

**Jan MAGOTT**

Instytut Informatyki, Automatyki i Robotyki  
Politechniki Wrocławskiej

## **MOC OPISOWA DRZEW NIEZDATNOŚCI Z ZALEŻNOŚCIAMI CZASOWYMI**

### **Słowa kluczowe**

Sieci PERT, dynamiczne drzewa niezdatności, drzewa niezdatności z zależnościami czasowymi.

### **Streszczenie**

W pracy przeanalizowano moc opisową probabilistycznych drzew niezdatności z zależnościami czasowymi (PDNZC) w wyrażaniu sieci PERT i dynamicznych drzew niezdatności (DDN). PDNZC składają się z bramek, zdarzeń oraz połączeń bramek ze zdarzeniami. Bramki podzielone są na dwie zasadnicze kategorie, a mianowicie: uogólniające i przyczynowe. W pracy stosowane są tylko bramki przyczynowe. Przedstawiono te bramki przyczynowe, które są używane w ilustracji mocy opisowej PDNZC. Pokazano jak za pomocą PDNZC można wyrazić sieci PERT. Badając moc opisową PDNZC w wyrażaniu DDN, skoncentrowano się na reprezentacji następujących bramek dynamicznych: priorytetowej AND, komponentów rezerwowych, funkcjonalnej zależności.

### **Wprowadzenie**

Drzewa niezdatności [6] są szeroko stosowane w analizie niezawodności i bezpieczeństwa. Sieci PERT [5] umożliwiają ocenę ryzyka czasowego ukończenia projektu. Każdy z tych formalizmów charakteryzuje się cechami, które umożliwiają duży zakres ich stosowalności w praktyce. Każde z dwu wymienio-

nych podejść dostarcza innej perspektywy w analizie ryzyka. Uzasadnione wydaje się poszukiwanie formalizmu, który charakteryzowałby się mocą opisową obejmującą moce opisowe drzew niezdatności i sieci PERT, a ponadto byłby przyjazny w jego stosowaniu. Probabilistyczne drzewa niezdatności z zależnościami czasowymi (PDNZC) [1] wydają się być formalizmem, który może spełnić te wymagania. W pracy pokazano, jak za pomocą PDNZC można wyrazić sieci PERT. Przedstawiono reprezentacje następujących bramek dynamicznych drzew niezdatności (DDN) [3], [4], [11]: priorytetowej AND, komponentów rezerwowych i funkcjonalnej zależności za pomocą PDNZC.

### 1. Probabilistyczne drzewa niezdatności z zależnościami czasowymi

W PDNZC, podobnie jak w drzewach niezdatności z zależnościami czasowymi [7], [8], [9], występują bramki uogólniające i przyczynowe. Bramki przyczynowe charakteryzują się czasem opóźnienia zdarzenia wyjściowego względem zdarzeń wejściowych. W przypadku bramek uogólniających, zdarzenie wyjściowe jest kombinacją zdarzeń wejściowych. W tej pracy stosować będziemy tylko bramki przyczynowe.

Zdarzenie występuje w przedziale czasu liczonym od chwili startu do chwili końca zdarzenia. W szczególnym przypadku, zdarzenie może trwać czas zerowy.

Niech  $R(X)$  będzie realizacją zmiennej losowej  $X$ , tzn. wartością generowaną zgodnie z rozkładem zmiennej  $X$ .

Bramka przyczynowa XOR jest opisana następująco:

$occur(z) \Rightarrow$

$$(occur(x) \wedge \tau(zs) = \tau(xs) + R(d1)) \oplus (occur(y) \wedge \tau(zs) = \tau(ys) + R(d2))$$

gdzie:  $occur(z)$  jest formułą logiczną o znaczeniu: zdarzenie wyjściowe (efekt)  $z$  wystąpiło,  $d1$  (lub  $d2$ ) – zmienna losowa (ZM), która reprezentuje opóźnienie czasowe między chwilą wystąpienia (startem) przyczyny  $x$  (lub  $y$ ), a chwilą wystąpienia efektu  $z$ ,  $\tau(xs)$  oznacza chwilę startu zdarzenia  $x$ .

Powyższa formuła ma następujące znaczenie: jeśli zdarzenie  $z$  wystąpiło, to wystąpiło jedno ze zdarzeń  $x$ ,  $y$ . Ponadto, zdarzenie  $z$  wystartowało w chwili  $R(d1)$ , (lub  $R(d2)$ ) względem chwili startu zdarzenia  $x$  (lub  $y$ ).

Przykładem bramki XOR jest bramka znajdująca się na rys. 2 między zdarzeniami E3 i E4. Jest to bramka z jednym wykorzystanym wejściem. Dla tego wejścia czas między startem zdarzenia E3 a startem zdarzenia E4 jest opisany zmienną losową T3.

Przyczynowa bramka AND opisana jest wyrażeniem:

$$\begin{aligned} occur(z) &\Rightarrow ((occur(x) \wedge occur(y) \wedge \\ &(\tau(xs) \leq \tau(ys) \Rightarrow \tau(zs) = \tau(ys) + R(d)) \wedge \\ &(\tau(ys) \leq \tau(xs) \Rightarrow \tau(zs) = \tau(xs) + R(d))) \end{aligned}$$

Zdarzenie wyjściowe dla tej bramy występuje w chwili  $R(d)$  względem chwili wystąpienia późniejszego ze zdarzeń wejściowych.

Przykładem bramy AND jest brama znajdująca się na rys. 2 między zdarzeniami wejściowymi E5 i E7 a zdarzeniem wyjściowym E8. Czas opóźnienia dla tej bramy jest równy 0.

Przyczynowa bramka priorytetowa AND dana jest formułą:

$$occur(z) \Rightarrow (occur(x) \wedge occur(y) \wedge \tau(xs) \leq \tau(ys) \wedge \tau(zs) = \tau(ys) + R(d))$$

gdzie:  $d$  – ZM reprezentująca czas opóźnienia między wystąpieniem późniejszej przyczyny  $y$  a efektem  $z$ .

Powyższa formuła oznacza: jeśli zdarzenie  $z$  wystąpiło, to zdarzenia  $x$  i  $y$  wystąpiły, zdarzenie  $z$  wystartowało w chwili  $R(d)$  względem chwili startu późniejszego zdarzenia  $y$ .

Przykładem tej bramki jest bramka znajdująca się na rys. 4 między zdarzeniami wejściowymi E3 i E4 a wyjściowym E5.

Bramka przyczynowa OR określona jest formułą:

$$\begin{aligned} occur(z) &\Rightarrow \\ &((occur(x) \wedge \tau(zs) = \tau(xs) + R(d1)) \vee (occur(y) \wedge \tau(zs) = \tau(ys) + R(d2))) \end{aligned}$$

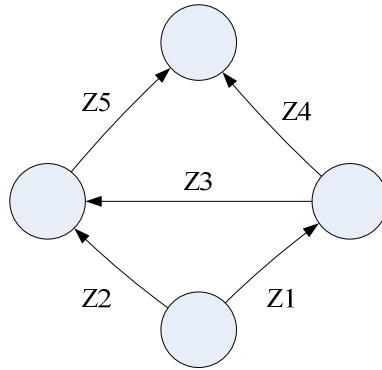
Przykładem tej bramki jest bramka na rys. 6 ze zdarzeniami wejściowymi E4, E5, zdarzeniem wyjściowym E7 i zerowymi czasami opóźnienia dla wejść. Na bramkę przyczynową OR może być nałożony dodatkowy warunek, np.:

$$\tau(zs) = \min\{\tau(xs) + R(d1), \tau(ys) + R(d2)\}$$

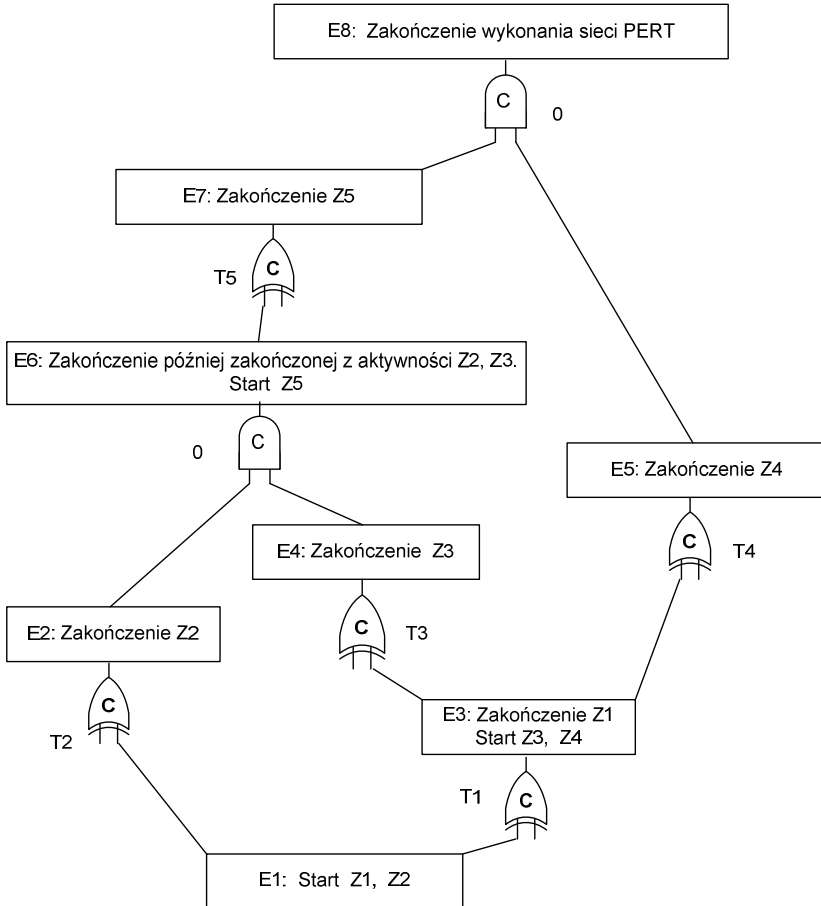
tzn. start zdarzenia wyjściowego następuje w chwili wcześniej upływającego opóźnienia.

## 2. Probabilistyczne drzewa niezdatności z zależnościami czasowymi a sieci PERT

Rysunek 1 ilustruje przykładową sieć PERT [5] z czynnościami  $Z_i$ , gdzie  $i \in \{1, \dots, 5\}$ . Czas realizacji czynności  $Z_i$  jest opisany zmienną losową  $T_i$ .



Rys. 1. Sieć PERT

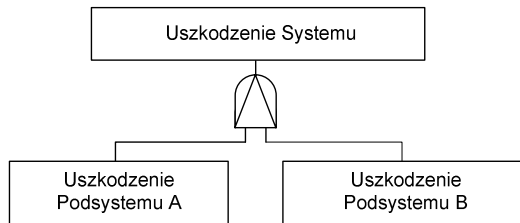


Rys. 2. PDNZC wyrażające sieć PERT z rys. 1

### 3. Probabilistyczne drzewa niezdatności z zależnościami czasowymi a dynamiczne drzewa niezdatności

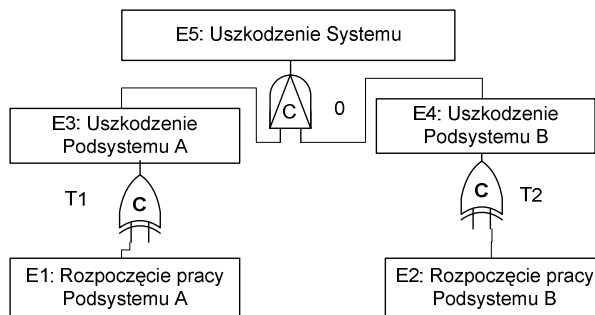
Dynamiczne drzewa niezdatności [3], [4], [11] poza bramkami statycznych drzew niezdatności zawierają bramki dynamiczne. Wśród bramek dynamicznych wyróżnia się: priorytetową AND, sekwencyjną, komponentów rezerwowych i funkcjonalnej zależności. W tym rozdziale z wymienionych bramek dynamicznych nie będziemy badać tylko bramki sekwencyjnej.

Rysunek 3 ilustruje System, który staje się uszkodzonym, jeśli najpierw uszkodza się podsystem A, a potem uszkodza się podsystem B. Czas do uszkodzenia Podsystemu A (lub B) jest dany zmienną losową  $T_1$  (lub  $T_2$ ).



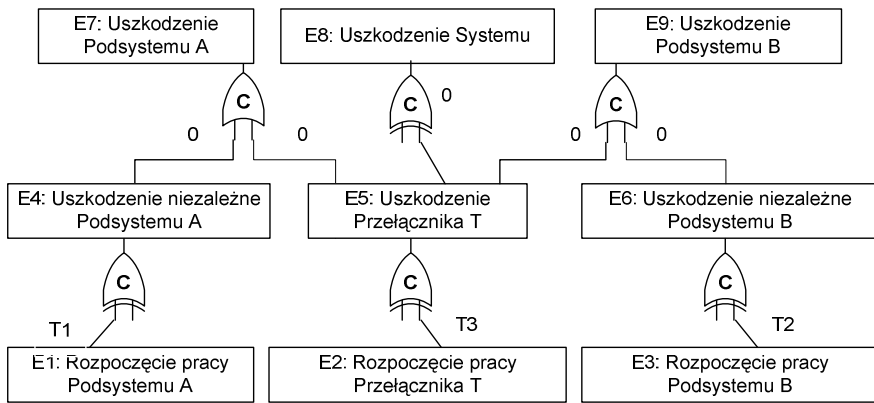
Rys. 3. Bramka priorytetowa AND dynamicznych drzew niezdatności

W PDNZC z rys. 4 wyrażającym bramkę priorytetową AND z rys. 3, czas opóźnienia bramki przyczynowej XOR łączącej zdarzenia E1, E3 reprezentuje czas pracy Podsystemu A. Równy zeru czas opóźnienia przyczynowej bramki priorytetowej AND wskazuje, że natychmiast po uszkodzeniu Podsystemu B, jeśli nastąpi to po uszkodzeniu Podsystemu A, System jest uszkodzony.



Rys. 4. PDNZC wyrażające bramkę priorytetową AND z rys. 3





Rys. 6. Probabilistyczne drzewo niezdatności wyrażające bramkę funkcjonalnej zależności

## Podsumowanie

W pracy pokazano jak modelować sieci PERT i trzy bramki dynamicznych drzew niezdatności za pomocą PDNZC. Kolejnymi zagadnieniami są modele w postaci PDNZC dla następujących bramek dynamicznych drzew niezdatności: sekwencyjnych, komponentów rezerwowych z innymi typami rezerwy oraz bramek stanowisk naprawczych. Odrębnym obszarem badawczym jest moc rozstrzygnięcia o charakterystykach ilościowych PDNZC. Opracowywane algorytmy będą oparte m.in. na dorobku sieci PERT [5, 10] i teorii niezawodności [2].

## Bibliografia

1. Babczyński T., Łukowicz M., Magott J.: Analiza czasowa współdziałania zabezpieczenia lokalnego i zdalnego w automatyce zabezpieczeniowej w elektroenergetyce, w: Systemy czasu rzeczywistego: Postępy badań i zastosowania, WKŁ, Warszawa 2009, 309–318.
2. Barlow R.E., Proschan F.: Statistical Theory of Reliability and Life Testing: Probability Models, Holt, New York 1975.
3. Bobbio A., Codetta D., Parametric fault trees with dynamic gates and repair boxes, in: Proc. Annual Symposium on Reliability and Maintainability, 2004, 459–465.
4. Dugan J. B., Bavuso S. J., Boyd M.A.: Dynamic fault-tree models for fault-tolerant computer systems, IEEE Trans. Reliab., Vol. 41, 1992, No 3, 363–367.
5. Elmaghraby S.E.: Activity Networks: Project Planning and Control by Network Models, Wiley and Sons, New York 1977.

6. Fault Tree Analysis (FTA), International Technical Commission, IEC Standard, Publication 1025, 1990.
7. Górski J., Magott J., Wardzinski A.: Modelling fault trees using Petri nets, in Proc. SAFECOMP'95, Belgirate, Italy, LNCS, Springer-Verlag, 1995.
8. Magott J., Skrobanek P.: A method of analysis of fault trees with time dependencies, in Proc. SAFECOMP'2000, Rotterdam, The Netherlands, LNCS, vol. 1943, Springer-Verlag, 176-186.
9. Magott J., Skrobanek P.: Method of time Petri net analysis for analysis of fault trees with time dependencies, IEE Proceedings - Computers and Digital Techniques, Vol. 149, No. 6, 2002, 257-271.
10. Magott J., Skudlarski K.: Estimating the mean completion time of PERT networks with exponentially distributed durations of activities, European Journal of Operational Research, Vol. 71, 1993, 70-79.
11. <http://www.relex.com/resources/art> Artykuły na temat drzew niezdatności firmy Relex.

Recenzent:

**Janusz KARPIŃSKI**

## **Expressive Power of Probabilistic Fault Trees with Time Dependencies**

### **Key-words**

PERT networks, dynamic fault tree, fault tree with time dependencies.

### **Summary**

Descriptive Power of Probabilistic Fault Trees with Time Dependencies (PFTTD) in expressing PERT networks and Dynamic Fault Trees (DFT) are analysed in the paper. PFTTD are combined from events, gates, and connections between them. The gates are divided into two categories, namely, causal and general. A causal gate is characterised by delay times between causes (input events) and effect (output event). The output event of the generalisation gate is a combination of input events. In the paper, only causal gates are used. How to model PERT networks by PFTTD is shown. The paper illustrates how PFTTD can model the following gates of DFT: priority AND, spare with cold stand-by, and functional dependency. In future research, the decision power of PFTTD will be studied. Algorithms for finding quantitative characteristics of PFTTD will be based on achievements of PERT networks and reliability theory.