WŁASNOŚCI DIAGNOSTYCZNE STRUKTUR BĘDĄCYCH NIEPEŁNYMI HIPERSZEŚCIANAMI

Jan CHUDZIKIEWICZ

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Cybernetyki, Instytut Teleinformatyki i Automatyki,
ul. Kaliskiego 2, 00-908 Warszawa; fax: 022-683-71-44; e-mail: j.chudzikiewicz@ita.wat.edu.pl

Streszczenie

Struktury typu hipersześcianu H^n zapewniają odpowiednią wnikliwość diagnostyczną oraz dużą niezawodność w sensie spójności sieci. Struktury H^n charakteryzują się silnym ograniczeniem na liczbę węzłów równą - 2^n. Struktury niepełnych hipersześcianów, nie mają takiego ograniczenia, ale podobnie jak struktury H^n znajdują szerokie zastosowania w systemach przetwarzania danych, szczególnie do budowy systemów tolerujących uszkodzenia ze względu na ich naturalne cechy redundancji. W referacie przedstawiono własności diagnostyczne struktur będących niepełnymi hipersześcianami. Własności te zostały określone dla metody opiniowania diagnostycznego.

Słowa kluczowe: diagnozowalność, niepełny hipersześcian, metoda opiniowanie diagnostyczne, tolerancja uszkodzeń.

DIAGNOSTIC PROPERTIES OF ON INCOMPLETE HYPERCUBES STRUCTURES

Summary

The hypercube structures have large reliability and large diagnostic deepness and are used in self-diagnostic systems. Structures H^n are characterized by a strong limitation on the number of nodes equal 2^n. The structures of incomplete hypercubes do not have such limitations, but similarly as H^n structures find wide application in data processing systems, especially for building fault tolerant systems, because such structures have natural features of redundancy. In the paper the diagnostic properties of incomplete hypercube structures are presented. These properties were defined for the method of diagnostic opinion.

Keywords: diagnosability, incomplete hypercubes, a method of diagnostic opinion, fault tolerance.

1. WPROWADZENIE

n-wymiarowym hipersześcianem binarnym nazywamy graf zwykły G $(G = <E, U>$, $|E| = 2^n, |U| = n \cdot 2^{n-1})$ o 2^n węzłach, z których każdy opisany jest odpowiednim wektorem binarnym z $(z = (z_1, \ldots, z_n),\ z_i \in \{0, 1\},\ 1 \le i \le n,$ $z \in Z^n, |Z^n| = 2^n)$ oraz o $n \cdot 2^{n-1}$ krawędziach, łączących te węzły, których opisujące je wektory odległe są o 1 według miary Hamminga [1].

Strukturę *n*-wymiarowego hipersześcianu binarnego będziemy dalej oznaczać przez H^n.

Każdy węzeł może obejmować jeden lub więcej procesorów z własną pamięcią lokalną. Węzły łączone są liniami transmisji danych. Zależnie od charakteru tych połączeń, możemy mieć do czynienia z systemem wielokomputerowym, budowanym najczęściej w oparciu o specjalizowane płyty (na przykład, *nCube*), wyposażone w połączenia magistralowe lub z systemami rozproszonymi (sieciowymi), budowanymi na bazie komputerów i połączeń sieciowych typu punkt-punkt. Niezależnie od fizycznej realizacji systemy tego typu charakteryzują się nadmiarowością linii komunikacyjnych (transmisji danych), regularnością struktury oraz stosunkowo niewielką maksymalną odległością Hamminga między węzłami [1, 2, 3].

Systemy a architekturze hipersześcianu mogą być wykorzystane do budowy systemów tolerujących uszkodzenia ze względu na posiadane naturalne cechy redundancji [5, 7]. Warunkiem koniecznym tolerowania uszkodzeń jest ich poprawna diagnostyka. Jej jakość ma decydujące znaczenie dla przywrócenia zdatności systemu poprzez wymianę uszkodzonych jednostek, bądź też izolację niezdatnych jednostek i przeprowadzenie rekonfiguracji zadań (łagodna degradacja systemu). Biorąc jednak po uwagę fakt, że struktury H^n charakteryzują się silnym ograniczeniem na liczbę węzłów równą - 2^n, ich zastosowanie jest ograniczone. Alternatywą jest zastosowanie struktur *niepełnych hipersześcianów* [8].

Strukturą będącą niepełnym hipersześcianem binarnym nazywamy graf zwykły G' $(G' = <E', U'>, 2^{n-1} < |E| < 2^n, n \cdot 2^{n-2} < |U| < n \cdot 2^{n-1},$

$(n \geq 3))$, w której każdy węzeł opisany jest odpowiednim wektorem binarnym z $(z = (z_1, \ldots, z_n)$, $z_i \in \{0,\ 1\}, 1 \leq i \leq n, z \in Z^n, |Z^n| < 2^n)$, natomiast krawędzie łączą te węzły, których opisujące je wektory odległe są o 1 według miary Hamminga.

Struktury niepełnych hiperszcześcianów, znajdują szerokie zastosowania w systemach przetwarzania danych, szczególnie do budowy systemów tolerujących uszkodzenia ze względu na posiadane naturalne cechy redundancji [11, 13].

W niniejszym referacie przedstawiono (dla strategii jednokrokowej) własności diagnostyczne dla metody opiniowania diagnostycznego i modeli PMC (Preparata, Metze and Chien) [12] oraz BGM (Barsi, Grandoni and Maestrini) [6], struktur będących niepełnymi hiperszcześcianami.

2. POJĘCIA PODSTAWOWE

Niech $E(e')$ $(e' \in E)$ oznacza zbiór węzłów przyległych do węzła e' $(e' \notin E(e'))$. Zauważmy, że w odniesieniu do struktur H^n, które są odwzorowane przez opisany graf zwykły, zbiór $E(e)$ komputerów przyległych można określić w następujący sposób:

$$E(e) = \{e' \in E \setminus e : \delta(\Theta(e),\ \Theta(e')) = 1\} \quad (e \in E),$$

natomiast zbiór $E(E')$ komputerów przyległych do komputerów ze zbioru E' można określić jako:

$$E(E') = \{e \in E \setminus E' : \delta(\Theta(e),\ \Theta(e')) = 1\} \quad (e' \in E'),$$

przy czym: $\delta(\Theta(e'),\ \Theta(e''))$ - odległość Hamminga między etykietami węzłów e' i e''.

Graf opiniowania diagnostycznego G $(G = < E,\ U >)$ opisujący strukturę testowania się komputerów sieci jest nazywany *m*-diagnozowalnym, jeżeli umożliwia zidentyfikowanie wszystkich niezdatnych komputerów sieci komputerowej pod warunkiem, że jest ich nie więcej niż *m*. Wśród struktur *m*-diagnozowalnych wyróżniamy struktury m-optymalne, to jest takie, które mają minimalną liczbę łuków, co odpowiada minimalnej liczbie testowań wykonanych przez komputery sieci komputerowej.

Graf opiniowania diagnostycznego jest grafem *m*-diagnozowalnym, wtedy i tylko wtedy gdy (dla modelu PMC) [10]:

1) $|E| \geq 2 \cdot m + 1;$

2) $\mu^{-}(e) \geq m,\ e \in E;$

3) $(\forall 0 \leq p \leq m\text{-}1\ \forall E' \subset E : |E'| = |E| \text{-} 2 \cdot m + p)$
$: |E(E')| > p.$

Graf opiniowania diagnostycznego jest grafem *m*-diagnozowalnym, wtedy i tylko wtedy gdy (dla modelu BGM) [10]:

1) $|E| \geq m + 2;$

2) $\mu^{-}(e) \geq m,\ e \in E;$

3) $\forall e',\ e'' \in E : \mu^{-}(e') = \mu^{-}(e'') =$
$m \wedge [(\exists e^{*} \in E(e') \setminus E(e') \bigcap E(e'') : E(e^{*}) \neq E(e'')) \vee$
$\vee (\exists e^{**} \in E(e'') \setminus E(e') \bigcap E(e'') : E(e^{**}) \neq E(e'))].$

Oznaczmy [10]:

$|E^{0}(n',\ n'')|$ - zbiór tych komputerów sieci komputerowej, które są zdatne zarówno w stanie n' jak i w stanie n'';

$|E^{1}(n',\ n'')|$ - zbiór tych komputerów sieci komputerowej, które są niezdatne zarówno w stanie n' jak i w stanie n'';

$|\tilde{E}(n',\ n'')|$ - zbiór tych komputerów sieci komputerowej, które jeśli w stanie n' są zdatne to w stanie n'' są niezdatne.

Jeżeli $m \leq \left\lfloor \frac{1}{2} |E| \right\rfloor$, to [10]:

$$1 \leq |\tilde{E}(n',\ n'')| \leq 2 \cdot m, \tag{2-1}$$

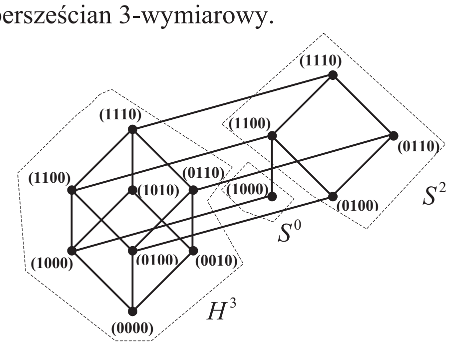
$$0 \leq |E^{1}(n',\ n'')| \leq m - \left\lfloor \frac{1}{2}(|\tilde{E}(n',\ n'')| + 1) \right\rfloor, \tag{2-2}$$

$$|E| \text{-} 2 \cdot m \leq |E^{0}(n',\ n'')| \leq |E| \text{-} 1. \tag{2-3}$$

Definicja 2-1

Strukturę będącą niepełnym hiperszcześcianem binarnym opisaną grafem G'' $(G'' =< E, U >$, $|E| = 2^r + \sum_{m \in M} 2^m, |U| = r \cdot 2^{r-1} + \sum_{m \in M} m \cdot 2^m)$ zaliczamy do klasy H_M^r, przy czym M – zbiór wymiarów sześcianów $M = \{r\text{-}1,\ r\text{-}2, \ldots, 1, 0\}$.

Na rysunku 1 przedstawiono przykład struktury $H_{2,0}^3$ będącej niepełnym hiperszcześcianem klasy H_M^r. Przy czym S^2, S^0 oznaczają sześciany binarne odpowiednio: 2-wymiarowy oraz 0-wymiarowy, natomiast H^3 oznacza hiperszcześcian 3-wymiarowy.

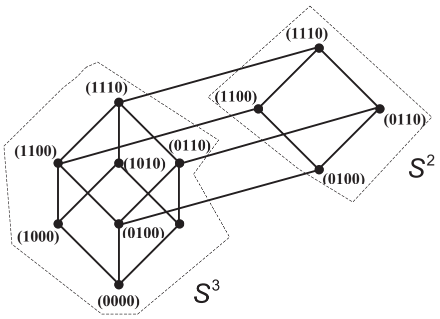


Rys. 1. Przykład struktury $H_{2,0}^3$.

Definicja 2-2

Strukturę będącą niepełnym hiperszcześcianem binarnym opisaną grafem G''' $(G''' =< E, U >$, $|E| = 2^r + 2^m, |U| = r \cdot 2^{r-1} + m \cdot 2^m)$ zaliczamy do klasy h_m^r, przy czym $(2 \leq m < r) \wedge (r \geq 3)$.

Na rysunku 2 przedstawiono przykład struktury h_2^3 będącej niepełnym hiperszcześcianem klasy h_m^r.



Rys. 2. Przykład struktury h_2^3.

3. WYBRANE WŁASNOŚCI DIAGNOSTYCZNE STRUKTUR H^n DLA METODY OPINIOWANIA DIAGNOSTYCZNEGO MODELU PMC ORAZ BGM

W punkcie tym przedstawiono wybrane własności struktur typu H^n dla metody opiniowania diagnostycznego i modelu PMC oraz BGM. Przedstawione własności pozwolą na opisanie, zawartych w punkcie 4, własności struktur będących niepełnymi hiperszcześcianami. Dokładniejszy opis własności struktur H^n wraz z dowodami można znaleźć w pracach [1, 4, 10].

Własność 3-1

Graf opiniowania diagnostycznego G jest grafem m-diagnozowalnym dla modelu PMC wtedy i tylko wtedy, gdy spełniona jest następująca zależność:

$$\begin{gathered}\forall n', n'' \in N^m\ \exists e' \in E^0(n',\ n''):\\ E(e') \cap \tilde{E}(n',\ n'') \neq \varnothing\end{gathered} \tag{3-1}$$

gdzie: N^m – zbiór takich stanów niezawodnościowych węzłów sieci komputerowej, w których liczba niezdatnych komputerów nie jest większa niż m.

Własność 3-2 Jeżeli graf opiniowania diagnostycznego G jest grafem m-diagnozowalnym, to spełnione są następujące warunki: $|E| \geq 2 \cdot m + 1$ i $\mu^-(e) \geq m, (e \in E)$ dla modelu PMC.

Własność 3-3 Silnie spójny graf opiniowania diagnostycznego G $(|E| \geq 3)$ jest grafem 1-diagnozowalnym dla modelu PMC.

Własność 3-4 Graf opiniowania diagnostycznego jest grafem 1-diagnozowalnym dla modelu BGM wtedy i tylko wtedy, gdy jest grafem 1-diagnozowalnym dla modelu PMC.

Własność 3-5 Jeżeli graf opiniowania diagnostycznego G jest grafem m-optymalnym dla modelu PMC, to $\mu^-(e) = m$ $(e \in E)$ oraz $|U| = m \cdot |E|$.

Własność 3-6 Jeżeli graf opiniowania diagnostycznego jest grafem m-diagnozowalnym dla modelu PMC, to jest grafem m-diagnozowalnym dla modelu BGM.

4. WYBRANE WŁASNOŚCI DIAGNOSTYCZNE STRUKTUR BĘDĄCYCH NIEPEŁNYMI HIPERSZEŚCIANAMI

Własność 4-1 Struktura będąca podgrafem częściowym struktury H^n $(n > 2)$ taka, że $\mu(e) \geq 2$ $(e \in E)$, jest co najmniej 1-diagnozowalną dla modelu PMC oraz BGM.

Dowód

Z zależności (1-1) ÷ (1-3) wynika następująca zależność:

$$\forall n', n'' \in N^1 : (E^1(n',\ n'') = \varnothing) \wedge (1 \leq |\tilde{E}(n',\ n'')| \leq 2) \wedge$$
$$\wedge (2^{n-1} \leq |E^0(n',\ n'')| \leq 2^n - 1),$$

a ponieważ (z założenia) struktura jest grafem spójnym, to zachodzi:

$$[e \in \tilde{E}(n',\ n'')] \Rightarrow [E(e) \cap E^0(n',\ n'') \neq \varnothing]$$

a więc spełniona jest zależność (3-1) czyli, że struktura jest strukturą 1-diagnozowalną metodą opiniowania diagnostycznego dla modelu PMC, a tym samym (zgodnie z własnością 3-4) i dla modelu BGM. Potwierdza to również własność 3-3, bowiem struktura będąca podgrafem częściowym struktury H^n jest silnie spójnym grafem opiniowania diagnostycznego, a więc jest strukturą 1-diagnozowalną metodą opiniowania diagnostycznego dla modelu PMC, natomiast zgodnie z własnością 3-3 jest również strukturą 1-diagnozowalną dla modelu BGM.

Własność 4-2 Struktura klasy h_m^r $(r \geq 3)$ taka, że $\mu(e) = m$ $(e \in E, 2 \leq m < r)$ jest strukturą m-optymalną dla modelu PMC i modelu BGM.

Dowód

Z zależności (1) ÷ (3) wynika, że:

$$\forall n', n'' \in N^m : (\left|E^1(n',\ n'')\right| \leq m - 1) \wedge (E^0(n',\ n'') \neq \varnothing)$$

oraz

$$(\left|E^1(n',\ n'')\right| = m - 1) \Rightarrow (1 \leq \left|\tilde{E}(n',\ n'')\right| \leq 2)$$

Zauważmy, że jeżeli:

$$\left|\tilde{E}(n',\ n'')\right| = 2 \text{ i } \delta(\Theta(e'), \Theta(e'')) = 1\ (e', e'' \in \tilde{E}(n',\ n''))$$

to wówczas

$$\{E(e') \setminus e''\} \cap \{E(e'') \setminus e'\} = \varnothing \quad (n',\ n'' \in N^r)$$

a więc otrzymujemy:

$$(\{E(e') \setminus e''\} \cap E^0(n',\ n'')) \vee (\{E(e'') \setminus e'\} \cap E^0(n',\ n'')) \neq \varnothing$$

a więc spełniona jest zależność (3-1). Tak więc zgodnie z własnością 3-1 struktura jest m-diagnozowalną metodą opiniowania diagnostycznego dla modelu PMC, a ponieważ $\mu^-(e) = m$ $(e \in E)$ to zgodnie z własnością 3-5 jest strukturą m-optymalną, a tym samym (zgodnie z własnością 3-6) i dla modelu BGM.

Przedstawione w tym punkcie własności diagnostyczne struktur, będących podgrafami częściowymi struktury H^n, ukazują że struktury te charakteryzują się podobnymi do struktur H^n własnościami diagnostycznymi. Istotną różnicą jest to, że nie mają one tak silnego jak struktury H^n ograniczenia na liczność zbioru E, grafu opisującego daną strukturę. Ma to istotne znaczenie w przypadku, gdy w wyniku uszkodzenia zachodzi konieczność eliminacji elementu, co powoduje, że liczba węzłów struktury opisującej dany system nie spełnia warunku na liczbę węzłów będącą potęgą dwójki.

5. PODSUMOWANIE

W literaturze przedmiotu własności struktur będących niepełnymi hipersześcianami są szeroko analizowane [11, 13], jednak badania te nie obejmują własności diagnostycznych tychże struktur.

Zbadanie tych własności ma istotne znaczenie w przypadku środowisk, gdzie panujące warunki techniczne uniemożliwiają renowację sieci (komputerowej, wieloprocesorowej) powodując, że podlega ona procesowi „*łagodnej degradacji*”. Zachodzi wówczas konieczność dokonania rekonfiguracji istniejącej struktury do takiej, która będzie charakteryzowała się najlepszymi właściwościami diagnostycznymi [1, 9].

Zaprezentowane w artykule własności diagnostyczne struktur będących niepełnymi hipersześcianami stanowią częściowe wyniki prac prowadzonych w Instytucie Teleinformatyki i Automatyki WAT, dotyczących struktur typu hipersześcianu.

LITERATURA

[1] Chudzikiewicz J.: *Sieci komputerowe o strukturze logicznej typu hipersześcianu.* Instytut Automatyki i Robotyki, Wydziału Cybernetyki WAT, Warszawa 2002.
[2] Chudzikiewicz J.: *Metoda wyznaczania m-optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego dla sieci komputerowych typu hipersześcianu*, V Krajowa Konferencja Diagnostyka Urządzeń i Systemów, Ustroń 2003.
[3] Chudzikiewicz J.: *Wyznaczanie m-diagnozowalnych struktur typu PMC w systemach o zwiększonej odporności na uszkodzenia*, X Konferencja Systemów Czasu Rzeczywistego, Ustroń 2003.
[4] Chudzikiewicz J., Zieliński Z.: *Własności diagnostyczne systemów komputerowych o strukturze hipersześcianu*, Systemy Czasu Rzeczywistego. Kierunki badań i rozwoju, Wydawnictwo Komunikacji i Łączności, Rozdział XVII, 2005.
[5] Chudzikiewicz J., Murawski K.: *Wyznaczanie bezkolizyjnych dróg przesyłania danych w sieci teleinformatycznej o strukturze typu hipersześcianu*, VI Krajowa Konferencja Diagnostyka Techniczna Urządzeń i Systemów, Ustroń 2006.
[6] Barsi F., Grandoni F., Maestrini P.: *A Theory of Diagnosability of Digital Systems*, IEEE Transactions on Computers, vol. 6, pp. 585-593, 1976.
[7] Horng M. S., Chen D. J.: *Parallel Routing Algorithms for Incomplete Hypercube Interconnection Networks*, IEEE transactions on computers, 1992.
[8] Katseff H. P.: *Incomplete hypercubes*, IEEE transactions on computers, vol. 31, no.*5,* 1988.
[9] Kulesza R., Zieliński Z., Chudzikiewicz J.: *Reconfiguration of a ring structure in a hypercube computer network with faulty links,* International Conference on Technical Diagnostics 9th IMECO TC-10, Wroclaw 1999.
[10] Kulesza R.: *Podstawy diagnostyki sieci logicznych i komputerowych*, Instytut Automatyki i Robotyki, Wydział Cybernetyki WAT, Wydanie II, Warszawa 2000.
[11] Nian-Feng Tzeng: *Structural properties of incomplete hypercube computers*, International Conference on Distributed Computing Systems, May 1990.
[12] Preparata F. P., Metze G., Chien R. T.: *On the Connection Assignment Problem of Diagnosable Systems*, IEEE Transactions on Computers, pp. 848-854, 1967.
[13] Sen A., Sengupta A., Bandyopadhyay S.: *On some topological properties of Hypercube, Incomplete Hypercube and Supercube,* IEEE transactions on computers, 1993.

Jan CHUDZIKIEWICZ ukończył studia w 1993 na Wydziale Cybernetyki Wojskowej Akademii Technicznej uzyskując tytuł mgr. inż. w specjalności systemy komputerowe. W roku 2001 na tymże samym wydziale obronił pracę doktorską uzyskując tytuł doktora w specjalności diagnozowanie sieci komputerowych. Przez cały okres swojej pracy zawodowej związany z Wojskową Akademią Techniczną. W latach 1994-1998 współpracował z Przemysłowym Instytutem Elektroniki w zakresie projektowania systemów diagnostycznych dla układów cyfrowych. Obecnie jego zainteresowania koncentrują się wokół metod diagnozowania systemów komputerowych, sieci komputerowych i systemów tolerujący błędy.