PRÓBKOWANIE SYGNAŁÓW DIAGNOSTYCZNYCH CZĘŚĆ IV PRÓBKOWANIE SYGNAŁÓW W PRZESTRZENI BERNSTEINA I PALEYA - WIENERA

Zenon SYROKA

Uniwersytet Warmińsko – Mazurski, Wydział Nauk Technicznych
Ul. Oczapowskiego 11, 10 –717 Olsztyn

Streszczenie
W pracy przedstawiono matematyczny opis sygnałów diagnostycznych przestrzeni Bernsteina i Paleya- Wienera oraz sposób konstrukcji tej przestrzeni. Podano matematyczną teorię w zastosowaniu do próbkowania sygnałów diagnostycznych w tych przestrzeniach.

Słowa kluczowe: próbkowanie sygnałów, przestrzenie sygnałów, przestrzeń Bernsteina, przestrzeń Paleya-Wienera.

SAMPLING OF THE DIAGNOSTIC SIGNALS
PART IV
SIGNAL SAMPLING IN THE BERENSTEIN AND PALEY-WINER SPACE

Summary
In this article are defined the diagnostic signals in the Berenstein and Paley-Wiener space and the way this space is constructed. The mathematical theory in the application of the diagnostic sampling signal is presented.

Keywords: sampling signals, signals space, Berenstein space, Paley-Wiener space.

1. WPROWADZENIE

Sygnały należące do przestrzeni Bernsteina B_σ^p i Paley – Winera PW_σ^p, $\sigma > 0$, $1 \le p \le \infty$, są szczególnie ważne ze względu na właściwości ich opisu za pomocą szeregów kardynalnych. Nadają się one bardzo dobrze do opisu **próbkowania regularnego**.

W próbkowaniu regularnym, momenty próbkowania sygnałów są od siebie równo odległe, sygnały próbkowane są dolnopasmowe i mają jednowymiarową dziedzinę położoną centralnie względem początku układu (względem zera).

2. SZEREG FOURIERA W PRZESTRZENIACH FUNKCYJNYCH

Niech N, N_o, Z oznaczają odpowiednio zbiór liczb naturalnych, zbiór nieujemnych liczb całkowitych, zbiór wszystkich liczb całkowitych, a R, R_+, C, zbiór liczb rzeczywistych, dodatnich rzeczywistych i zespolonych.

W szczególności R^n jest n – wymiarową przestrzenią eukildesową z normą w postaci:

$$\|u\|_2 := \left(u_1^2 + ... + u_n^2\right)^{1/2}, \qquad (1)$$

gdzie $u = (u_1,.....,u_n)$, $u_j \in R$, $j \in \{1,2,.....,n\}$.

Iloczyn skalarny $u, v \in R^n$ dany jest wzorem:

$$uv := \sum_{j=1}^{n} u_j v_j . \qquad (2)$$

Przez u/v oznaczymy wektor $\left(u_1/v_1 ,......, u_n/v_n\right)$, a przez u^{-1} wektor $\left(1/u_1 ,...... 1/u_n\right)$. Podobnie $\lfloor u \rfloor$ oznacza wektor $(\lfloor u_1 \rfloor,............,\lfloor u_n \rfloor)$, gdzie $\lfloor u_n \rfloor$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą niż u_n.

Przez $[a,b]$, $a,b \in R^n$, oznaczymy n – wymiarowy przedział zawierający wszystkie wektory $u \in R^n$, spełniające warunek $a \le u \le b$ (porządek po współrzędnych).

Dla $k \in N_0^n$, $u \in R^n$, określimy następujące wielkości:

$|k| := k_1 + ... + k_n$.

$$u^k := u_1^{k_1}.........u_n^{k_n}.$$

$$k! := k_1!...........k_n!.$$

Dla funkcji $s : R^n \to C$ wielkość $D^k s$ określimy wzorem:

$$D^k s := \frac{\delta^{|k|}}{\delta u^k} s := \frac{\delta^{|k|}}{\delta u_1^{k_1}........\delta u_n^{k_n}} s, \ \left(|k| = r\right). \tag{3}$$

Niech $C\left(R^n\right)$ będzie przestrzenią wszystkich jednostajnie ciągłych i ograniczonych funkcji $s : R^n \to C$, wyposażonych w normę supremum $\|s\|_c$ i niech

$$C^r\left(R^n\right) := \left\{s \in C\left(R^n\right); \quad D^k s \in C\left(R^n\right) \quad \forall \quad |k| \le r\right\}$$

$r \in N_o$, będzie przestrzenią funkcji ciągłych r - krotnie różniczkowalnych w sposób ciągły.

$L^p\left(R^n\right)$ oznacza przestrzeń wszystkich mierzalnych funkcji $s : R^n \to C$, dla których normy

$$\|s\|_{L^p} := \left\{\frac{1}{\left(\sqrt{2\Pi}\right)^n} \int_{R^n} |s(u)|^p du\right\}^{1/p},$$

$$\left(1 \le p < \infty\right). \tag{4}$$

$$\|s\|_{L^\infty} := ess \sup_{u \in R^n} |s(u)|, \tag{5}$$

są skończone.

L_λ^p, $\lambda \in R_+^n$, $\left(1 \le p \le \infty\right)$ jest przestrzenią λ - okresowych mierzalnych funkcji $s : R^n \to C$, które są całkowalne w p – tej potędze w przedziale $\left(0, \lambda\right)$ z normą

$$\|s\|_{L_\lambda^p} = \left\{\left(\prod_{j=1}^n \lambda_j\right)^{-1} \int_{(0,\lambda)} |s(u)|^p du\right\}^{1/p} \tag{6}$$

Transformata Fouriera $\hat{s}$ funkcji $s \in L^1\left(R^n\right)$ jest zdefiniowana wzorem:

$$\hat{s}(v) := \frac{1}{\left(\sqrt{2\Pi}\right)^n} \int_{R^n} s(u) e^{ivu} du, \ \left(v \in R^n\right). \tag{7}$$

Transformata Fouriera – Plancherela funkcji $s \in L^p\left(R^n\right)$, $1 < p \le 2$, jest określona jako funkcja $\hat{s} : R^n \to C$, która spełnia zależność:

$$\lim_{\rho \to \infty} \left\| \frac{1}{\left(\sqrt{2\Pi}\right)^n} \int_{K_\rho(0)} s(u) e^{-iuv} - \hat{s}(v) \right\|_{L^q} = 0, \tag{8}$$

gdzie $K_\rho(0) \subset R^n$ jest kulą o środku w punkcie 0 i promieniu $\rho > 0$, i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

K – ty współczynnik Fouriera sygnału $s \in L_\lambda^1$ jest zdefiniowany jako:

$$[s]_\lambda^\wedge(k) := \left(\prod_{j=1}^n \lambda_j\right)^{-1} \int_{(0,\lambda)} s(u) e^{-i2\Pi k \frac{u}{\lambda}} du,$$

$$\left(k \in Z^n\right), \tag{9}$$

a odpowiadający powyższej transformacie szereg Fouriera dany jest w postaci:

$$s(t) \sim \sum_{k \in Z^n} [f]_\lambda^\wedge(k) e^{i2\Pi k \frac{t}{\lambda}}, \ \left(t \in R^n\right). \tag{10}$$

W ogólności $\sum_{k \in Z^n}$ jest wartością granicy

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{k_1 = -N}^{N} ...... \sum_{k_n = -N}^{N}.$$

Związek pomiędzy transformatą Fouriera sygnału $s \in L^1\left(R^n\right)$ i sygnałem $s \in L_\lambda^1$ określa twierdzenie Poissona.

Jeżeli $s \in L^1\left(R^n\right)$, to szereg:

$$s_\lambda^*(t) := \frac{\prod_{j=1}^n \lambda_j}{\left(\sqrt{2\Pi}\right)^n} \sum_{k \in Z^n} s(t + \lambda k), \left(t \in R^n\right), \tag{11}$$

jest zbieżny bezwzględnie prawie wszędzie. Zdefiniujemy sygnał $s_\lambda^* \in L_\lambda^1$ taki, że

dla każdego $g \in L_\lambda^\infty$. (12)

bierając w szczególności

$$g(u) = e^{\left(-i2\Pi \frac{u}{\lambda}\right)}, \tag{13}$$

otrzymamy:

$$\hat{s}_\lambda^*(k) = \hat{s}\left(\frac{2\Pi k}{\lambda}\right), \qquad \left(k \in Z^n\right). \tag{14}$$

W powyższym wyrażeniu lewa strona wyznacza współczynniki Fouriera λ - okresowego sygnału s_λ^* zdefiniowanego za pomocą (9), a prawa strona jest transformatą Fouriera sygnału $s \in L^1\left(R^n\right)$ zdefiniowanego za pomocą (7).

Sygnał s_λ^* można rozwinąć w szereg Fouriera:

$$s_\lambda^*(t) = \frac{\prod_{j=1}^n \lambda_j}{\left(\sqrt{2\Pi}\right)^n} \sum_{k \in Z^n} s(t + \lambda k) \sim \sum_{k \in Z^n} \hat{s}\left(\frac{2\Pi k}{\lambda}\right) e^{i2\Pi k \frac{t}{\lambda}} \tag{15}$$

Jeżeli obydwa szeregi występujące w wyrażeniu (15) są jednostajnie zbieżne w zwartych podzbiorach R^n, to znak „~" zastąpiony może być przez „=".

Splot sygnałów $s_1 * s_2$, $s_1, s_2 : R^n \to C$ jest zdefiniowany wzorem:

$$(s_1 * s_2)(t) = (2\Pi)^{-n/2} \int_{R^n} s_1(u) s_2(t-u) du, \tag{16}$$

jeśli tylko całka istnieje.

Jeżeli $s_1 \in L^1(R^n)$ i $s_2 \in L^p(R^n)$, $1 \le p \le \infty$, to $(s_1 * s_2) \in L^p(R^n)$.

Jeżeli $s_1 \in L^1(R^n)$ i $s_2 \in C(R^n)$, to $(s_1 * s_2) \in C(R^n)$.

Dla powyższych warunków zachodzą związki:

$$\|s_1 * s_2\|_{L^p} \le \|s_1\|_{L^1} \|s_2\|_{L^p}. \tag{17}$$

$$\|s_1 * s_2\|_C \le \|s_1\|_{L^1} \|s_2\|_C. \tag{18}$$

Dla $1 \le p \le 2$ zachodzi dodatkowo:

$$\left(s_1 \hat{*} s_2 \right)(v) = \hat{s}_1(v) \hat{s}_2(v). \tag{19}$$

3. OPIS SYGNAŁÓW DIAGNOSTYCZNYCH W PRZESTRZENI BERNSTEINA

Przestrzenie Bernsteina są dogodnym narzędziem do opisu problemów przetwarzania analogowo – cyfrowego. Szczególnie są przydatne do opisu procesu próbkowania, gdyż analiza tego problemu znacznie upraszcza się w tych przestrzeniach

Sygnał nazywamy całkowitym, jeżeli jest holomorficzny na zbiorze C.

Sygnał całkowity jest typu wykładniczego jeżeli istnieją dodatnie stałe A i B takie, że

$$|s(z)| \le A e^{B|z|}, \quad z \in C. \tag{20}$$

Z sygnałem typu wykładniczego stowarzyszona jest liczba σ, nazywana typem wykładniczym, określona jako:

$$\sigma = \limsup_{r \to \infty} \frac{\log M(r)}{r}, \tag{21}$$

gdzie $M(r)$ oznacza maksymalny moduł sygnału s w okręgu $|z| = r$.

Przez E_σ oznaczamy sygnały całkowite typu wykładniczego mniejszego lub równego σ.

Definicja 1

Przestrzeń Bernsteina B_σ^p składa się z sygnałów, które należą do E_σ, a po ograniczeniu do R należą do $L^p(R)$. Normę na B_σ^p określamy jako normę z $L^p(R)$.

Dla sygnałów w przestrzeni Bernsteina zachodzi związek:

$$B_\sigma^1 \subset B_\sigma^p \subset B_\sigma^r \subset B_\sigma^\infty \text{ dla } 1 \le p \le r \le \infty. \tag{22}$$

Ponadto, jeśli $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ oraz $s_1 \in B_\sigma^p$ i $s_2 \in B_\sigma^q$, to $s_1 s_2 \in B_{2\sigma}^1$.

Dla każdego sygnału $s \in B_\sigma^p$, $r \in N$ i $p \ge 1$ zachodzi:

$$\left\| s^{(r)} \right\|_p \le \sigma^r \|s\|_p. \tag{23}$$

Nierówność Nikolskiego przyjmie następującą postać:

Niech $1 \le p \le \infty$. Wtedy dla każdego sygnału $s \in B_\sigma^p$, i $h > 0$ mamy:

$$\|s\|_p \le \sup_{u \in R} \left\{ h \sum_{n \in Z} |s(u - hn)|^p \right\}^{1/p} \le (1 + h\sigma) \|s\|_p \tag{24}$$

Kryterium zwartości w przestrzeni Bernsteina. Niech $1 \le p \le \infty$, i niech (s_n), $n \in N$ będzie ograniczonym w normie ciągiem sygnałów z przestrzeni B_σ^p. Niech C_o będzie zwartym podzbiorem płaszczyzny zespolonej C. Wówczas istnieje podciąg (s_{n_k}) ciągu (s_n), który jest zbieżny jednostajnie na C_o.

Wniosek 2

Przestrzeń Bernsteina jest zupełna, jest więc przestrzenią Banacha.

Dla $\sigma \in R_+^n$ i $1 \le p \le \infty$, B_σ^p będzie przestrzenią sygnałów całkowitych na C^n, typu wykładniczego σ, spełniających warunek:

$$|s(z)| \le \|s\|_{C(R^n)} \exp\left\{ \sum_{j=1}^n \sigma_j |y_j| \right\}, \quad (z \in C^n),$$

gdzie:

$$z = (z_1 \ldots\ldots\ldots\ldots z_n), \quad z_j = x_j + iy_j,$$

należą do $L^p(R^n)$.

Dla każdego $h \in R_+^n$ i sygnałów z przestrzeni Bernsteina zachodzi:

$$\|s\|_{L^p} \leq \sup_{u\in R^n}\left\{\frac{\prod_{j=1}^{n} h_j}{\left(\sqrt{2\Pi}\right)^n}\sum_{k\in Z^n}|s(u+hk)|^p\right\}^{1/p} \leq \prod_{j=1}^{n}\left(1+\sigma_j h_j\right)\|s\|_{L^p},$$

Jest to nierówność Nikolskiego dla przestrzeni C^n.

W przestrzeni B_σ^p, $1 \leq p \leq 2$, transformata Fouriera określona jest poprzez twierdzenie Paleya – Wienera.

Twierdzenie 3 Twierdzenie Paleya- Wienera

Załóżmy, że $\hat{s} \in L^2(R)$. $\hat{s}$ *jest transformatą Fouriera sygnału s zanikającego na zewnątrz przedziału* $[-\sigma,\sigma]$, *wtedy i tylko wtedy gdy sygnał s po ograniczeniu do R, należy do* E_σ.

Twierdzenie 4

Załóżmy, że $s \in L^p(R^n)$, $1 \leq p \leq 2$. *Jeżeli jego transformata* $\hat{s}$ *zanika prawie wszędzie na zewnątrz przedziału* $[-\sigma,\sigma]$, *to sygnał s ma rozszerzenie na cały zbiór* C^n *jako element* B_σ^p *i można go zapisać w postaci:*

$$s(t) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\Pi}\right)^n}\int_{(-\sigma,\sigma)}\hat{s}(v)e^{ivt}dv, \quad \left(t \in R^n\right). \tag{27}$$

4. OPIS SYGNAŁÓW DIAGNOSTYCZNYCH W PRZESTRZENI PALEYA- WINERA

Niech $m(B)$ oznacza n- wymiarową miarę Lebesguea zbioru $B \subset R^n$, i niech B składa się z M rozłącznych składników B_j, $j = 1,......M$ takich, że dla każdego j, $0 < m(B_j) < \infty$. Zbiór B jest fizycznie interpretowany jako pasmo sygnału.

Definicja 5

Przestrzeń Paleya - Wienera PW_B *jest zdefiniowana jako*:

$$PW_B := \left\{s : s \in L^2(R^n) \cap C(R^n),\ \operatorname{supp}\hat{s} \subseteq B\right\} \tag{28}$$

Jeżeli B jest pojedynczym przedziałem $[-\Pi B, \Pi B] \subset R$, to przestrzeń oznaczamy $PW_{\Pi B}$.

Jeżeli zbiór B składa się z więcej niż jednego rozłącznych składników, elementy przestrzeni PW_B nazywamy sygnałem wielopasmowym.

Poniższa definicja określa przestrzeń sygnałów Paleya – Wienera $PW_\sigma^p \left(s \in B_\sigma^p\right)$. (26)

Definicja 6 [1]

Dla $\sigma > 0$ *i* $1 \leq p \leq \infty$ *sygnał* $s(t)$ *należy do przestrzeni Paleya – Wiennera* PW_σ^p, *jeśli można go przedstawić w postaci:*

$$s(r) = \int_{-\sigma}^{\sigma} g(u)e^{izu}du, \qquad (z \in C), \tag{29}$$

dla $g \in L^p(-\sigma,\sigma)$ *i* $\sigma = \Pi B$.

Przestrzeń PW_σ^p jest podzbiorem E_σ, ponieważ każdy element PW_σ^p jest homologiczny z C, a także ma miejsce związek :

$$|s(z)| \leq \int_{-\sigma}^{\sigma}|g(u)|e^{-u\operatorname{Im} z}du \leq e^{\sigma|z|}\|g\|_1. \tag{30}$$

Zachodzi inkluzja :

$$PW_\sigma^r \subset PW_\sigma^p,\ r > p \geq 1, \tag{31}$$

która jest konsekwencją nierówności Höldera.

Odwzorowanie (transformata Fouriera) $F : s \to \hat{s}$ jest ograniczoną liniową transformacją $L^p(R)$ w $L^q(R)$ gdy $1 < p \leq 2$.

W szczególności, jeżeli $1 < p \leq 2$, to założenie $s \in PW_\sigma^p$ implikuje, $s \in B_\sigma^q$, a więc zachodzi:

$$PW_\sigma^p \subset B_\sigma^q. \tag{32}$$

Poniższy zestaw twierdzeń daje warunki dostateczne, aby sygnał φ należał do przestrzeni Paleya – Wienera.

Twierdzenie 7 Paleya – Wienera

Jeżeli $s \in L^2(R)$, *to s ma analityczne rozszerzenie do C które należy do* E_σ, *wtedy i tylko wtedy jeżeli* $\operatorname{supp}\hat{s} \subseteq [-\sigma,\sigma]$.

W przypadku gdy $p = q = 2$, *z powyższego twierdzenia wynika, iż*

$$PW_\sigma^2 \equiv B_\sigma^2. \tag{33}$$

Twierdzenie 8 [1] Paleya – Wienera (wersja L^P)

1. Jeżeli sygnał s należy do E_σ *a po ograniczeniu do R należy do* $L^p(R)$, $1 < p < 2$, *to istnieje* $\varphi \in L^q(-\sigma,\sigma)$, $q = \dfrac{p}{p-1}$ *takie, że:*

$$s(z)=\int_{-\sigma}^{\sigma}\varphi(u)e^{iuz}du\,. \tag{34}$$

2.Jeżeli $\varphi\in L^{p}(-\sigma,\sigma)$, $1<p<2$, *i*

$$s(z)=\int_{-\sigma}^{\sigma}\varphi(u)e^{iuz}du\,,$$

to sygnał s należy do E_{σ} *a po ograniczeniu do R należy do* $L^{p}(R)$.

Dla $p>2$ zachodzi relacja:

$$PW_{\Pi B}^{p}\subset PW_{\Pi B}^{2}\,. \tag{35}$$

Twierdzenie 9 Paleya – Wienera (wersja L^{1})

Sygnał s należy do E_{σ} *a po ograniczeniu do R należy do* $L^{1}(R)$, *wtedy i tylko wtedy gdy można go przedstawić w postaci:*

$$s(z)=\int_{-\sigma}^{\sigma}\varphi(u)e^{iuz}du\,, \tag{36}$$

gdzie $\varphi(\sigma)=\varphi(-\sigma)=0$, *i* φ *rozszerzone na zewnątrz przedziału* $(-\sigma,\sigma)$ *posiada absolutnie zbieżny szereg Fouriera w przedziale* $(-\sigma-\delta,\sigma+\delta)$, $\delta>0$.

Sygnały należące do przestrzeni Paleya – Wienera są pasmowo ograniczone lub dolnopasmowe, początek (zero) zawarte jest w środku przedziału (w środku pasma) przedziału częstotliwości lub czasu. Widmo takiego sygnału jest zawarte w przedziale $[-\Pi B,\Pi B]$.

5. PRÓBKOWANIE SYGNAŁÓW W PRZESTRZENI BERNSTEINA

Podstawą rozważań próbkowania sygnałów w przestrzeni Bernsteina są następujące fakty łączące splot dyskretny ze splotem ciągłym.

Jeżeli $s_1\in B_{\sigma}^{p}$ i $s_2\in B_{\sigma}^{q}$, $1\le p\le\infty$, oraz q jest sprzężone z p, i $\sigma=\Pi B$, wtedy zachodzi związek:

$$\sum_{n\in Z}s_1\left(\frac{n}{B}\right)s_2\left(t-\frac{n}{B}\right)=B\int_{R}s_1(u)s_2(t-u)du \qquad (t\in R) \tag{37}$$

Wobec powyższego można wyciągnąć wniosek, iż splot w przestrzeni Bernsteina jest równy pewnemu splotowi dyskretnemu.

Lemat 10

Niech $s_1\in B_{\Pi B}^{p}$, $s_2\in B_{\Pi B}^{q}$, *dla* $B\in R_{+}^{n}$, $1\le p\le\infty$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, *wtedy:*

$$(s_1*s_2)(t)=\frac{1}{\left(\sqrt{2\Pi}\right)^{n}\prod_{j=1}^{n}B_j}\sum_{k\in Z^{n}}s_1\left(\frac{k}{B}\right)s_2\left(t-\frac{k}{B}\right), \qquad \left(t\in R^{n}\right), \tag{38}$$

jest szeregiem absolutnie i jednostajnie zbieżnym w R^{n}.

W oparciu o lemat (10) można łatwo udowodnić klasyczne twierdzenie o próbkowaniu Shannona. Niech bowiem $s\in B_{\Pi B}^{p}$, $1\le p\le\infty$, $\prod_{j=1}^{n}\operatorname{sinc}(k_j)\in B_{\Pi B}^{q}$, $1<q\le\infty$. Z lematu (20) otrzymamy:

$$\sum_{k\in Z^{n}}s\left(\frac{k}{B}\right)\prod_{j=1}^{n}\operatorname{sinc}\left(B_j\left(t_j-\frac{k_j}{B_j}\right)\right)=.$$

$$\sum_{k\in Z^{n}}s\left(t-\frac{k}{B}\right)\prod_{j=1}^{n}\operatorname{sinc}(k_j)=s(t) \tag{39}$$

Twierdzenie. 11 **O próbkowaniu w przestrzeni Bernsteina**

Jeżeli sygnał $s\in B_{\Pi B}^{p}$, $1\le p\le\infty$, to *możemy go przedstawić w postaci szeregu:*

$$s(t)=\sum_{n\in Z}s\left(\frac{n}{B}\right)\operatorname{sinc}(Bt-n). \tag{40}$$

Szereg ten jest absolutnie i jednostajnie zbieżny na zbiorach zwartych.

W przestrzeni Bernsteina zachodzi

Twierdzenie 12

Dla każdego sygnału $s\in B_{\Pi B}^{p}$, $1\le p\le\infty$, $r\in N$ *mamy:*

$$s^{(r)}(t)=\sum_{n\in Z}s\left(\frac{n}{B}\right)\left(\frac{d}{dt}\right)^{r}\operatorname{sinc}(Bt-n). \tag{41}$$

Szereg ten jest absolutnie i jednostajnie zbieżny na zbiorach zwartych.

Powyższe twierdzenie będzie potrzebne do analizy próbkowania za pomocą nieklasycznych jąder.

6. PRÓBKOWANIE W PRZESTRZENI PALEYA – WIENERA

Podstawą analizy próbkowania w przestrzeni $PW_{\Pi B}^{p}$ jest poniższe twierdzenie:

Twierdzenie 13 **O próbkowaniu w przestrzeni Paleya - Wienera**

Jeżeli $s\in PW_{\Pi B}^{p}$, $1\le p\le\infty$, *wtedy s można przedstawić w postaci szeregu:*

$$s(t)=\sum_{n\in Z}s\left(\frac{n}{B}\right)\operatorname{sinc}(Bt-n) \tag{42}$$

jednostajnie zbieżnego na zwartych podzbiorach C. Jeżeli $p > 1$, *to zbieżność jest absolutna. W przypadku* $p = 1$, *zbieżność nie jest absolutna, lecz może być, jeżeli g w definicji (15) należy do* $\Re eH^1$.

Przestrzeń Hardy'ego H^1 stanowią sygnały s analityczne w dysku jednostkowym $D = \{z \in C : |z| < 1\}$, dla których:

$$\sup_{0 \le r < 1} \int_{-\Pi}^{\Pi} \left| s\left(re^{j\theta}\right) \right| d\theta < \infty . \tag{43}$$

Przestrzeń $\Re eH^1$ jest ograniczoną do części rzeczywistej przestrzenią H^1, innymi słowy, jeżeli $s \in H^1$, wtedy

$$s(\theta) = \lim_{\substack{r \to 1 \\ r < 1}} \Re es\left(re^{j\theta}\right), \tag{44}$$

należy do $\Re eH^1$.
Zachodzi relacja :

$$L^p(-\Pi, \Pi) \subset \Re eH^1 \subset L^1(-\Pi, \Pi). \tag{45}$$

Poniżej zostały przedstawione własności przestrzeni Paleya – Wienera, szczególnie przydatne w teorii próbkowania sygnałów

1. Przestrzeń Paleya – Wienera $PW_{\Pi B}$ jest przestrzenią Hilberta z reprodukującym jądrem równym:
$$B\text{sinc}B(s-t),\ (s,t) \in R \times R . \tag{46}$$
Sygnał $s \in PW_{\Pi B}$ można zapisać w postaci :
$$s(t) = \int_R s\left(\frac{v}{B}\right) \text{sinc}(Bt - v) dv \tag{47}$$
2. Jeżeli $s \in PW_{\Pi B}$, to zachodzi:
$$s(t) = \frac{2}{\sqrt{2\Pi}} \int_{-\Pi B}^{\Pi B} \hat{s}(x) e^{ixt} dx .$$
Sygnał s jest ograniczony do R, i $s(t) \to 0$ gdy $t \to \pm\infty$.
3. Zbiór $\left\{\sqrt{B}\text{sinc}(Bt - n)\right\}$, $n \in Z$, jest ortonormalną bazą dla $PW_{\Pi B}$, przy czym n – ty współczynnik szeregu Fouriera wynosi:
$$c_c = \left(\frac{1}{\sqrt{B}}\right) s\left(\frac{n}{B}\right).$$
Poniższy szereg dla $s \in PW_{\Pi B}$ jest szeregiem ortogonalnym
$$s(t) = \sum_{n \in Z} s\left(\frac{n}{B}\right) \text{sinc}(Bt - v),$$
który jest zbieżny w normie $PW_{\Pi B}$ absolutnie i jednostajnie na całym R.
4. Zależność Parsevala dla $s \in PW_{\Pi B}$ przyjmuje postać:
$$\|s\|^2 = \frac{1}{B} \sum_{n \in Z} \left| s\left(\frac{n}{B}\right) \right|^2 .$$

Opis procesu próbkowania w oparciu o przestrzenie Paleya – Wienera czyni klasyczną teorię Shannona – Nyquista bardziej przejrzystą.

BIBLIOGRAFIA

[1] Higgins J. R.: *Sampling Theory in Fourier and Signal Analysis* - Foundations. Clarendon Press, Oxford 1996.

[2] Kufner A., Kadlec J.: *Fourier Series*, Academia Prague 1971.

[3] Lieb E. H., Loss M.: *Analysis, Graduate Studies in Mathematics*, American Mathematical Society, 1998.

[4] Stein E. M., Weiss G.: *Fourier Analysis on Euclidean Spaces*. Princeton University Press 1971.

[5] Syroka Z.: *Próbkowanie sygnałów diagnostycznych. Cz. I. Próbkowanie w przestrzeni Hilberta z reprodukującym jądrem Shanona.* Diagnostyka Nr 2(42)/2007,s. 19-26.

[6] Syroka Z:. *Próbkowanie sygnałów diagnostycznych. Cz. II. Próbkowanie w przestrzeni Hilberta z bazami harmonicznymi za pomocą nieklasycznych jąder.* Diagnostyka Nr 2(42)/2007, s. 27-34.

[7] Syroka Z.: *Próbkowanie sygnałów diagnostycznych. Cz. III. Próbkowanie w przestrzeni Hilberta z bazami wielomianowymi za pomocą nieklasycznych jąder.* Diagnostyka Nr 2 (42)/2007, s. 35-41.