Inżynieria Rolnicza 2(90)/2007

PORÓWNANIE METOD OKREŚLANIA FUNKCJI CELU PRZY DOBORZE ROZSIEWACZY NAWOZÓW MINERALNYCH

Zofia Hanusz
Katedra Zastosowań Matematyki, Akademia Rolnicza w Lublinie

Magdalena Ćwiklińska
Katedra Zastosowań Matematyki, Akademia Rolnicza w Lublinie

Zbigniew Siarkowski
Katedra Maszyn i Urządzeń Rolniczych, Akademia Rolnicza w Lublinie

Streszczenie. W pracy porównano różne metody badania jakości dopasowania krzywej regresyjnej. Uzyskane wyniki mogą być wykorzystywane przy podejmowaniu decyzji odnośnie sposobu poszukiwania postaci funkcji celu przy doborze maszyn do realizacji rolniczych procesów produkcyjnych. Zamieszczony przykład dotyczy doboru urządzeń do nawożenia mineralnego w gospodarstwie prowadzącym produkcję zbóż.

Słowa kluczowe: rozsiewacze, nawozy mineralne, kryterium wyboru funkcji, dobór parametrów

Wstęp

W wielu zagadnieniach rolniczych istotnym problemem badawczym jest poszukiwanie funkcji opisującej uzyskane wyniki eksperymentalne. W pracach Siarkowskiego [2001] oraz Hanusz i in. [2005] przedstawiona została ogólna metodyka postępowania, mającą na celu uzyskanie postaci analitycznej funkcji, najlepiej opisującej wartości zaobserwowane w trakcie badań. Pojawia się jednak pytanie, co to znaczy „najlepiej opisującej" stan zaobserwowany? Wiadomym jest, że do wyznaczenia nieznanych parametrów poszukiwanej funkcji, stosuje się metodę najmniejszych kwadratów, która minimalizuje sumę kwadratów odchyleń wartości zaobserwowanych od wartości oszacowanych równaniem regresji. Wartość szacowaną zmiennej objaśnianej, opisywanej równaniem regresji dla zadanej wartości, uzyskuje się rzutując punkt doświadczalny (x_i, y_i) na wykres funkcji, ortogonalnie do osi OX. Metoda najmniejszych kwadratów jest powszechnie stosowana w regresji liniowej, do wyznaczenia funkcji liniowej, funkcji wielomianowych, regresji wielokrotnej oraz takich funkcji, w których przez odpowiednie przekształcenia zmiennych objaśniających uzyskuje się funkcję liniową. Korzystając z pakietów statystycznych (np. SAS, Statistica, Excel) możemy uzyskać najlepiej pasujące funkcje do danych eksperymentalnych wraz ze współczynnikami determinacji, określającymi stopień dopasowania uzyskanej funkcji. W praktyce, np. przy powtarzanych pomiarach dla tych samych wartości zmiennej niezależnej *X* opisującej zmienną zależną *Y*, minimalizowana jest suma kwadratów różnic wartości średnich $\overline{y}_i$ dla różnych x_i od średniej globalnej $\overline{y}$, gdzie $i = 1, 2, \cdots, \mathrm{I}$ oraz I jest liczbą różnych wartości zmiennej objaśniającej. Wynika to z faktu, iż rzuty punktów o tej samej odciętej dają tą samą wartość szacowaną. Można, zatem powiedzieć, że poszczególne wartości zmiennej objaśniającej są zaniedbywane w metodzie najmniejszych kwadratów. Ponadto w zagadnieniach, w których poszukiwana funkcja nie należy do klasy funkcji linowych, problem wyznaczania parametrów staje się bardziej skomplikowany. Metoda najmniejszych kwadratów prowadzi bowiem do uzyskania takich układów równań, które nie dają się na ogół rozwiązać explicite [Drapper i in. 1998; Seber i in. 1989].

W pracy proponujemy metodę dopasowywania funkcji opartej na ortogonalnych rzutach punktów eksperymentalnych na styczne do szukanej funkcji regresji.

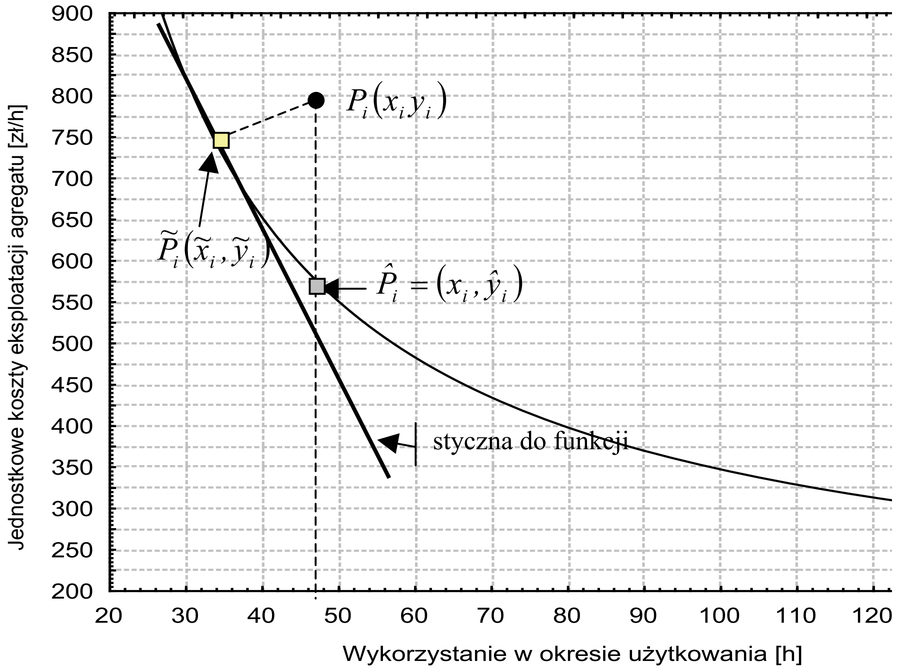
Cel pracy

Poszukiwanie wielowymiarowych zależności analitycznych opisujących wyniki badań opiera się często na postępowaniu wieloetapowym. W pierwszym etapie, dla pewnego podzbioru danych, poszukuje się postaci funkcyjnej opisującej zależność zmiennej objaśnianej od zmiennych objaśniających. W kolejnych etapach parametry w uzyskanej zależności funkcyjnej podlegają uzmiennianiu. W takim postępowaniu nie zawsze jest możliwe bezpośrednie zastosowanie metody najmniejszych kwadratów do oszacowania parametrów równania. A zatem, w takich sytuacjach, nie można także w sposób bezpośredni określić współczynnika determinacji. W celu rozwiązania problemu podjęto próbę opracowania nowego sposobu określania jakości dopasowania krzywej do punktów eksperymentalnych. Jako kryterium dopasowania krzywej do punktów pomiarowych przyjęto sumę kwadratów odległości punktów doświadczalnych od punktów będących rzutami na wykres funkcji. Metoda zostanie zilustrowana przykładem, w którym oszacowana zostanie wielokryterialna funkcja celu przy doborze rozsiewaczy nawozów mineralnych.

Metody porównania jakości dopasowania krzywej regresyjnej

Drapper i Smith w fundamentalnej książce "*Applied Regression Analysis*" pokazują, że teoria regresyjna, której celem jest dopasowanie funkcji do punktów eksperymentalnych, wykorzystuje rzut prostopadły do osi OX punktów na wykres funkcji. Szacowanie nieznanych parametrów w funkcji regresji oparte jest na metodzie najmniejszych kwadratów, w której do punktów empirycznych $P_i(x_i, y_i)$ $(i = 1,2,\cdots,n)$ dopasowuje się funkcję regresji w taki sposób, aby $\sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i)]^2$ osiągała minimum.

Wyznaczenie parametrów minimalizujących funkcję kwadratowych odchyleń wartości doświadczalnych od szacowanych równaniem regresji jest dość proste, jeśli poszukiwanymi funkcjami są funkcje liniowe. Łatwo zauważyć, że odległość punktu $P_i(x_i, y_i)$ od jego rzutu ortogonalnego $\hat{P}_i(x_i, \hat{y}_i)$ na wykres funkcji jest większa niż odległość rzutu tego punktu na styczną do wykresu funkcji (rys. 1). W związku z powyższym, w pracy proponujemy metodę dopasowania funkcji wykorzystującej rzut prostopadły punktów doświadczalnych na styczne do wykresu funkcji. Zasadne jest pytanie czy takie podejście w ogóle ma sens i czy może ono zostać zaakceptowane przez doświadczalników. Należy zauważyć, że z punktu widzenia doboru funkcji zależności powinniśmy kierować się nie tylko łatwością rozwiązania problemu, ale też adekwatnością modelu do danych doświadczalnych. W zagadnieniach naukowych, w których do opisu zjawisk stosuje się funkcje nieliniowe, np. funkcje wymierne czy funkcje wykładnicze, do szacowania nieznanych parametrów powinno zastosować się metodę taką, która pozwoli najlepiej oszacować prognozowaną wartość. Dla funkcji nieliniowej na ogół nie jesteśmy w stanie podać explicite wzorów na nieznane parametry i do oszacowania parametrów musimy wykorzystać metody numeryczne. Jak już wspomniano, podobny problem pojawia się także w metodzie uzmienniania stałych przy wielokryterialnym doborze funkcji celu lub gdy postać funkcji jest złożona bądź podana w postaci uwikłanej. Wówczas zastosowanie metody rzutu prostopadłego do osi OX może dać gorsze rezultaty niż metoda zaproponowana w pracy. W dobie szybkich komputerów proponowana metoda może być z powodzeniem stosowana do poszukiwania bardziej skomplikowanych funkcji regresji.



Rys. 1. Miara dopasowania jako suma kwadratów rzutów na styczne do funkcji
Fig. 1. Fitting measure as a sum of square of the throw to the tangent line to the function

Szacowanie parametrów dla funkcji nieliniowych

Do szacowania parametrów w funkcji celu proponujemy metodę, która polega na minimalizacji sumy kwadratów odległości punktów doświadczalnych od ich rzutów na wykres funkcji wzdłuż prostej prostopadłej do najbliższej stycznej, czyli sumy kwadratów długości odcinków $\left|P_i\widetilde{P}_i\right|$, gdzie P_i $(i=1,2,\cdots,n)$ oznacza punkt doświadczany, natomiast $\widetilde{P}_i$ jego rzut na styczną do wykresu funkcji $y=f(x)$. Należy przy tym zauważyć, że x może oznaczać jedną zmienną objaśniającą lub wektor składający się z kilku zmiennych objaśniających. Jak widać z rys. 1, odcinki $\left|P_i\widetilde{P}_i\right|$ są nie dłuższe niż odcinki $\left|P_i\hat{P}_i\right|$. Ponieważ odcinki $\left|P_i\widetilde{P}_i\right|$ dotyczą rzutów prostopadłych punktów doświadczalnych na styczną, zatem są one trudniejsze do wyznaczenia niż rzuty prostopadłe do osi OX. Można jednocześnie zauważyć, że jeśli punkty leżą odpowiednio blisko szukanej krzywej wówczas proponowana w pracy metoda będzie dawała podobne wyniki do uzyskanych w metodzie najmniejszych kwadratów, gdyż odcinki $\left|P_i\widetilde{P}_i\right|$ i $\left|P_i\hat{P}_i\right|$ $(i=1,2,\cdots,n)$ będą sobie w przybliżeniu równe, bądź identyczne dla punktów leżących na szukanej krzywej. Powszechnie stosowany rzut prostopadły do osi OX gorzej wyjaśnia badane zjawisko od proponowanego rzutu na styczną. Ponadto można zauważyć, że rzut na styczną daje lepszą interpretację jakości dopasowania równania, gdyż oprócz postaci funkcji regresji uzyskujemy także postać jej pochodnej. Metoda może być zatem wykorzystana do określania postaci równań różniczkowych opisujących badany proces. Zagadnienie to nie będzie jednak przedmiotem rozważań w niniejszej pracy.

Program do wyznaczania postaci funkcji celu

Do realizacji celu pracy opracowano program komputerowy do obliczania odległości punktu $P_i(\mathbf{x}_i, y_i)$, gdzie y_i oznacza wartość zmiennej objaśnianej, natomiast $\mathbf{x}_i$ jest $(k\times 1)$ wymiarowym wektorem zmiennych objaśniających, od powierzchni regresyjnej $y=f(\mathbf{x})$ dopasowanej do tych punktów. Danymi w programie są: liczba punktów eksperymentalnych n, punkty doświadczalne: $P_i(\mathbf{x}_i, y_i)$, $i=1,2,\cdots,n$ oraz postać funkcji $y=f(\mathbf{x})$. Odległości punktów oblicza się numerycznie, jako najkrótsze długości odcinków łączących punkty $P_i(\mathbf{x}_i, y_i)$ z wykresem funkcji $y=f(\mathbf{x})$. Procedurę wyznaczania rzutów punktów na powierzchnię opisaną funkcją $y=f(\mathbf{x})$ można przedstawić za pomocą następujących etapów.

1. Ustalamy zakresy zmian zmiennych niezależnych x_j $(j=1,2,\cdots,k)$ w postaci przedziałów $[a_j,b_j]$, gdzie $a_j=x_{j,\min}-\Delta x_j$, $b_j=x_{j,\max}+\Delta x_j$ oraz wartości $x_{j,\min}$, $x_{j,\max}$ oznaczają odpowiednio najmniejszą albo największą zaobserwowaną wartość dla zmiennej niezależnych x_j, natomiast Δx_j jest pewną nieujemną liczbą, o którą można przekroczyć zaobserwowany zakres zmienności dla zmiennej x_j. Obszarem poszukiwań rzutów punktów na powierzchnię jest iloczyn kartezjański przedziałów w postaci $Df=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_k,b_k]$. Dobór wielkości Δx_i wynika z faktu, że niektóre współrzędne rzutów na płaszczyzny styczne do powierzchni mogą leżeć poza obszarem $[x_{1,\min},x_{1,\max}]\times[x_{2,\min},x_{2,\max}]\times\cdots\times[x_{k,\min},x_{k,\max}]$.

2. Dla każdego punktu doświadczalnego $P_i(\mathbf{x}_i, z_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ poszukujemy takiego punktu $P_{i0}(\mathbf{x}_{0i}, f(\mathbf{x}_{0i}))$, gdzie $\mathbf{x}_{0i} \in Df$, dla którego odcinek łączący te punkty ma najkrótszą długość. W związku z tym, oblicza się numerycznie odległości dla punktów $P(\mathbf{x}_i + \mathbf{h}, f(\mathbf{x}_i + \mathbf{h}))$, gdzie $\mathbf{x}_i + \mathbf{h} \in Df$ oraz $\mathbf{h} = [h_1, h_2, \cdots, h_k]$ jest przyjętym wektorem wartości krokowych h_j. Przyjęte wartości kroku są jednocześnie dokładnością z jaką zostanie wyznaczony rzut na powierzchnię. Metodę wyznaczania rzutów można optymalizować, np. poprzez wprowadzenie zmiennego kroku h_{jt}, $j = 1, 2, \cdots, k$; $t = 1,2,\cdots,T$ i T jest liczbą zmian. Wartości pierwszego kroku powinny być większe od następnych, aby z grubsza oszacować rzut. W następnych iteracjach należy zmniejszać krok, aby bardziej dokładnie wyznaczyć poszukiwany rzut na powierzchnię. Jeszcze inny sposób wyznaczania rzutów daje możliwość określenia kierunku poszukiwania minimalnej odległości a następnie należy poszukiwać rzutu ze zmiennym krokiem w wyznaczonym kierunku.

Powyższe postępowanie jest proste do oprogramowania, a jedynym ograniczeniem jest czas obliczeń, wynikający głównie z przyjętego kroku h z jakim zmieniają się wartości zmiennych niezależnych $\mathbf{x} + \mathbf{h}$. Ponadto, powyższa metoda może być wykorzystana do numerycznego wyznaczania wartości pochodnej funkcji w punktach $P_{i0}(\mathbf{x}_{i0}, f(\mathbf{x}_{i0}))$, $i = 1, 2, \cdots, n$. Wartości pochodnej zostaną określone dla innych wartości zmiennych zależnych niż te, które zostały określono w badaniach. Z punktu widzenia przebiegu całej pochodnej nie ma to jednak istotnego znaczenia. Postępując analogicznie w stosunku do krzywej będącej pochodną funkcji można wyznaczyć krzywą regresji opisująca pochodną i tak dalej, aż do uzyskania pochodnej wymaganego rzędu o ile jest ona różna od zera.

Ocena metod dopasowywania funkcji celu

Porównanie metody doboru funkcji zależności w oparciu o rzuty punktów doświadczalnych na styczne z wynikami dla metody najmniejszych kwadratów zostanie przedstawione na przykładzie wielokryterialnej funkcji celu przy doborze rozsiewaczy nawozów mineralnych. Rozważmy funkcję uzyskaną poprzez uzmiennianie stałych postaci [Hanusz i in. 2006]:

$$z_1 = f_1(x_1, x_2) = \frac{\left(0{,}0129x_2^3 - 0{,}108x_2^2 + 0{,}232x_2\right)x_1 + 1{,}43x_2^3 - 11{,}85x_2^2 + 27x_2}{\left(0{,}000255x_2^3 - 0{,}00278x_2^2 + 0{,}0078x_2\right)x_1 + 0{,}000184x_2^3 - 0{,}0015x_2^3 + 0{,}00145x_2} \qquad (1)$$

Dla funkcji opisanej równaniem (1) istnieje problem określenia współczynnika determinacji, gdyż poszczególne człony równania określane były w odrębnych krokach postępowania. Za ocenę dopasowania funkcji przyjęto błąd średniokwadratowy dopasowania S_e, równy pierwiastkowi średniego kwadratu odchyleń wartości obserwowanych od wartości regresyjnych. Dla funkcji określonej wzorem (1) błąd średniokwadratowy wynosi 31,12.

Zastosowanie rzutu prostopadłego punktów doświadczalnych na styczne do funkcji opisanej równaniem (1) dało wyniki, które zamieszczono w tabeli 1. W tym przypadku wartości drugiej zmiennej objaśniającej x_{2i} i rzutów były takie same, co wynikało z faktu, że poszczególne człony funkcji (1) określane były dla takich samych wartości x_{2i}. Z wyników zamieszczonych w tabeli 1 wynika, że największe błędy dopasowania dotyczą wydajności agregatu wynoszącej 6,19 $\text{ha} \cdot \text{h}^{-1}$ i dochodzą do 21 $\text{zł} \cdot \text{h}^{-1}$ dla rocznego wykorzystania równego 200 *h*. Przeciętna odległość wszystkich punktów doświadczalnych od krzywej opisanej równaniem (1) wynosi 6,45.

Tabela 1. Odległości wartości kosztów eksploatacji agregatów do nawożenia mineralnego od powierzchni opisanej funkcją (1) dla wybranych danych eksperymentalnych
Table 1. The distance of operating costs values of units for mineral fertilization from the surface described by function (1) for the chosen experimental data.

i	x_{1i}	x_{2i}	$z_1(x_{1i}, x_{2i})$	x_{0i}	$z_1(x_{0i}, x_{2i})$	$z_1(x_{1i}, x_{2i})$ - $z_1(x_{0i}, x_{2i})$
1	30,000	1,030	130,154	30,600	128,110	0,628
2	60,000	1,030	78,004	60,800	77,317	1,198
3	90,000	1,030	60,613	90,500	60,420	1,296
4	100,000	1,030	57,134	100,400	57,009	1,249
5	200,000	1,030	41,478	200,100	41,470	1,099
6	300,000	1,030	36,259	300,000	36,259	1,033
7	400,000	1,030	33,649	400,000	33,649	0,998
8	500,000	1,030	32,083	500,000	32,083	0,977
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
52	700,000	6,190	193,243	701,000	193,194	20,209
53	800,000	6,190	188,998	800,700	188,972	19,626
54	900,000	6,190	185,698	900,600	185,680	19,117
55	1000,000	6,190	183,060	1000,400	183,050	18,772
56	1250,000	6,190	178,314	1250,300	178,310	18,115

Porównanie obydwu metod dla funkcji opisanej równaniem (1) pokazuje, że metoda rzutowania na styczną daje dokładniejszą ocenę dopasowania krzywej a średnia odległość punktów pomiarowych (kosztów eksploatacji agregatów do nawożenia mineralnego) od dopasowanej krzywej wynosi 6,45 $\text{zł} \cdot \text{h}^{-1}$ wobec 31,12 $\text{zł} \cdot \text{h}^{-1}$ dla rzutowania prostopadłego do osi OX.

Przeprowadzono także analizę porównawczą dla funkcji wyznaczonej bezpośrednio z metody najmniejszych kwadratów. Dla tych samych danych eksperymentalnych funkcja przyjmuje następującą postać:

$$y = z_2(x_1, x_2) = \frac{18{,}154 x_1 x_2^3 - 109{,}18 x_1 x_2^2 + 204{,}713 x_1 x_2 + 5932{,}5}{6{,}611 x_1 - 141{,}28} \tag{2}$$

Dla funkcji określonej równaniem (2) jest możliwe określenie współczynnika determinacji R^2, który wynosi 0,96, natomiast błąd średniokwadratowy dopasowania jest równy $S_e = 25{,}09$. W celu ilustracji uzyskanych rezultatów, w tabeli 2 zamieszczono wyniki obliczeń rzutów punktów na styczną dla wybranych danych eksperymentalnych. Z wyników podanych w tej tabeli wynika, że największe błędy dopasowania dotyczą wydajności agregatu równej 6,19 $\text{zł} \cdot \text{h}^{-1}$ i dochodzą do 6 $\text{zł} \cdot \text{h}^{-1}$ dla rocznego wykorzystania równego 400 *h*. Średnia odległość wszystkich punktów od krzywej (2) wynosi 2,08.

Tabela 2. Odległości wartości kosztów eksploatacji agregatów do nawożenia mineralnego od powierzchni opisanej funkcją (2) dla wybranych danych eksperymentalnych
Table 2. The distance of operating costs values of units for mineral fertilization from the surface described by function (2) for the chosen experimental data.

i	x_{1i}	x_{2i}	$z_2(x_{1i}, x_{2i})$	x_{1i}^0	x_{2i}^0	$z_2(x_{1i}^0, x_{2i}^0)$	$z_2(x_{1i}, x_{2i}) - z_2(x_{1i}^0, x_{2i}^0)$
1	30,0	1,03	130,154	30,6	1,83	128,110	0,628
2	60,0	1,03	78,004	60,8	2,63	77,317	1,198
3	90,0	1,03	60,613	90,5	3,03	60,420	1,296
4	100,0	1,03	57,134	100,4	3,13	57,009	1,249
5	200,0	1,03	41,478	200,1	3,73	41,470	1,099
6	300,0	1,03	36,259	300,0	3,93	36,259	1,033
7	400,0	1,03	33,649	400,0	4,13	33,649	0,998
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
49	400,0	6,19	218,783	400,7	6,13	216,752	5,919
50	500,0	6,19	206,850	499,7	6,13	209,118	4,812
51	600,0	6,19	198,908	599,8	6,13	200,980	3,863
52	700,0	6,19	193,243	699,9	6,13	195,178	3,107
53	800,0	6,19	188,998	799,9	6,13	190,836	2,553
54	900,0	6,19	185,698	900,0	6,13	187,459	2,175
55	1000,0	6,19	183,060	1000,0	613	184,761	1,809
56	1250,0	6,19	178,314	1250,0	6,13	179,910	1,186

Porównanie obydwóch metod dla funkcji opisanej równaniem (2) wykazało także, że metoda rzutowania na styczną daje dokładniejszą ocenę dopasowania krzywej a przeciętna odległość punktów pomiarowych (kosztów eksploatacji agregatów do nawożenia mineralnego) od dobranej krzywej wyniosła 2,08 $\text{zł} \cdot \text{h}^{-1}$ wobec 25,09 $\text{zł} \cdot \text{h}^{-1}$ dla rzutowania ortogonalnie do osi odciętych. W konsekwencji porównania obydwu metod oceny jakości dopasowania krzywych wskazano, że metoda rzutowania na styczną do szukanej krzywej daje dokładniejszą ocenę oraz ułatwia interpretację fizyczną uzyskanych zależności. Ponadto metoda rzutowania na styczną umożliwia numeryczne określanie wartości pochodnej funkcji dowolnego rzędu o ile one istnieją.

Podsumowanie

W pracy przedstawiono metodę oceny jakości dopasowania funkcji zależności na podstawie rzutowania punktów pomiarowych na styczną do krzywej. Metodę porównano z metodą najmniejszych kwadratów wykorzystującą rzutowanie punktów pomiarowych na funkcję regresji ortogonalnie do osi OX. Porównując obydwie metody w ocenie jakości dopasowania krzywych regresji wykazano, że metoda rzutowania na styczną do szukanej krzywej daje dokładniejszą ocenę oraz ułatwia interpretację fizyczną uzyskanych zależności. Ponadto metoda rzutowania na styczną umożliwia numeryczne określanie wartości pochodnej funkcji dowolnego rzędu o ile one istnieją. Dokładny opis zastosowania metody do wyznaczania wartości pochodnej będzie przedmiotem innej pracy.

Bibliografia

Drapper N.R., Smith H. 1998. Applied Regression Analysis. New York. Wiley. 3 rd ed. ISBN 0-471 17082-8.

Hanusz Z., Siarkowski Z. 2005. Określanie funkcji celu przy doborze maszyn rolniczych. Inżynieria Rolnicza. Nr 14 (74), s. 135-145.

Hanusz Z., Ćwiklińska M., Siarkowski Z. 2006. Określanie wielokryterialnej funkcji celu przy doborze rozsiewaczy nawozów mineralnych. Inżynieria Rolnicza. Nr 11 (86), s. 127-134.

Seber G.A.F., Wild C.J. 1989. Nonlinear Regression. New York. Wiley. ISBN 0-471-617601.

Siarkowski Z. 2001. Propozycje uogólniania funkcji jednej zmiennej na funkcje wielowymiarowe. Inżynieria Rolnicza. Nr 9 (29), s. 109-117.

THE COMPARISON OF METHODS OF DETERMINING THE OBJECTIVE FUNCTION WHILE SELECTING MINERAL FERTILIZER SPREADERS

Summary. Different methods of examinations of the quality of regression curve fitting were compared in the paper. The obtained results can be used while making decision on the way of searching the objective function form while selecting the machines for carrying out agronomical practices. The given example deals with the selection of devices for mineral fertilization in the crop farm.

Key words: spreaders, mineral fertilizers, the criterion of function selection, the selection of parameters

Adres do korespondencji:
Zofia Hanusz; e-mail: zofia.hanusz@ar.lublin.pl
Katedra Zastosowań Matematyki
Akademia Rolnicza w Lublinie
ul. Akademicka 13
20-950 Lublin