

## RUCH PŁYNU W KADZI WIROWEJ WHIRLPOOL

Marek Jakubowski, Jarosław Diakun

*Katedra Inżynierii Spożywczej i Tworzyw Sztucznych, Politechnika Koszalińska*

**Streszczenie:** W pracy przedstawione zostały matematyczne opisy ruchu cieczy w kadzi wirowej wyjaśniające powstawanie przepływu wtórnego odpowiedzialnego za formowanie się stożka osadu. Zaprezentowano pełny model matematyczny ruchu płynu w zbiorniku kadzi wirowej, uproszczone rozwiązanie opisujące powstawanie przepływu dla pojedynczej warstwy w obszarze granicznej warstwy cieczy przy dnie zbiornika oraz model komputerowy ruchu płynu w zbiorniku kadzi wirowej whirlpool.

**Słowa kluczowe:** model matematyczny, kadź wirowa, przepływ wtórny, stożek osadu

### Wprowadzenie

Kadź wirowa określana w praktyce produkcyjnej jako whirlpool weszła do powszechnego użycia w browarnictwie w połowie lat sześćdziesiątych XX wieku [Denk 1997]. Wykorzystuje się ją do usuwania tzw. osadu gorącego z brzezki po gotowaniu. Kadź wirowa jest zbiornikiem cylindrycznym, w którym poprzez napełnianie po stycznej prostopadłej do tworzącej zbiornika uzyskuje się ruch wirowy klarowanej brzezki. Siła odśrodkowa przemieszcza osad w kierunku zewnętrznej części naczynia. Siły tarcia cieczy o ściany i dno naczynia hamują rotację płynu i powodują wytworzenie wewnątrz naczynia systemu przepływów wtórnych. Jeden z tych przepływów odpowiedzialny jest za koncentrację osadu w centralnej strefie dna, w postaci stożka.

### Model matematyczny ruchu płynu

Ze względu na charakter ruchu cieczy w zbiorniku whirlpoola naturalnym jest opisywanie go w cylindrycznym układzie współrzędnych  $r, \varphi, z$ . W celu opisu zachodzących zjawisk posługujemy się równaniami zachowania masy i pędu. Ze względu na właściwości płynu i zakres zmian ciśnienia można traktować medium jako nieściśliwe. Rozpatrujemy ruch płynu w izolowanym termicznie zbiorniku whirlpoola jako zagadnienie izotermiczne i adiabatyczne. W równaniach bilansu nie uwzględniono równania bilansu energii. Wewnętrzne źródła energii w postaci ciepła tarcia uznano za pomijalnie małe, ponieważ dyssypacja energii w wyniku tarcia lepkiego jest relatywnie niewielka w stosunku do pojemności cieplnej wirującego płynu. Energia kinetyczna układu jest reprezentowana wyłącznie w postaci równań bilansu pędu. Ostatnim założeniem jest osiowa symetria ruchu płynu w naczyniu cylindrycznym.

Dla płynu nieściśliwego równanie bilansu masy ma postać:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_\varphi}{r \partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

Równania bilansu masy, pędu i energii ruchu płynu lepkiego, nieściśliwego, uwzględniającego przepływ osiowo – symetryczny:

$$\begin{aligned} \omega^2 r \frac{\partial u_r}{\partial t} - \frac{\partial(u_r^2)}{\partial r} - \frac{\partial(u_r u_\varphi)}{r \partial \varphi} - \frac{\partial(u_r u_z)}{\partial z} - \frac{u_r^2}{r} - \frac{u_\varphi^2}{r} = \\ -\nu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial \varphi^2} - 2 \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (2a)$$

$$\begin{aligned} \frac{du_\varphi}{dt} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r u_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial(u_\varphi^2)}{r \partial \varphi} - \frac{\partial(u_\varphi u_z)}{\partial z} - \frac{u_r u_\varphi}{r} = \\ -\nu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(r u_\varphi)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial \varphi^2} + 2 \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (2b)$$

$$\begin{aligned} -g - \frac{\partial u_z}{\partial t} - \frac{\partial(u_z u_r)}{\partial r} - \frac{\partial(u_\varphi u_z)}{r \partial \varphi} - \frac{\partial(u_z^2)}{\partial z} - \frac{u_r u_z}{r} = \\ \nu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (2c)$$

W powyższym układzie równań przyjęto, że oś zbiornika jest pionowa, równoległa do osi oddziaływania przyspieszenia ziemskiego, a więc równanie (2c) jest uzupełnione o rzutowanie siły masowej wynikającej z przyspieszenia ziemskiego. Ponadto w równaniu (2a) uwzględniono założenie, iż płyn w naczyniu wiruje wokół osi z z prędkością kątową  $\omega$ , a więc równanie bilansu pędu zostało uzupełnione o składową siły odśrodkowej na kierunku  $r$  [Troskołański 1969; Kazimierski 2004].

Powyżej przedstawione równanie bilansu masy oraz układ trzech równań bilansu pędu należy uzupełnić o równania opisujące charakter przepływu właściwy dla ruchu płynu w zbiorniku whirlpoola, a więc charakter przepływu turbulentnego [Dürholt 1988; Michel 1989].

Najczęściej wykorzystywaną metodą opisu jest opis poparty o hipotezę Reynoldsa. Problemem w analizie przepływu turbulentnego opartego na tej hipotezie jest podwojenie niewiadomych w równaniach bilansu. Do analizy numerycznej zastosowano półempiryczny model turbulencji.  $k - \varepsilon$  Model ten zawiera dwa dodatkowe równania, o które należy uzupełnić układ równań składający się z równania bilansu masy (1) i bilansu pędu (2a, 2b, 2c). Równania te przedstawiają ewolucję parametrów określających turbulencję, a więc ewolucję energii kinetycznej turbulencji  $k$  zgodnie z równaniem:

$$\begin{aligned} \rho \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (u_r k) + \rho \frac{\partial}{\partial \varphi} (u_\varphi k) + \rho \frac{\partial}{\partial z} (u_z k) + \rho \frac{\partial k}{\partial t} = \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\mu_\varepsilon}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \frac{\mu_\varepsilon}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial \varphi} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\mu_\varepsilon}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right] + G - \rho \varepsilon \end{aligned} \quad (3a)$$

oraz ewolucję dyssypacji turbulencji  $\varepsilon$  w równaniu:

$$\begin{aligned} \rho \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (u_r \varepsilon) + \rho \frac{\partial}{\partial \varphi} (u_\varphi \varepsilon) + \rho \frac{\partial}{\partial z} (u_z \varepsilon) + \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\mu_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \frac{\mu_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varphi} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\mu_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right] + \frac{C_1 \varepsilon G}{k} - \frac{C_2 \rho \varepsilon^2}{k} \end{aligned} \quad (3b)$$

W równaniach (3a) i (3b) występują stałe wyznaczone eksperymentalnie, które stanowią domknięcie równań  $k - \varepsilon$ .

### Model uproszczony przepływu namywającego stożek osadu

Powstawanie przepływu drugorzędowego powodującego namywanie osadu w centralnej części dna zbiornika whirlpoola związane jest z tzw. efektem warstwy granicznej w ruchu wirowym cieczy. Został on opisany po raz pierwszy przez Alberta Einsteina i określony, jako „efekt filiżanki herbaty” [Kunze 1998]. Paradoks tego zjawiska sprowadzał się do tego, iż po wymieszaniu zawartości, pomimo oddziaływania siły odśrodkowej, liście herbaty koncentrowały się w centralnej strefie dna filiżanki.

Równanie (2a) w postaci ogólnej można, dla pojedynczej warstwy, sprowadzić do prostszej postaci (przy założeniu ruchu cieczy nieściśliwej i braku tarcia). Taką postać w układzie płaskim  $r, z$  zaproponował w swojej pracy Dörholt [Dörholt 1988]:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{u_\varphi^2}{r} - \varepsilon \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (4)$$

Powyższe równanie dla składowej promieniowej pozwala na wyznaczenie gradientu ciśnienia w warstwie granicznej cieczy znajdującej się przy dnie zbiornika, przy założeniu pseudo stacjonarnego charakteru ruchu:

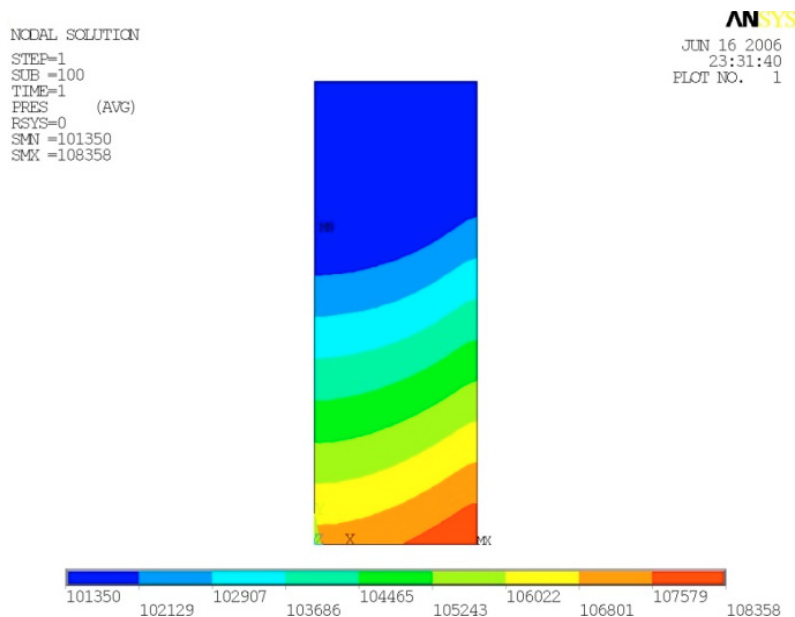
$$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \text{ a więc } \frac{\partial z}{\partial r} = 0$$

Czyniąc powyższe założenie dla pojedynczej warstwy równanie uprości się do postaci:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{u_\varphi^2}{r} \quad (5)$$

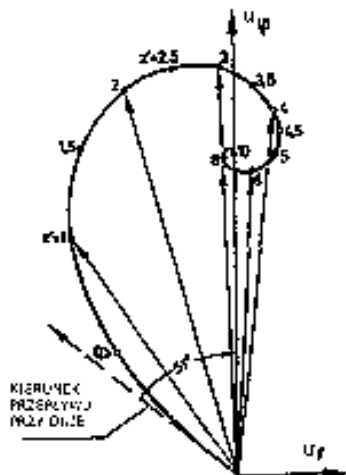
Równie (5) interpretowane jest w sposób następujący: w opisanym przypadku ruchu wirowego cieczy istnieje równowaga pomiędzy wielkością wartości ciśnienia i przyspieszeniem odśrodkowym. Analiza symulacyjna modelu komputerowego potwierdza występowanie gradientu ciśnienia w obszarze warstwy granicznej. Na rysunku 1 przedstawiono

wynik symulacji w postaci mapy nodalnych wartości rozkładu ciśnienia w przekroju zbiornika whirlpoola wypełnionego cieczą o smukłości nalewu ( $H:D = 1:1$ ). Model odpowiada laboratoryjnej kadzi wirowej [Jakubowski, Diakun 2004].



Rys. 1. Rozkład ciśnienia w cieczy wirującej w kadzi whirlpool  
 Fig. 1. Pressure distribution in liquid whirling in a whirlpool tank

Równowaga w warstwie przy dnie będzie zaburzona, ponieważ składowa kątowna prędkości w obszarze granicznej warstwy przy dnie zbiornika będzie posiadała bardzo małą wartość ze względu na spełniony warunek hamowania. Efektem tego jest powstawanie przepływu drugorzędowego w warstwie płynu przy dnie zbiornika określanej, jako tzw. warstwa Ekmana. Rozkład prędkości tego przepływu dla zmiennej wartości parametru zależnego od odległości od dna zbiornika (składowej wysokości)  $z$ , które są szczególnymi punktami równania (5) ilustruje wykres przedstawiony na rysunku 2. Opisany przepływ drugorzędowy jest zgodny ze składową promieniową, a kierunek jego oddziaływania przemieszcza cząstki cieczy (a więc i osadu) do centralnego obszaru dna zbiornika. Przy uwzględnieniu ogólnego wirowania cieczy trajektorie ruchu cząstek przy dnie posiadają kształt spiralny.



Rys. 2. Spiralny tor ruchu cząstki cieczy przy dnie zbiornika [Dörholt 1988]  
Fig. 2. Spiral trajectory of liquid particle motion at tank bottom [Dörholt 1988]

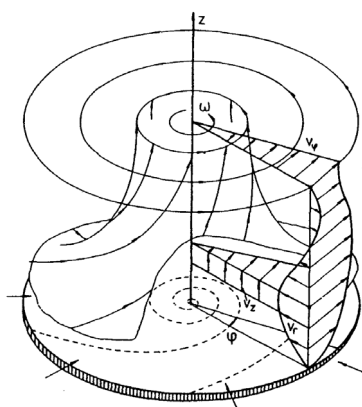
Przeprowadzone badania eksperymentalne [Kowalczyk, Diakun 2000], dla osadu zastępczego o dużej różnicy ciężaru właściwego ośrodka i osadu, potwierdzają spiralny charakter ruchu cząstek osadu w obszarze formowania stożka. Na rysunku 3 przedstawiono fotografie stożka osadu uzyskanego podczas badań z wykorzystaniem piasku kwarcowego.



Rys. 3. Stożek osadu w postaci „spiralnej rozety” [Kowalczyk, Diakun 2000]  
Fig. 3. Deposit cone in form of “spiral rosette” [Kowalczyk, Diakun 2000]

### Model Bödewadt-a

Model ruchu płynu odwzorowującego mechanizm powstawania przepływu wtórnego w obszarze granicznej warstwy przy dnie zbiornika został opracowany w 1940, dla specyficznego meteorologicznego problemu ruchu mas powietrza (znany w meteorologii, jako model Bödewadt-a). W założeniach tego modelu płyn obraca się w dużym oddaleniu od ściany jak ciało sztywne ze stałą prędkością kątową. Przepływ wtórny wykształca się nad nieskończenie długim (w kierunku promieniowym) dnem. Dla tego zagadnienia, rozpatrywanego, jako laminarne i stacjonarne, zostało opracowane ściśle rozwiązanie równania Naviera-Stokesa. Do obliczenia rozkładu prędkości kątowej w pobliżu dna przyjęto założenie oparte na rozwinięciu w szereg potęgowej prędkości w obszarze centralnym, a w dużym oddaleniu od dna, jako rozwinięcie asymptotyczne [Bödewadt 1940]. Graficzna ilustracja tego modelu została przedstawiona na rysunku 4, na którym uwidocznił się rozkład prędkości tworzący przepływ wtórny, który skierowany jest do strefy centralnej obszaru dna, oraz spiralna trajektoria ruchu płynu.



Rys. 4. Interpretacja graficzna modelu przepływu obrotowego według Bödewadt-a  
Fig. 4. Graphical interpretation of a rotational flow model according to Bödewadt

Przedstawiony model jest jednak tylko pewnym przybliżeniem do ruchu cieczy w whirlpoolu, ponieważ analiza nieskończenie rozległego przepływu obrotowego uwzględnia tylko oddziaływanie dna zbiornika, a pomija wpływ ściany.

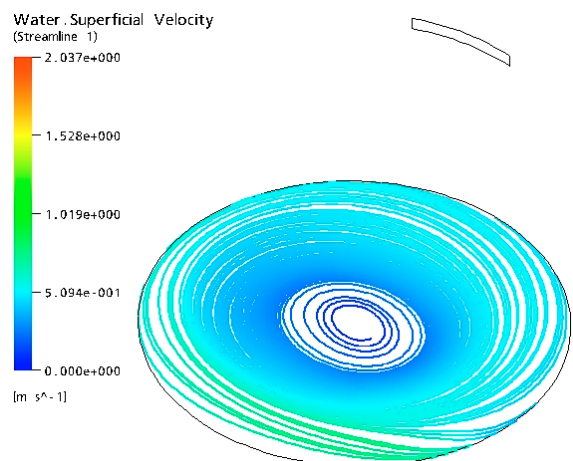
### Modele Stefaniaka

Dokładniejszy opis przepływu w zbiorniku whirlpoola umożliwiła analiza teoretyczna doświadczenia spin-down i spin-up [Stefaniak 1968]. W doświadczeniach na modelu laboratoryjnym o średnicy 450 mm i smukłości  $H:D = 1:1,5$ , przy wykorzystaniu cząstek barwiących dowiedziono istnienie opisywanego powyżej spiralnego przepływu w okolicy dna zbiornika. Analizując ruch płynu podzielono zbiornik na obszar pozbawiony tarcia i obszar w pobliżu warstwy granicznej obciążony tarcie. Dla sześciu różnych stanów ruchu

wyprowadzono równania prędkości kątowej, jako funkcji promienia zbiornika, rozkładu ciśnienia przy dnie zbiornika i kształtu swobodnej powierzchni. Analizowane przypadki to:

- stacjonarne wirowanie płynu jak ciała sztywnego (płyn i zbiornik obracają się z stałą prędkością kątową), pominięto oddziaływanie ściany;
- stacjonarne wirowanie płynu przy założonym rozkładzie prędkości kątowej odwzorowany przez funkcję kwadratową, dodatkowo założono istnienie zerowej wartości prędkości w centrum i przy ścianie zbiornika, pominięto oddziaływanie ściany zbiornika;
- stacjonarne wirowanie płynu o rozkładzie prędkości kątowej jak dla ciała sztywnego, w centrum potencjał wirowy, pominięto oddziaływanie ściany zbiornika;
- doświadczenie spin-up - nagle przyspieszenie zbiornika do stałej liczby obrotów
- doświadczenie spin-down - nagle zatrzymanie zbiornika o założeniach jak dla przypadku pierwszego. Powstaje przepływ drugorzędowy o składowej promieniowej skierowanej do wewnątrz zbiornika;
- doświadczenie spin-up spin-down - zbiornik nagle przyspieszany do określonej liczby obrotów, po czym gwałtownie zwalniany do wartości obrotów znacznie poniżej wartości maksymalnej i przyspieszany ponownie do wartości maksymalnej.

Przeprowadzona analiza symulacyjna własnych obliczeń na podstawie równań (1, 2, 3) pełnego nalewu i wirowania płynu w zbiorniku whirlpoola umożliwiła wizualizację wtórnego spiralnego przepływu skierowanego do centralnej części dna zbiornika (rys. 5). Zagadnienie modelowano wprost jako realizację nalewu płynu stycznie do zbiornika o wymiarach właściwych dla posiadanego obiektu eksperymentalnego w postaci laboratoryjnej kadzi wirowej [Diakun, Jakubowski 2004].



Rys. 5. Wyniki w postaci linii opływu dla prędkości płynu w obszarze zbliżonym do dna zbiornika - model trójwymiarowy

Fig. 5. Results in form of flow round line for fluid velocity within the area close to tank bottom - a three-dimensional model

## Podsumowanie

1. Pełny opis ruchu płynu w kadzi wirowej whirlpool może być modelowany na podstawie równań różniczkowych ciągłości przepływu, zachowania pędu i parametrów ewolucji turbulencji. Ten układ równań nie jest rozwiązywalny analitycznie, a więc możliwe jest wyłącznie uzyskanie rozwiązania na drodze komputerowych obliczeń symulacyjnych.
2. Uprozczone rozwiązanie ogólnego równania zachowania pędu dla pojedynczej warstwy płynu, zaproponowane przez Dörholta umożliwia wyjaśnienie powstawania wtórnego przepływu odpowiedzialnego za powstawanie stożka osadu w whirlpoolu.
3. Otrzymane analitycznie, oraz na drodze symulacji komputerowych, rozwiązania spiralnych trajektorii ruchu cząstek płynu w warstwie znajdującej się przy dnie zbiornika (warstwie Ekmana) potwierdzone są eksperymentalnie.

## Bibliografia

- Bödewadt U. T.** 1940. Die Drehströmung über festem Grunde, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 20, Nr. 5. s. 241-253.
- Diakun J., Jakubowski M.** 2004. Symulacja ruch wirowego cieczy w kadzi wirowo – osadowej, Inżynieria Rolnicza, 5(60). s. 59-67.
- Denk V.** 1997. The Whirlpool - State of the Art. Brauwelt International, 15. s. 31-43
- Dürholt A.** 1988. Experimentelle Untersuchung der instationären Drehströmung im Absetzbehälter "Whirlpool". Fortschritt-Berichte VDI Reihe 14, Nr. 38. VDI-Verlag, Düsseldorf.
- Kazimierski Z.** 2004. Podstawy mechaniki płynów i metod komputerowej symulacji przepływów, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź.
- Kowalczyk W., Diakun J.** 2000. Wpływ koncentracji zawiesiny na proces rozdzielania w kadzi wirowo – osadowej. Zeszyty Naukowe Politechniki Opolskiej nr 256/, Mechanika 61. s. 181-188.
- Kunze W.** 1998. Technologie Brauer und Mälzer. VLB, Berlin.
- Michel R.** 1989. Grundlegende Mechanismen der Heißtrubabscheidung im Whirlpool, Technischen Universität München, Dissertation.
- Stefaniak, H. St.** 1968. Zur Wirkungsweise des Whirlpools, Brauwissenschaft 21, Nr. 9, S. 337-342, Nr. 10. s. 390-396.
- Troskoleński A.T.** 1969. Hydromechanika. WNT. Warszawa.

*Praca naukowa finansowana ze środków na naukę w latach 2007–2008 jako projekt badawczy Nr N502 008 32/0963*



## FLUID MOTION IN WHIRLPOOL WHIRL TANK

**Abstract:** Paper presents the mathematical descriptions of the liquid flow in the whirl-settling vat that explain formation of the secondary flow responsible for the hot trub cone forming. The full rotating fluid flow in the whirlpool vessel, the simplified solution describing formation of the secondary flow in the boundary layer near the bottom vessel and the computational model of the rotating liquid flow in the whirl-settling vat has been presented.

**Key words:** mathematical model, whirlpool, secondary flow, hot trub cone

**Adres do korespondencji:**

Marek Jakubowski; e-mail: [marek@tu.koszalin.pl](mailto:marek@tu.koszalin.pl)  
Katedra Inżynierii Spożywczej i Tworzyw Sztucznych  
Politechnika Koszalińska  
ul. Raławicka 15/17  
75-620 Koszalin