

ZASTOSOWANIE MODELU GOMPERTZ'A W INŻYNIERII ROLNICZEJ

Zofia Hanusz

Katedra Zastosowań Matematyki, Uniwersytet Przyrodniczy w Lublinie

Zbigniew Siarkowski, Krzysztof Ostrowski

Katedra Maszyn i Urządzeń Rolniczych, Uniwersytet Przyrodniczy w Lublinie

Streszczenie. W pracy przedstawiono charakterystykę modelu Gompertz'a. Opisano znaczenie parametrów występujących w modelu. Pokazano typowe wykresy funkcji oraz przykłady zastosowania ich w rolnictwie. Zasygnalizowano możliwość wykorzystania modelu w optymalizujących systemach ekspertowych dla producentów rolnych.

Słowa kluczowe model Gompertz'a, inżynieria, rolnictwo

Wstęp

Model Gompertz'a [Seber i in. 1989] stosowany był dotychczas w naukach rolniczych głównie do oceny zmian masy ciała zwierząt (brojlerów kurzych, tuczników) w trakcie tuczu. Produkcja brojlerów kurzych czy tuczników wymaga bowiem stosowania bardzo dokładnych metod oceny wzrostu masy ciała w zależności od systemu żywienia i stosowanych pasz. Metody te są szczególnie ważne w trakcie projektowania procesu produkcyjnego. Wyniki badań żywieniowych wykazały dużą zgodność wartości prognozowanych modelem Gompertz'a z rzeczywistymi wartościami przyrostów masy ciała. W pracy przedstawimy możliwość zastosowania modelu Gompertz'a w zagadnieniach inżynierii rolniczej. Model ten może być także stosowany do określenia jednostkowych kosztów eksploatacji ciągników, maszyn i urządzeń w zależności od czasu ich rocznego wykorzystania oraz uzyskiwanych wydajności eksploatacyjnych. Określenie modelu wymaga rozpatrzenia nowej klasy równań podwójnie wykładniczych, w których podstawą potęgi niekoniecznie musi być liczba Eulera. W pracy przedstawimy możliwość opracowywania zależności opisującej wpływ wielu zmiennych na wartość podstawy potęgi oraz współczynnik liniowy występujący w wykładniku potęgi. Występujące w modelu parametry mają swoją interpretację w przebiegu procesu wzrostu badanej cechy lub zmian jednostkowych kosztów eksploatacji maszyn.

Cel pracy

Celem pracy jest prezentacja możliwości wykorzystania modelu Gompertz'a do opisu i analizy przebiegu krzywych wzrostu dla zmian jednostkowych kosztów eksploatacji

maszyn oraz interpretacja parametrów w nim występujących. Metoda zostanie zweryfikowana na przykładzie wyników badań przyrostów brojlerów kurzych, opublikowanych przez Podgórskiego [1999] w rozprawie habilitacyjnej.

Przyjęta postać funkcji podwójnie wykładniczej umożliwia rozpatrywanie parametrów funkcji nie tylko jako wielkości constans, ale również jako funkcji wielu zmiennych opisujących warunki, w jakich przebiegał proces tuczu lub inny proces technologiczny, np. nawożenie organiczne nawozami płynnymi.

Metodyka badań

Rozważmy funkcję podwójnie wykładniczą postaci:

$$f(x) = \alpha \exp(\beta - \lambda e^{-\kappa(x-\gamma)}), \quad (1)$$

gdzie

α , β , λ , κ oraz γ są nieznanymi parametrami.

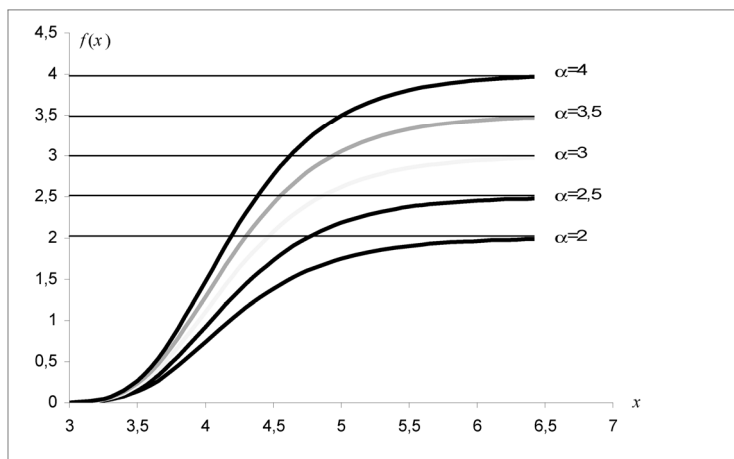
Stosując powyższą funkcję do opisu interesującego doświadczalnika zjawiska należy oszacować nieznanne parametry modelu oraz określić ich interpretacje w kontekście tego zjawiska. Z uwagi na złożoność modelu, można dokonać jego reparametryzacji, uzyskując model Gompertz'a postaci [Seber 1989]:

$$f(x) = \alpha \exp(-e^{-\kappa(x-\gamma)}). \quad (2)$$

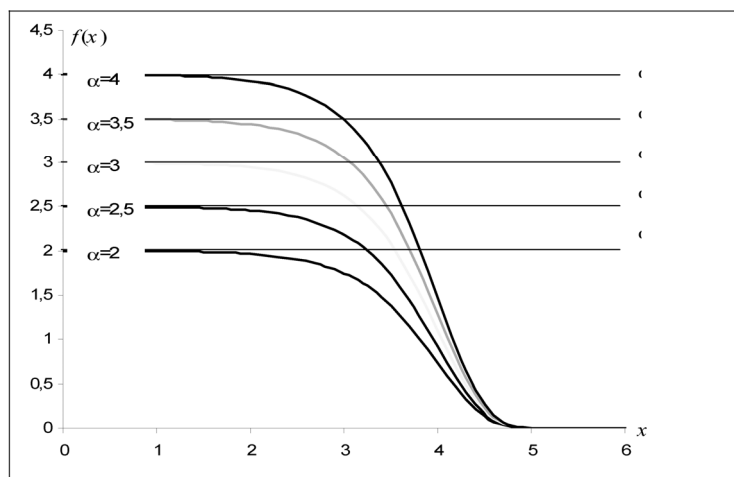
Analizę wpływu wartości parametrów α , κ oraz γ na kształt funkcji opisanej równaniem (2) przeprowadzimy poprzez zmianę jednego z parametrów przy ustaleniu pozostałych.

Wpływ parametru α na wykres funkcji

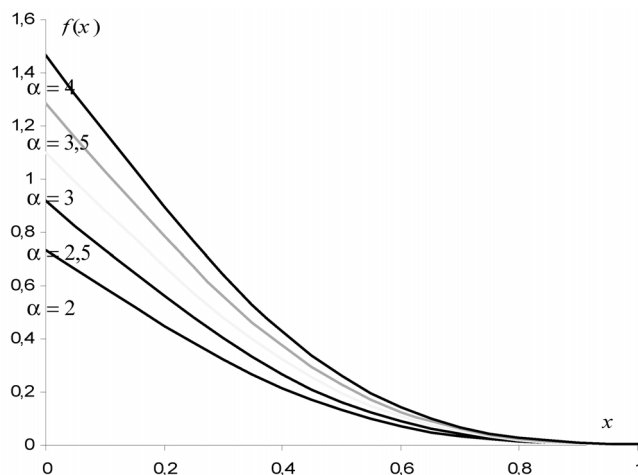
Badanie wpływu parametrów na wykres funkcji rozpoczniemy od zbadania wpływu parametru α , przy ustaleniu parametrów κ i γ . Uzyskane wyniki dla $\kappa = 2$ i $\gamma = 4$ przedstawia rys. 1. Można zauważyć, że parametr α wpływa na zakres zmienności zmiennej zależnej y . Wartość tego parametru jest granicą w nieskończoności funkcji $f(x)$. Reasumując, parametr α określa asymptotę poziomą funkcji, tzn. $y = \alpha$. Jeżeli parametr κ przyjmie wartość ujemną, np. $\kappa = -2$ i $\gamma = 4$, wykresy funkcji przyjmą postać przedstawioną na rys. 2. Dla $\kappa = -2$ oraz ujemnych wartości γ bliskich zeru, np. $\gamma = -0,001$, przebieg funkcji ma kształt taki jak na rys. 2, przesunięty w lewo wzdłuż osi OX. Dla dodatnich argumentów funkcje mają kształt przedstawiony na rys. 3. Rodzaj zależności przedstawiony na rys. 3. przesunięty wzdłuż osi OY może być wykorzystany do opisu jednostkowych kosztów eksploatacji maszyn rolniczych.



Rys. 1. Wpływ parametru α na kształt funkcji
Fig. 1. The α parameter impact on function graph



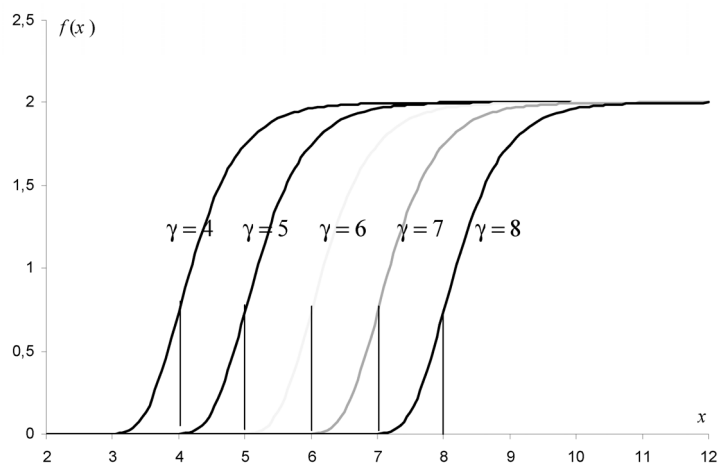
Rys. 2. Wpływ parametru α na kształt funkcji, dla ujemnych wartości κ
Fig. 2. The α parameter impact on function graph, for negative values of κ



Rys. 3. Wpływ parametru α na kształt funkcji, dla ujemnych wartości κ i γ
 Fig. 3. The α parameter impact on function graph, for negative values of κ and γ

Wpływ parametru γ na wykres funkcji

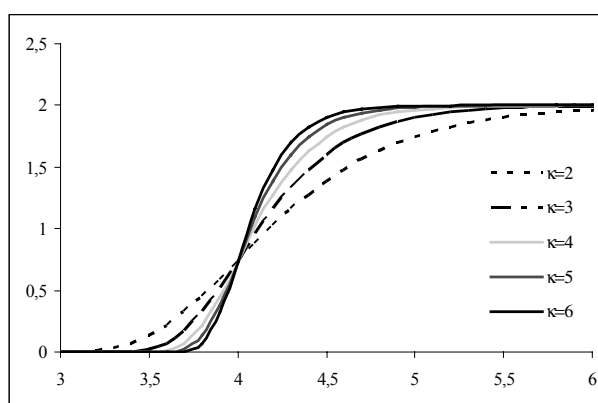
Przyjmijmy, że $\alpha = 2$ i $\kappa = 2$, natomiast zmieniać będziemy parametr γ . Uzyskane wyniki przedstawia rys. 4. Można zauważyć, że parametr γ wpływa jedynie na przesunięcie funkcji względem osi OX i określa punkt przegięcia funkcji. Można, bowiem pokazać, że pochodna funkcji opisanej równaniem (2) zeruje się w punkcie $x = \gamma$.



Rys. 4. Wpływ parametru γ na kształt funkcji
 Fig. 4. The γ parameter impact on function graph

Wpływ parametru κ na wykres funkcji

Przyjmijmy, że $\alpha = 2$ i $\gamma = 4$ natomiast zmieniany będzie parametr κ . Uzyskane wyniki dla różnych wartości κ przedstawia rys. 5. Można zauważyć, że κ wpływa na szybkość spłaszczenia funkcji. Wszystkie funkcje na rys. 5 posiadają ten sam punkt przegięcia o odciętej $x = \gamma = 4$. Zakres zmienności funkcji wynosi od zera do $y = \alpha = 2$. Ogólnie można stwierdzić, że wzrost wartości parametru κ powoduje szybszą zbieżność do asymptoty poziomej.

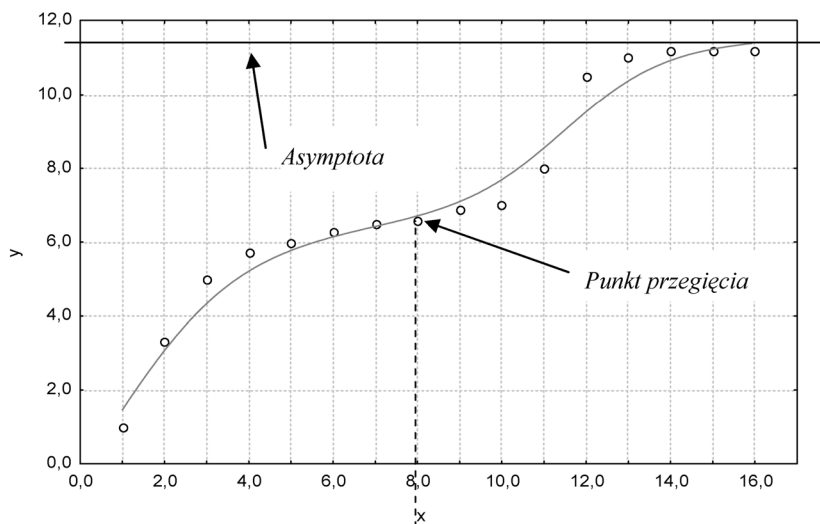


Rys. 5. Wpływ parametru κ na kształt funkcji
Fig. 5. The κ parameter impact on function graph

Reasumując możemy stwierdzić, iż każdy z parametrów w funkcji wzrostu Gompertza ma swoją interpretację. Ułatwia ona wstępny dobór parametrów w procedurze symulacyjnej szukania funkcji najlepiej pasującej do punktów doświadczalnych.

Zastosowanie

Omówioną w pracy funkcję Gompertza opisaną równaniem (2) wykorzystamy do opisu masy ciała brojlerów kurzych (zmienna zależna – y , [g]) od czasu tuczu (zmienna niezależna – x , [tyg.]) dla wyników uzyskanych przez Podgórskiego [1999]. Wyniki eksperymentalne oraz uzyskaną funkcję dopasowania przedstawia rys. 6. Jak pokazano na rys. 6, uzyskana krzywa ma asymptotę poziomą $y=11,2$ i punkt przegięcia dla $x=9$. Ważne dla praktyki są szybkości wzrostu w przedziałach od 1 do 9 oraz od 9 do 16, wyodrębnionych jako charakterystyczne etapy rozwoju organizmów brojlerów. Współczynnik determinacji dopasowania funkcji do punktów doświadczalnych wynosi 0,96.



Rys. 6. Krzywa Gompertz'a dla masy ciała brojlerów w kolejnych tygodniach tuczu
 Fig. 6. Gompertz curve for broiler body weight during successive weeks of fattening

W powyższej aplikacji rozważono zależność masy ciała brojlerów jedynie od czasu tuczu. Problematykę można uogólnić na przypadek k niezależnych czynników mających wpływ na masę ciała brojlerów.

Podsumowanie

W pracy przedstawiono model Gompertz'a, który może być stosowany do opisu zjawisk biologicznych. Pokazano wpływ parametrów modelu na kształt wykresów. Omówiono interpretację występujących w modelu parametrów. Zastosowanie funkcji Gompertz'a przedstawiono na przykładzie danych eksperymentalnych dotyczących masy ciała brojlerów zmieniających się w czasie tuczu. W pracy wskazano także możliwość stosowania modelu do opisu zjawisk zachodzących w inżynierii rolniczych. Funkcję Gompertz'a można zastosować do opisu takiej cechy, dla której istnieje pewien kres górny przyjmowania wartości (istnieje asymptota pozioma). Ponadto opisywana cecha powinna charakteryzować się tym, że przyrosty danej cechy w czasie rosną szybciej do pewnego punktu (występuje punkt przegięcia) a potem wolniej. Z tego też względu, funkcja opisana równaniem (2) nadaje się często do opisu zjawisk związanych z procesami życiowymi w przyrodzie ale także do opisu np. zmian jednostkowych kosztów eksploatacji maszyn. Wszystkie krzywe opisujące wzrost i rozwój organizmu oraz proces starzenia się organizmów lub urządzeń rolniczych można zatem opisywać krzywymi omówionymi w pracy. Inne zastosowania funkcji Gompertz'a dotyczą zagadnień ekonomicznych związanych ze wzrostem bądź spadkiem wielkości ekonomicznych.

Bibliografia

- Podgórski W.** 1999. Oddziaływanie termiczne środowiska na przemianę materii i bilans energetyczny brojlerów kurzych. Rozprawa habilitacyjna. Wyd. AR w Lublinie.
- Seber G.A.F., Wild C.J.** 1989. Nonlinear Regression. New York. Wiley, s. 325-365.

APPLICATION OF THE GOMPERTZ MODEL IN AGRICULTURAL ENGINEERING

Abstract. The paper presents characteristics of the Gompertz model. Definitions of parameters occurring in the model have been provided. Typical function graphs and examples of their application in agriculture are shown, and possibility to use the model in optimising expert systems for agricultural manufacturers is indicated.

Key words: Gompertz model, engineering, agriculture

Adres do korespondencji:

Zofia Hanusz; e-mail: zofia.hanusz@ar.lublin.pl
Katedra Zastosowań Matematyki
Uniwersytet Przyrodniczy w Lublinie
ul. Akademicka 13
20-950 Lublin