THE DIAGNOSTIC SIGNALS
PART V
SIGNAL SAMPLING WITH INFINITE FREQUENCY BAND USING NON CLASICAL KERNELS

Summary
In this article is presented mathematical description of diagnostic signals sampling with infinite frequency band using non clasical kernels and sampling of signals defined on measurment sets.

Keywords: sampling signals, signals space, Shanon theorem,. measure sets reproducing kernel.

## 1. WPROWADZENIE

Istnieje bardzo duża grupa sygnałów diagnostycznych, która w dziedzinie czasu posiada informację zawartą w kształcie sygnału. Istotne są załamania, ostre wierzchołki, szybkie zmiany amplitudy i fazy. Takie zachowanie się sygnału w czasie powoduje, iż sygnał w dziedzinie częstotliwości posiada bardzo szerokie pasmo, teoretycznie nieskończone. Należy się zastanowić czy próbkować sygnał w dziedzinie czasu a później transformować go do dziedziny częstotliwości czy też postępować odwrotnie.

W pracy przedstawione zostaną podstawy matematycznego podejścia do rozwiązania tych problemów.

## 2. PRÓBKOWANIE SYGNAŁÓW O NIEOGRANICZONYM PAŚMIE

Określimy na początku **twierdzenie Shannona –Nyquista w euklidesowej n-wymiarowej przestrzeni $R^n$.**

Jeżeli sygnał $s(t)$ spełnia warunek:

$$s(t) \in L^2(R^n) \cap C(R^n), \tag{1}$$

i jego transformata Fouriera jest ograniczona w n- wymiarowym przedziale:

$$[-\Pi B, +\Pi B], \tag{2}$$

dla pewnego $B \in R^n$, $B_j > 0$, j = 1, 2, 3, ..., n, wtedy sygnał może być całkowicie odtworzony z próbek w punktach $\frac{k}{B}$, $k \in Z^n$, w następującej postaci:

$$s(t) = \sum_{k \in Z^n} s\left(\frac{k}{B}\right) \prod_{j=1}^{n} \operatorname{sinc}(B_j t_j - k_j), \quad (t \in R^n). \tag{3}$$

Powyższy szereg jest absolutnie i jednostajnie zbieżny.

Pojawia się pytanie, czy możliwe jest odtworzenie sygnału z jego próbek gdy szerokość pasma dąży do nieskończoności. Zapiszemy ten warunek w postaci:

$$s(t) = \lim_{B \to \infty} \sum_{k \in Z^n} s\left(\frac{k}{B}\right) \prod_{j=1}^{n} \operatorname{sinc}(B_j t_j - k_j) \quad (t \in R^n) \tag{4}$$

Ciągłość sygnału nie wystarcza, potrzebne są jeszcze inne ograniczające warunki.

Należy się zastanowić, czy istnieje sygnał $\varphi : R^n \to C$ dla, którego będzie spełniona zależność:

$$s(t) = \lim_{B\to\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{2\Pi}\right)^n} \sum_{k\in Z^n} s\left(\frac{k}{B}\right)\varphi(Bt-k),$$
$$\left(t \in R^n\right), \tag{5}$$

dla każdego ciągłego sygnału.

Warunkiem koniecznym i wystarczającym aby powyższy szereg był absolutnie i jednostajnie zbieżny na zwartych podzbiorach $R^n$ jest:

$$\sum_{k\in Z^n} \varphi(t-k) = (2\Pi)^{n/2}. \tag{6}$$

W tym przypadku , funkcja $\varphi : R^n \to C$ nazywana jest **jądrem**.

Szereg (5) jest dyskretnym splotem sygnału $s(t)$ i jądra $\varphi$. Klasycznym przykładem jądra [1] jest:

$$\varphi(t) := \sqrt{2\Pi}\left(1-|t|\right), t \in (-1,1). \tag{7}$$

Wprowadzimy pojęcie **uogólnionego szeregu próbkującego**, określonego w następujący sposób [1]:

$$\left(S_B^\varphi s\right)(t) := \frac{1}{\left(\sqrt{2\Pi}\right)^n} \sum_{k\in Z^n} s\left(\frac{k}{B}\right)\varphi(Bt-k), \tag{8}$$

oraz **uogólnionej całki splotowej**:

$$\left(I_B^\varphi s\right)(t) := \frac{\prod_{j=1}^{n} B_j}{\left(\sqrt{2\Pi}\right)^n} \int_{R^n} s(u)\varphi(B(t-u))du,$$
$$\left(t \in R^n; B \in R_+^n\right). \tag{9}$$

$I_B^\varphi$ jest ograniczonym, liniowym odwzorowaniem $C(R^n)$ w siebie, i spełnia warunki:

$$\left\|I_B^\varphi\right\|_{[C,C]} = \|\varphi\|_{L^1}, \qquad (B>0), \tag{10}$$

$$\lim_{B\to\infty}\left\|I_B^\varphi s - s\right\|_C = 0 , \left(s \in C\left(R^n\right)\right). \tag{11}$$

Określimy szczegółowe właściwości nieklasycznych jąder w przypadku nieograniczonego pasma.

Jeżeli $\varphi : R^n \to C$ jest ograniczoną funkcją taką, że szereg

$$\frac{1}{\left(\sqrt{2\Pi}\right)^n} \sum_{k\in Z^n} |\varphi(t-k)| < \infty, \left(t \in R^n\right), \tag{12}$$

jest absolutnie i jednostajnie zbieżny na zwartych podzbiorach $R^n$ i

$$\frac{1}{\left(\sqrt{2\Pi}\right)^n} \sum_{k\in Z^n} \varphi(t-k) = 1, \left(t \in R^n\right), \tag{13}$$

wtedy $\varphi$ jest nazywane **jądrem ( dla uogólnionych szeregów próbkujących)**

Moment rzędu $r \in N_0$ jądra wynosi:

$$m_r(\varphi) := \max_{|j|=r} \sup_{t\in R^n} \frac{1}{\left(\sqrt{2\Pi}\right)^n} \sum_{k\in Z^n} (t-k)^j \varphi(t-k) \tag{14}$$

Twierdzenie 1

*Jeżeli* $\varphi \in C(R^n)$ *jest jądrem, to spełnione są następujące warunki:.*

1. *Jeżeli* $s : R^n \to C$ *jest sygnałem ograniczonym na* $R^n$*, to*
$$\lim_{B\to\infty}\left(S_B^\varphi s\right)(t_0) = s(t_0) \tag{15}$$
*dla wszystkich punktów* $t_0 \in R^n$*, gdzie sygnał s jest ciągły.*
2. $\left\{S_B^\varphi\right\}_{B>0}$ *definiuje rodzinę ograniczonych, liniowych odwzorowań* $C(R^n)$ *w siebie, mających normę:*
$$\left\|S_B^\varphi\right\|_{[C,C]} = m_0(\varphi), \ (B>0), \tag{16}$$
*i spełniających*
$$\lim_{B\to\infty}\left\|S_B^\varphi s - s\right\|_C = 0,$$
$$\left(s \in C\left(R^n\right)\right). \tag{17}$$

**Dowód**

Jednostajna zbieżność szeregu (12) na zwartych zbiorach powoduje, iż

$$m_0(\varphi) < \infty, \tag{18}$$

stąd funkcja

$$\frac{1}{\left(\sqrt{2\Pi}\right)^n} \sum_{k\in Z^n} |\varphi(t-k)|, \tag{19}$$

jest okresowa.

Odnośnie części pierwszej, jeżeli s jest ciągłe w $t_0$, wtedy dla $\varepsilon > 0$ istnieje takie $\delta > 0$, że $|s(t) - s(t_0)| < \varepsilon$ dla każdego $t \in R^n$ spełniającego $-\delta < t - t_0 < \delta$.

Stąd:

$$\left(\sqrt{2\Pi}\right)^n \left|s(t_0) - \left(S_B^\varphi s\right)(t_0)\right| \le$$
$$\le \left\{\sum_{k\in S_1} + \sum_{k\in S_2}\right\} \left|s(t_0) - s\left(\frac{k}{B}\right)\right| \left|\varphi(Bt_0-k)\right|$$
$$\le \varepsilon\left(\sqrt{2\Pi}\right)^n m_0(\varphi) + 2\sup_{t\in R^n}|s(t)| \sum_{k\in S_2} \left|\varphi\left(Bt_{0-k}\right)\right| \tag{20}$$

gdzie

$$S_1 := \left\{k \in Z^n; -\delta B < Bt_0 - k < \delta B\right\}, \tag{21}$$

$S_2 := Z^n - S_1 = \{k \in Z^n$ istnieje najmniejsze

$$j \in \{1,...n\} \text{ z } \left|B_j t_{0_j} - k_j\right| \geq \delta B_j \ \}. \quad (22)$$

Należy pokazać, iż ostatnia suma (20) jest zbieżna do 0 dla $B \to \infty$. Z (12) wynika, iż dla każdego $1 \leq j \leq n$ jest spełniona zależność:

$$\sum_{k \in Z^n} |\varphi(t-k)| = \sum_{k_j=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{k_{[j]} \in Z^{n-1}} |\varphi(t-k)| \right\} < \infty, \quad (23)$$

gdzie:

$$k_{[j]} := (k_1, ..., k_{j-1}, k_{j+1}, ...k_n), \quad (24)$$

i stąd zbieżność jest jednostajna na zwartych podzbiorach $K_j \in N$. Spełniony jest warunek:

$$\sum_{|k_j| \geq K_j} \left\{ \sum_{[k_j] \in Z^{n-1}} |\varphi(t-k)| \right\} < \varepsilon \ , \left(t \in [0,1]^n\right). \quad (25)$$

Zbiór K jest określony w następujący sposób:

$$K := \max_{1 \leq j \leq n} \{K_j\}. \quad (26)$$

Możemy zapisać:

$$\sum_{k \in S_2} |\varphi(Bt_0 - k)| \leq \sum_{j=1}^{n} \left\{ \sum_{\left|B_j t_{0_j} - k_j\right| \geq \delta B_j} \ \sum_{k_{[j]} \in Z^{n-1}} |\varphi(Bt_0 - k)| \right\}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left\{ \sum_{\left|B_j t_{0_j} - k_j\right| \geq \delta B_j} \ \sum_{k_{[j]} \in Z^{n-1}} |\varphi(Bt_0 - \lfloor Bt_0 \rfloor - (k - \lfloor Bt_0 \rfloor))| \right\}$$

. (27)

Oznaczając:

$$m := k - \lfloor Bt_0 \rfloor \in Z^n, \quad (28)$$

mamy:

$$Bt_0 - \lfloor Bt_0 \rfloor \in [0,1]^n. \quad (29)$$

Stąd:

$$\sum_{k \in S_2} |\varphi(Bt_0 - k)| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \left\{ \sum_{|m| \geq \delta B - 1_j} \ \sum_{m_{[j]} \in Z^{n-1}} |\varphi(Bt_0 - \lfloor Bt_0 \rfloor - m)| \right\} \leq n\varepsilon \quad (30)$$

dla każdego $W \geq \dfrac{k+1}{\delta}$, otrzymujemy więc (25).

Odnośnie części drugiej najpierw pokażemy, że $S_B^{\varphi} s$ jest jednostajnie ciągłe na $R^n$ i pokażemy, że zależność:

$$\left(S_B^{\varphi} s\right)(t) = \left(S_1^{\varphi} g\right)(Bt), \quad (31)$$

gdzie

$$g(t) = s\left(\frac{t}{B}\right), \quad (32)$$

wystarczy rozważyć w przypadku $B = (1,...1)$. Wtedy szereg (12) będzie zbieżny jednostajnie w $[-1,2]^n$. Weźmiemy $\varepsilon > 0$, $K_0 \in N$ i otrzymamy:

$$\sum_{k \in Z^n} |\varphi(t-k)| - \sum_{-K_0 \leq k \leq K_0} |\varphi(t-k)| < \frac{\varepsilon\left(\sqrt{2\Pi}\right)^n}{3\|s\|_C}, \quad (33)$$

dla każdego $t \in [-1,2]^n$. Jeżeli $\varphi \in C(R^n)$, to istnieje $0 < \delta < 1$ taka, że:

$$\left|\varphi(t) - \varphi(t^`)\right| \leq \frac{\varepsilon\left(\sqrt{2\Pi}\right)^n}{3(2K_0+1)^n \|s\|_C}, \quad (34)$$

dla każdego $t, t^` \in R^n$ i $-\delta \leq t - t^` \leq \delta$. Teraz niech $t, t^` \in R^n$ oraz spełnia warunek $-\delta < t - t^` < \delta$, wtedy $t - \lfloor t \rfloor$ i $t^` - \lfloor t \rfloor = (t^` + t) + t - \lfloor t \rfloor$ należy do $[-1,2]^n$ i stąd $\lfloor t \rfloor - k \in Z^n$.

W związku z tym zapiszemy:

$$\left(\sqrt{2\Pi}\right)^n \left\|S_1^{\varphi} s(t) - S_1^{\varphi} s(t^`)\right\| \leq$$

$$\leq \sum_{k \in Z^n} |s(k)| \left|\varphi(t - \lfloor t \rfloor - (k - \lfloor t \rfloor)) - \varphi(t^` - \lfloor t \rfloor - (k - \lfloor t \rfloor))\right|$$

$$\leq \|s\|_C \sum_{m \in Z^n} \left|\varphi(t - \lfloor t \rfloor - m) - \varphi(t^` - \lfloor t \rfloor - m)\right|$$

$$\leq \|s\|_C \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{-K_0 \leq k \leq K_0} \left|\varphi(t - \lfloor t \rfloor - k) - \varphi(t^` \lfloor t \rfloor - k)\right| + \\ + \left\{ \displaystyle\sum_{k \in Z^n} - \sum_{-K_0 \leq k \leq K_0} \right\} \left( \begin{array}{l} \varphi(t - \lfloor t \rfloor - k) \\ + \varphi(t^` - \lfloor t \rfloor - k) \end{array} \right) \end{array} \right\}$$

$$\leq \|s\|_C \left\{ \sum_{-K_0 \leq k \leq K_0} \frac{\varepsilon\left(\sqrt{2\Pi}\right)^n}{3(2K_0+1)^n \|s\|_C} + \frac{2\varepsilon\left(\sqrt{2\Pi}\right)^n}{3\|s\|_C} \right\}$$

$$\leq \left(\sqrt{2\Pi}\right)^n \varepsilon. \quad (35)$$

W przypadku gdy $j = 0$ i $c = 1$ można będzie w prosty sposób zweryfikacji zależności (13)

Jeżeli $\varphi \in C(R^n)$ będzie spełniać warunek $m_r(\varphi < \infty)$ dla pewnego $r \in N_0$ i niech $j \in N_0^n$ będzie stałą spełniającą warunek $|j| \leq r$. Wtedy następujące stwierdzenia są równoważne dla $c \in R$:

*1.* $\frac{1}{\left(\sqrt{2\Pi}\right)^n}\sum_{k\in Z^n}(t-k)^j\varphi(t-k)=c$ p.w. w $R^n$. (36)

*2.*

$$D^j\hat{\varphi}(2k\Pi)=\begin{cases}(-i)^{|j|}c & \text{dla } k=0\\ 0 & \text{dla } k\in Z^n-\{0\}\end{cases}$$

Szereg

$$\sum_{k\in Z^n}\left|(t-k)^s\varphi(t-k)\right|, \quad (38)$$

jest jednostajnie zbieżny na wszystkich zwartych podzbiorach $R^n$, dla wszystkich $s\in N_0^n$, oraz dla $|s|=r$ ograniczenie p.w. ze stwierdzenia 1 zanika.

Przykładowymi nieklasycznymi jądrami są:

1. Jądro Fejera:

$$F(t):=\frac{1}{\left(\sqrt{2\Pi}\right)^n}\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\sin\left(t_j/2\right)}{t_j/2}\right)^2,$$

$$\left(t\in R^n\right). \quad (39)$$

2. Jądro de la Vallee Poussina:

$$VP(t):=\left(\frac{4}{\sqrt{2\Pi}}\right)^n\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\sin\left(t_j/2\right)\sin\left(3t_j/2\right)}{t_j^2}\right)$$

$$\left(t\in R^n\right) \quad (40)$$

3. Jądro Bochnera – Riesza :

$$BR(t):=2^\gamma\Gamma(\gamma+1)\|t\|_2^{-\left(\frac{n}{2}+\gamma\right)}J_{\frac{n}{2}+\gamma}\left(\|t\|_2\right)$$

$$,\left(t\in R^n\right). \quad (41)$$

dla $\gamma>\frac{n-1}{2}$. $J_\lambda$ jest funkcją Bessela rzędu $\lambda$.

4. Jądro klinowe jednowymiarowe rzędu $r\geq 2$ :

$$M_r(t):=\begin{cases}\sqrt{2\Pi}\sum_{v=0}^{\left[\frac{r}{2}-|t|\right]}\frac{(-1)^v r\left(r/2-|t|-v\right)^{r-1}}{v!(r-v)!}, & \text{dla } |t|\leq\frac{r}{2}\\ 0, & \text{dla } |t|>\frac{r}{2}\end{cases} \quad (42)$$

## 3. PRÓBKOWANIE SYGNAŁÓW W ZBIORACH MIERZALNYCH

Uogólniając przestrzenie Bernsteina $B_\sigma^2$ zdefiniujemy przestrzeń:

$$L_A^2:=\left\{s\in L^2(R);\quad \hat{s}(v)=0 \text{ dla } v\notin A\right\}, \quad (1.37)\ (43)$$

gdzie A jest mierzalnym podzbiorem R.

Sygnały należące do tej przestrzeni nazywane są pasmowo ograniczonymi do mierzalnego zbioru A.

Ponadto będziemy jeszcze używać przestrzeni zdefiniowanej następująco:

$$L^2(A):=\left\{s\in L^2(R);\quad s(u)=0 \text{ dla u}\notin \text{A}\right\}. \quad (44)$$

Zakładamy, że zbiór A spełnia warunek:

$$A\cap(A+2k\Pi V)=\Theta,\ (k\in Z-\{0\}). \quad (45)$$

dla pewnego $V>0$. Warunek ten implikuje, że A ma miarę skończoną:

$$m(A)\leq 2\Pi V. \quad (46)$$

Jeżeli A jest zbiorem ograniczonym to istnieje takie $|x|<M$, że dla każdego $x\in A$, zależność (46) jest spełniona dla każdego $V\geq\Pi^{-1}M$.

Jeżeli $s\in L_A^2$ i zbiór A spełnia warunek (45), wtedy taki sygnał można przedstawić w postaci:

$$s(t)=\frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\int_A\hat{s}(v)e^{-ivt}dv \text{ p.w.} \quad (47)$$

Sygnał spełniający (47) jest ciągły.

Jeżeli sygnał $s\in L^2(A)$ gdzie A i $V>0$, spełnia (45), to:

$$s(x+2\Pi kV)\overline{s(x+2\Pi kV)}=0,\ \text{dla } k\neq j. \quad (48)$$

Normy sygnałów w powyższych przestrzeniach :można określić w poniższy sposób:

1. Jeżeli sygnał $s\in L^2(A)$ i $V>0$ spełnia (45), wtedy norma sygnału wynosi:

$$\|s\|_{L^2}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2\Pi}V}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\hat{s}\left(\frac{k}{V}\right)\right|^2\right\}^{1/2} \quad (49)$$

2. Jeżli sygnał $s\in L_A^2$ i $V>0$ spełnia (45), wtedy norma sygnału wynosi:

$$\|s\|_{L^2}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2\Pi}V}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|s\left(\frac{k}{V}\right)\right|^2\right\}^{1/2} \quad (50)$$

Poniższe dwa lematy są wprowadzeniem do twierdzenia o próbkowaniu sygnałów w zbiorach mierzalnych.

*Lemat 2*
*Jeżeli* $s, g \in L_A^2$ i $V > 0$ *spełnia (45), wtedy:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(u)\overline{g(u)}du = \frac{1}{V}\sum_{k=-\infty}^{\infty} s\left(\frac{k}{V}\right)\overline{g\left(\frac{k}{V}\right)}. \quad (51)$$

*Powyższa suma jest absolutnie zbieżna.*

Lemat ten jest uogólnieniem lematu dotyczącego splotu w przestrzeni Bernsteina na sygnały należące do $L_A^2$.

Lemat 3
*Jeżeli* $s, g \in L_A^2$ i $V > 0$ *spełnia (45), wtedy:*

$$(s * g)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}V}\sum_{k=-\infty}^{\infty} s\left(\frac{k}{V}\right)g\left(t-\frac{k}{V}\right),$$
$$(t \in R). \quad (52)$$

*Powyższy szereg jest absolutnie i jednostajnie zbieżny.*

**Dowód.**
Zmienną $t \in R$, występującą w g (lemat (3)) zapiszemy w postaci $\overline{g(t-)}$. Stąd

$$\hat{\left[\overline{g(t-)}\right]}(v) = e^{-ivt}\,\hat{g}(v). \quad (53)$$

Absolutna i jednostajna zbieżność wynika z:

$$\sum_{|k|>n}\left|s\left(\frac{k}{V}\right)\right|\left|g\left(t-\frac{k}{V}\right)\right| \le$$
$$\le \left\{\sum_{|k|>n}\left|s\left(\frac{k}{V}\right)\right|^2\right\}^{1/2}\left\{\sum_{|k|>n}\left|g\left(t-\frac{k}{V}\right)\right|^2\right\}^{1/2} =$$
$$= \left(2\Pi V^2\right)^{1/4}\left\{\sum_{|k|>n}\left|s\left(\frac{k}{V}\right)\right|^2\right\}\|g\|_{L^2}.$$

*Twierdzenie 4.* **O próbkowaniu w** $L_A^2$

Jeżeli sygnał $s \in L_A^2$ i $V > 0$ *spełnia (lemat 3), wtedy możemy odtworzyć sygnał z ciągu próbek* $s\left(\frac{k}{V}\right)$ *w następującej postaci :*

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}V}\sum_{k=-\infty}^{\infty} s\left(\frac{k}{V}\right)\check{\chi}_A\left(t-\frac{k}{V}\right),$$
$$(t \in R). \quad (54)$$

$\check{\chi}$ oznacza odwrotną transformatę Fouriera funkcji charakterystycznej zbioru A. Szereg (2.13) jest absolutnie i jednostajnie zbieżny.

**Dowód.**
Zbiór A ma skończoną miarę oraz $\hat{s} \in L^1(R)$, stąd:

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{s}(v)\chi_A(v)e^{ivt}dv = \check{\left[\hat{s}\,\chi_a\right]}(t) =,$$
$$\left(s * \check{\chi}_A\right)(t)$$
$$(t \in R). \quad (55)$$

Dla $V = B$ i $A = [-\Pi B, \Pi B]$ oraz $\check{\chi}_{[-\Pi B,\Pi B]} = \sqrt{2\Pi}\sin c(BT)$ otrzymamy **klasyczne twierdzenie o próbkowaniu**.

## BIBLIOGRAFIA

[1] J. R Higgins, *Sampling Theory in Fourier and Signal Analysis - Foundations*. Clarendon Press, Oxford 1996.
[2] A Jakubowski, *Repetytorium z przedmiotu „Miara i prawdopodobieństwo"*, UMK Toruń 2001.
[3] A Kufner, J Kadlec, *Fourier Series*, Academia Prague 1971.
[4] E. H Lieb, M Loss, *Analysis, Graduate Studies in Mathematics*, American Mathenatical Society, 1998.
[5] L Shwartz, *Sous espaces hilbertiens d'espaces vectoriels topoloqiues et noyaux associes*, Journal d'Analyse Mathematique, pp. 115-256, 1964.
[6] E. M Stein, G Weiss, *Fourier Analysis on Euclidean Spaces*. Princeton University Press 1971.
[7] Z. Syroka, *Próbkowanie sygnałów diagnostycznych. CzI. Próbkowanie w przestrzeni Hilberta z reprodukującym jądrem Shanona.* Diagnostyka Nr2(42)2007,s19-26.
[8] Z. Syroka, *Próbkowanie sygnałów diagnostycznych. CzII. Próbkowanie w przestrzeni Hilberta z bazami harmonicznymi za pomocą nieklasycznych jąder*. Diagnostyka Nr2(42)2007,s27-34.
[9] Z. Syroka, *Próbkowanie sygnałów diagnostycznych. CzIII. Próbkowanie*

*w przestrzeni Hilberta z bazami wielomianowymi za pomocą nieklasycznych jąder.* Diagnostyka Nr2(42)2007,s35-41.