

RÓWNANIA OPISUJĄCE WPŁYW SZTYWNOŚCI OPON NA DRGANIA CIĄGNIKA ROLNICZEGO

Zbigniew Dworecki, Andrzej Fiszer, Mariusz Łoboda, Jacek Przybył
Instytut Inżynierii Rolniczej, Akademia Rolnicza w Poznaniu

Streszczenie. Częstotliwości drgań ciągnika rolniczego zależą, między innymi, od jego masy, masowych momentów bezwładności oraz sztywności opon. W pracy przedstawiono matematyczne formuły do obliczania wrażliwości częstości drgań własnych ciągnika na zmianę sztywności opon. Porównanie wrażliwości częstości poszczególnych drgań na sztywności opon przednich i tylnych, pozwoli na stwierdzenie jak ogumienie wpływa na różne drgania ciągnika i jak silny jest ten wpływ.

Słowa kluczowe: częstość drgań, sztywność opon, wrażliwość względna

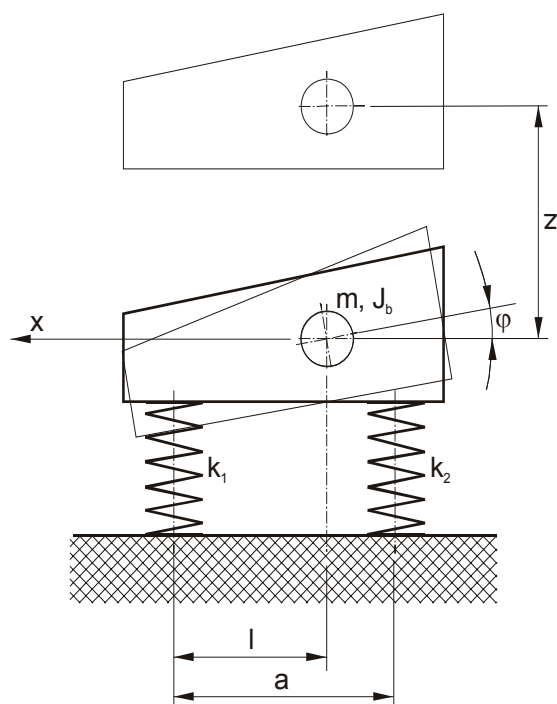
Wstęp

Drgania ciągnika rolniczego mogą niekorzystnie wpływać na organizm operatora ciągnika [Kumar i in. 2001; Dworecki 2003; Sakai, Aihara 1999]. Drgania te zależą od samego ciągnika a szczególnie jego wymiarów, położenia jego środka ciężkości, jego masy, momentów bezwładności, sztywności jego elementów. Drugim czynnikiem warunkującym drgania jest sposób i wielkość wymuszenia ich, na przykład kształt i wysokość przeszkód na drodze, opory maszyn zawieszonych na ciągniku itp. W celu porównania różnych ciągników pod względem drgań, można porównać częstości ich drgań własnych. Aby określić częstości drgań własnych, należy zbudować matematyczny model ciągnika będący rozwiązaniem równań ruchu brył ciągnika. Model taki umożliwia obliczenie częstości drgań własnych ciągnika. Równania ruchu i ich rozwiązanie w przypadku przestrzennego (trójwymiarowego) modelu ciągnika są niezwykle skomplikowane, dlatego buduje się modele płaskie: w płaszczyźnie bocznej i czołowej [Dworecki, Łoboda 2002; Dworecki 2003]. Można, oczywiście, zbudować przestrzenny model ciągnika przy pomocy metody elementów skończonych (MES) ale parametry takiego modelu nie będą parametrami ciągnika ale odpowiednimi składnikami tych parametrów. W modelach płaskich parametrami są: masa ciągnika, jego momenty bezwładności, sztywności opon oraz parametry geometryczne takie jak rozstaw kół „r”, rozstaw osi „a”, położenie środka ciężkości „l”. Oceny wpływu parametrów modelu na częstości drgań własnych można dokonać stosując analizę wrażliwości względnej znormalizowanej [Dworecki i in. 2001; Dworecki 2003]. Przypomnijmy, że wrażliwość względna znormalizowana mówi o względnym (procentowym) wzroście wartości funkcji pod wpływem względnego (procentowego) wzrostu zmiennej lub para-

metru. Formuły matematyczne do oceny wpływu masy ciągnika, momentów bezwładności i położenia środka ciężkości na częstości drgań własnych zostały przedstawione w ww. pracach. Zostały one wprowadzone do arkusza kalkulacyjnego i posłużyły do numerycznej analizy drgań [Dworecki i in. 2001]. Aby ocenić wpływ ogumienia na częstości drgań należy utworzyć formuły matematyczne wrażliwości częstości drgań własnych na sztywności opon.

Modele ciągnika

Do zbudowania formuł matematycznych umożliwiających obliczenie wpływu sztywności opon na częstości drgań własnych użyto modeli matematycznych ciągnika w płaszczyźnie bocznej (1, 2) i czołowej (3, 4) przedstawionych w pracy Dworeckiego [2003]. W przywołanej pracy przedstawione są modele fizyczne, służące do zbudowania równań ruchu. Modele te przedstawiono na rysunku 1 i 2.

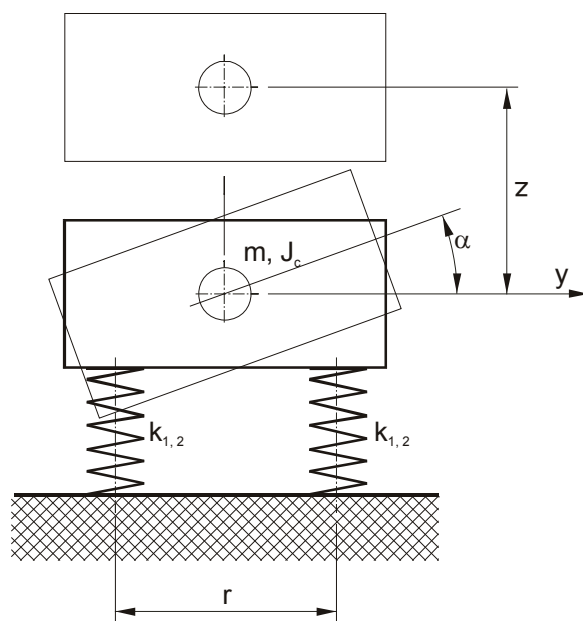


Rys. 1. Model ciągnika w płaszczyźnie bocznej: m - masa układu, J_b - moment bezwładności układu w płaszczyźnie bocznej, k_1 - suma sztywności opon kół przednich ($k_1 = 2k_p$), k_2 - suma sztywności opon kół tylnych ($k_2 = 2k_t$)

Fig. 1. Lateral plane tractor model: m - mass of the system, J_b - pitch moment of inertia of the system, k_1 - the sum of front tyres stiffness ($k_1 = 2k_p$), k_2 - the sum of rear tyres stiffness ($k_2 = 2k_t$)

Częstości drgań własnych w płaszczyźnie bocznej wynoszą:

$$\omega_{1,2b} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{k_1 l^2 + k_2 (a-l)^2}{J_b} + \frac{k_1 + k_2}{m} \right) \mp \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{k_1 l^2 + k_2 (a-l)^2}{J_b} - \frac{k_1 + k_2}{m} \right)^2 + \frac{(k_2 (a-l) - k_1 l)^2}{J_b \cdot m}} \quad (1),(2)$$



Rys. 2. Model ciągnika w płaszczyźnie czołowej: m - masa układu, J_c - moment bezwładności układu w płaszczyźnie czołowej, $k_{1,2}$ - suma sztywności opony przedniej i tylnej ($k_{1,2} = k_p + k_t$)

Fig. 2. Front plane tractor model: m - mass of the system, J_c - roll moment of inertia of the system, $k_{1,2}$ - the sum of one front and one rear tyre stiffness

Częstości drgań własnych w płaszczyźnie czołowej wynoszą:

drgania pionowe $\omega_{1c} = \sqrt{\frac{2k_{1,2}}{m}} \quad (3)$

wahanie na boki $\omega_{2c} = r \sqrt{\frac{k_{1,2}}{2J_c}} \quad (4)$

Wrażliwość częstości drgań własnych na parametry modelu zależne od sztywności opon

Po zróżniczkowaniu zależności 1, 2, 3, 4 i przekształceniach otrzymano równania umożliwiające obliczenie wrażliwości częstości drgań własnych na występujące w modelach parametry związane ze sztywnościami opon.

Dla modelu ciągnika w płaszczyźnie bocznej wrażliwość na sumę sztywności ogumienia kół przednich wynosi:

$$W_{k_1}(\omega_{1,2b}) = \frac{\partial \ln \omega_{1,2b}}{\partial \ln k_1} = \frac{k_1}{4\alpha_{1,2b}^2 J_b m} \left\{ m l^2 + J_b \mp \frac{1}{y} \left[\frac{m l^2 - J_b}{2} \left(\frac{k_1 l^2 + k_2 (a-l)^2}{J_b} - \frac{k_1 + k_2}{m} \right) + 2l(k_1 l - k_2 (a-l)) \right] \right\} \quad (5),(6)$$

gdzie:

$$y = \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{k_1 l^2 + k_2 (a-l)^2}{J_b} - \frac{k_1 + k_2}{m} \right)^2 + \frac{(k_2 (a-l) - k_1 l)^2}{J_b m}} \quad (7)$$

Wrażliwość na sumę sztywności ogumienia kół tylnych wynosi:

$$W_{k_2}(\omega_{1,2b}) = \frac{\partial \ln \omega_{1,2b}}{\partial \ln k_2} = \frac{k_2}{4\alpha_{1,2b}^2 J_b m} \left\{ m(a-l)^2 + J_b \mp \frac{1}{y} \left[\frac{m(a-l)^2 - J_b}{2} \left(\frac{k_1 l^2 + k_2 (a-l)^2}{J_b} - \frac{k_1 + k_2}{m} \right) + 2(a-l)(k_2 (a-l) - k_1 l) \right] \right\} \quad (8),(9)$$

Dla modelu ciągnika w płaszczyźnie czołowej wrażliwość częstości drgań pionowych na sumę sztywności ogumienia jednego koła przedniego i jednego koła tylnego wynosi:

$$W_{k_{1,2}}(\omega_{1c}) = \frac{\partial \ln \omega_{1c}}{\partial \ln k_{1,2}} = \frac{k_{1,2}}{m \omega_{1c}^2} = \frac{k_{1,2} m}{2 k_{1,2} m} = 0,5. \quad (10)$$

Wrażliwość drugiej częstości drgań (wahanie na boki) na sumę sztywności ogumienia jednego koła przedniego i jednego koła tylnego wynosi:

$$W_{k_{1,2}}(\omega_{2c}) = \frac{\partial \ln \omega_{2c}}{\partial \ln k_{1,2}} = \frac{r^2 k_{1,2}}{4 \omega_{2c}^2 J_c} = \frac{2 J_c r^2 k_{1,2}}{4 J_c r^2 k_{1,2}} = 0,5. \quad (11)$$

Wrażliwość częstości drgań własnych na sztywności opon

Korzystając z rachunku funkcji wrażliwości względnej znormalizowanej [Dworecki 2003] można obliczyć wrażliwości częstości własnych na sztywność opony przedniej i tylnej. Warto podkreślić, że wrażliwości częstości (wyrażonych w radianach na sekundę) są takie same, jak wrażliwości częstotliwości (wyrażonych w hercach).

Dla modelu ciągnika w płaszczyźnie bocznej, wrażliwość pierwszej i drugiej częstości drgań własnych na sztywność jednego koła przedniego jest taka sama jak wrażliwość na sumę sztywności ogumienia kół przednich:

Równania opisujące wpływ...

$$W_{k_p}(\omega_{1,2b}) = \frac{\partial \ln \alpha_{1,2b}}{\partial \ln k_1} = \frac{k_1}{4\alpha_{1,2b}^2 J_b m} \left\{ m\dot{l} + J_b \mp \frac{1}{y} \left[\frac{m\dot{l} - J_b}{2} \left(\frac{k_1 l^2 + k_2 (a-l)^2}{J_b} - \frac{k_1 + k_2}{m} \right) + 2l(k_1 l - k_2 (a-l)) \right] \right\} \quad (12), (13)$$

Analogicznie wrażliwość na sztywność jednego koła tylnego:

$$W_{k_t}(\omega_{1,2b}) = \frac{\partial \ln \alpha_{1,2b}}{\partial \ln k_2} = \frac{k_2}{4\alpha_{1,2b}^2 J_b m} \left\{ m(a-l)^2 + J_b \mp \frac{1}{y} \left[\frac{m(a-l)^2 - J_b}{2} \left(\frac{k_1 l^2 + k_2 (a-l)^2}{J_b} - \frac{k_1 + k_2}{m} \right) + 2(a-l)(k_2 (a-l) - k_1 l) \right] \right\} \quad (14), (15)$$

Dla modelu ciągnika w płaszczyźnie czołowej wrażliwość częstości drgań pionowych na sztywność jednego koła przedniego wynosi:

$$W_{k_p}(\omega_{1c}) = 0,5 \frac{k_p}{k_p + k_t} \quad (16)$$

Wrażliwość drgań pionowych na sztywność jednego koła tylnego wynosi:

$$W_{k_t}(\omega_{1c}) = 0,5 \frac{k_t}{k_p + k_t} \quad (17)$$

Wrażliwość drugiej częstości drgań (wahanie na boki) na sztywność ogumienia jednego koła przedniego lub tylnego jest taka sama jak wrażliwość pierwszej częstości:

$$W_{k_p}(\omega_{2c}) = 0,5 \frac{k_p}{k_p + k_t} \quad (18)$$

$$W_{k_t}(\omega_{2c}) = 0,5 \frac{k_t}{k_p + k_t} \quad (19)$$

Przedstawione formuły matematyczne zostaną wprowadzone do arkusza kalkulacyjnego, co umożliwi porównanie wpływu sztywności opon z wpływem innych parametrów na częstości drgań własnych ciągnika.

Podsumowanie

Matematyczne, strukturalne modele analityczne ciągnika rolniczego umożliwiają obliczenie częstości drgań własnych ciągnika. Analiza wrażliwości częstości drgań własnych pozwala poznać siłę wpływu poszczególnych parametrów modeli na te częstości. Wymaga to zbudowania formuł matematycznych wrażliwości częstości na parametry modeli. W pracy Dworeckiego [2003] przedstawiono formuły wrażliwości częstości na zmianę masy ciągnika, momentów bezwładności i położenia środka ciężkości. W prezentowanej obecnie pracy przedstawiono równania wrażliwości względnej znormalizowanej pierwszych częstości drgań własnych ciągnika na sztywności opon. Jak widać na przedstawionych zależnościach, dla modelu ciągnika w płaszczyźnie bocznej, wrażliwość drgań pionowych i drgań o postaci ugięcie przód-tył na sztywność opon wymaga bardziej złożonych

obliczeń. W płaszczyźnie czołowej wrażliwość częstości drgań pionowych i wahań na boki na sztywność opony zależy od udziału sztywności danej opony w sumie sztywności opony przedniej i tylnej. Konkretnie wartości liczbowe wrażliwości częstości drgań na sztywność opon dla przykładowego ciągnika i porównanie ich z wrażliwościami na inne parametry zostaną przedstawione w kolejnej publikacji.

Bibliografia

- Dworecki Z., Łoboda M., Krysztofiak A.** 2001. Numeryczna analiza drgań ciągnika rolniczego z wykorzystaniem analizy wrażliwości. *Inżynieria Rolnicza* nr 11 (31). s. 61-67.
- Dworecki Z., Łoboda M.** 2002. Symulacja drgań ciągnika rolniczego w płaszczyźnie bocznej. *Inżynieria Rolnicza* nr 2 (35). s. 101-106.
- Dworecki Z.** 2003. Badania drgań ciągnika z zawieszoną maszyną rolniczą w kontekście ich oddziaływania na operatora. *Inżynieria Rolnicza* nr 5(47). s. 1-96
- Kumar A., Mahajan P., Mohan D., Varghese M.** 2001. Tractor Vibration Severity and Driver Health: a Study from Rural India. *Journal of Agricultural Engineering Research*. Vol. 80, No. 4. s. 313-328.
- Sakai K., Aihara K.** 1999. Bifurcation Structure of Vibrations in an Agricultural Tractor- Vibrating Subsoiler System. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. Vol. 9, No. 10. s. 2091-2098.

EQUATIONS OF INFLUENCE OF TYRES STIFFNESS ON TRACTOR VIBRATIONS

Summary. The tractor eigenfrequency depends tractor geometry, tractor mass, tractor moments of inertia, tyre stiffness. The lateral plane tractor model and front plane tractor model was designed to illustrate free vibration frequencies of vibration. Papers presents mathematical formulas of relative standardised sensitivity of tractor eigenfrequencies to tyre stiffness.

Key words: frequency of vibration, tyre stiffness, relative sensitivity

Adres do korespondencji:

Zbigniew Dworecki; e-mail: dworecki@au.poznan.pl
Instytut Inżynierii Rolniczej
Akademia Rolnicza w Poznaniu
ul. Wojska Polskiego 50
60-627 Poznań