

## PROBLEMY MODELOWANIA PROCESÓW W PRZECHOWALNI ZIEMNIAKÓW

Ewa Wachowicz

*Katedra Automatyki, Politechnika Koszalińska*

**Streszczenie:** W pracy przedstawiono trudności związane z formułowaniem i rozwiązywaniem równań stanowiących model procesów wymiany ciepła i masy w warstwie ziemniaków.

**Słowa kluczowe:** przechowalnictwo, ziemniaki, warstwa, procesy, modelowanie

### Wykaz oznaczeń

- a – powierzchnia właściwa [ $\text{m}^2 \cdot \text{m}^{-3}$ ],
- c – ciepło właściwe [ $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$ ],
- $G(s)$  – transmitancja operatorowa Laplace'a,
- $G(j\omega)$  – transmitancja widmowa Fouriera,
- $|G(j\omega)|$  – moduł transmitancji widmowej,
- j – jednostka urojona,
- m – masa [kg],
- $q_{\text{res}}$  – ciepło oddychania ziemniaków [ $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$ ],
- r – ciepło parowania wody [ $\text{J} \cdot \text{kg}_{\text{H}_2\text{O}}^{-1}$ ],
- s – operator Laplace'a,
- t – średnia temperatura [ $^\circ\text{C}$ ],
- $u_r$  – wilgotność równowagowa [ $\text{kg}_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \text{kg}^{-1}$ ],
- $u_{\text{zi}}$  – średnia zawartość wody w ziemniakach [ $\text{kg}_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \text{kg}^{-1}$ ],
- v – prędkość przepływającego powietrza [ $\text{m} \cdot \text{h}^{-1}$ ],
- z – wysokość warstwy bulw [m],
- x – średnia zawartość wody w powietrzu [ $\text{kg}_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \text{kg}^{-1}$ ],
- $\alpha$  – współczynnik wnikania ciepła [ $\text{J} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{h}^{-1} \cdot ^\circ\text{C}^{-1}$ ],
- $\beta$  – współczynnik wnikania masy [ $\text{m} \cdot \text{h}^{-1}$ ],
- $\varepsilon$  – porowatość warstwy,
- $\varphi(\omega)$  – argument transmitancji widmowej,
- $\rho$  – gęstość [ $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ],
- $\omega$  – pulsacja [ $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ],
- $\tau$  – czas [h].

Indeksy: pn – powietrze nawiewane, pw – powietrze wewnętrzne, pz – powietrze zewnętrzne, zi – ziemniaki.

## Wprowadzenie

Podczas realizacji procesu przechowywania konieczne jest zagwarantowanie wymaganych przez technologów przebiegów: temperatury ziemniaków i wilgotności względnej powietrza wewnątrz komór magazynowych. Wymagany mikroklimat zapewniają systemy sterowania, w które wyposaża się przechowalnie. Nowoczesne systemy sterowania mogą wykonywać m. in. adaptacyjny lub predykcyjny algorytm sterowania mikroklimatem. Dzięki temu można osiągnąć minimalizację zużycia energii zasilającej lub minimalizację strat technologicznych podczas magazynowania ziemniaków w przechowalni. Realizacja wymienionych algorytmów wymaga znajomości modelu procesów zachodzących w warstwie ziemniaków. Podczas formułowania modelu warstwy ziemniaków dla potrzeb sterowania mikroklimatem automatyk musi pokonać szereg trudności. Trudności te wynikają ze specyfiki procesu przechowalniczego, gdyż bulwy są organizmami żywymi. Zazwyczaj automatyk ma do czynienia z materią nieożywioną. W prezentowanej poniżej pracy pragnę podzielić się swoimi wieloletnimi doświadczeniami z zakresu modelowania procesów zachodzących w warstwie ziemniaków w przechowalni.

Celem pracy jest omówienie trudności związanych:

- z formułowaniem abstrakcyjnego, strukturalnie podobnego modelu warstwy ziemniaków, dla potrzeb sterowania mikroklimatem w przechowalni,
- z rozwiązywaniem równań tworzących model warstwy,

a także przedstawienie propozycji, dzięki którym można pokonać te problemy.

### Trudności związane z formułowaniem modelu warstwy ziemniaków

Model warstwy ziemniaków ma postać 4 równań stanowiących bilanse ciepła i masy. Opisują one wymianę ciepła w ziemniakach (równanie 1) oraz w powietrzu w warstwie (równanie 2), a także wymianę masy, zachodzącą w ziemniakach (równanie 3) i powietrzu je otaczającym (równanie 4). Model warstwy bulw opisano szczegółowo w pracy [Wachowicz 1999].

$$\underbrace{\rho_{zi} c_{zi} \frac{dt_{zi}}{d\tau}}_{\text{zmiana entalpii w bulwach}} = \underbrace{k \rho_{zi} \frac{dq_{res}}{d\tau}}_{\text{oddychanie bulw}} - \underbrace{r_p \rho_{zi} \frac{du_{zi}}{d\tau}}_{\text{parowanie wody z bulw}} - \underbrace{\alpha \alpha (t_{zi} - t_{pw})}_{\text{wnikanie ciepła}} \quad (1)$$

$$\underbrace{\rho_{pw} c_{pw} \frac{\partial t_{pw}}{\partial \tau}}_{\text{zmiana entalpii w powietrzu}} = - \underbrace{\rho_{pw} c_{pw} v \frac{\partial t_{pw}}{\partial z}}_{\text{konwekcja}} + \underbrace{\frac{\alpha \alpha (1 - \epsilon)}{\epsilon} (t_{zi} - t_{pw})}_{\text{wnikanie ciepła}} \quad (2)$$

$$\underbrace{\frac{du_{zi}}{d\tau}}_{\text{zmiana zawart. wody w bulwach}} = \underbrace{-\alpha \beta (u_{zi} - u_r)}_{\text{wnikanie masy}} \quad (3)$$

$$\underbrace{\frac{\partial x_{pw}}{\partial \tau}}_{\text{zmiana zawart. wody w powietrzu}} = \underbrace{-v \frac{\partial x_{pw}}{\partial z}}_{\text{konwekcja}} + \underbrace{\frac{a\beta(1-\varepsilon)}{\varepsilon} (u_{zi} - u_r)}_{\text{wnikanie masy}} \quad (4)$$

Równania (1–4) uzupełnione są warunkami brzegowymi:

$$\begin{aligned} t_{pw}(0, t) &= t_{pn} \\ x_{pw}(0, t) &= x_{pn} \end{aligned} \quad (5)$$

oraz warunkami początkowymi:

$$\begin{aligned} t_{zi}(z, 0) &= t_{zi0} && \text{lub} && t_{zi}(z, 0) &= t_{zi}(z) \\ t_{pw}(z, 0) &= t_{pwo} && \text{lub} && t_{pw}(z, 0) &= t_{pw}(z) \\ u_{zi}(z, 0) &= u_{zi0} && \text{lub} && u_{zi}(z, 0) &= u_{zi}(z) \\ x_{pw}(z, 0) &= x_{pwo} && \text{lub} && x_{pw}(z, 0) &= x_{pw}(z) \end{aligned} \quad (6)$$

Badania symulacyjne, których wyniki zweryfikowano empirycznie, wykazały, że dokładność przedstawionego wyżej modelu procesów wymiany ciepła i masy w warstwie ziemniaków dla potrzeb sterowania mikroklimatem zależy od:

- postaci modelu opisującego oddychanie ziemniaków,
- wartości współczynników wnikania ciepła i masy z ziemniaków do otaczającego je powietrza.

### Modelowanie procesu oddychania magazynowanych ziemniaków

Integralną częścią składową równania (1) jest wyrażenie  $dq_{res}/d\tau$ , oznaczające intensywność procesu oddychania. Oddychanie – powolne spalanie cukrów – opisane jest reakcją chemiczną, a nie prawem wiedzy naukowej. Dlatego konieczne jest przeprowadzenie badań doświadczalnych i wyznaczenie na podstawie ich wyników formalizmu matematycznego, stanowiącego pomocniczy model procesu oddychania.

Praktyka przechowalnicza wykazała, że przebieg procesu oddychania ma charakter losowy. Nie ma powtarzalności ilościowej i jakościowej tego procesu w kolejnych sezonach przechowalniczych. Intensywność procesu oddychania bulw zależy bowiem m.in. od warunków mikroklimatycznych (losowych), występujących podczas wegetacji roślin. Zatem opracowany na podstawie wyników badań eksperymentalnych, przeprowadzonych w danym sezonie przechowalniczym, pomocniczy model procesu oddychania, opisujący z zadaną dokładnością intensywność procesu oddychania ziemniaków danej odmiany w tym sezonie, nie będzie posiadał wymaganej dokładności w innych sezonach przechowalniczych.

Aby model warstwy ziemniaków mógł być z powodzeniem wykorzystywany podczas sterowania mikroklimatem w przechowalni, konieczne jest uogólnienie modelu oddychania bulw. Uogólnienie to polega na wyznaczeniu empirycznego formalizmu, opracowanego na podstawie wyników badań doświadczalnych wielu odmian ziemniaka, przeprowadzonych w wielu sezonach przechowalniczych.

Prezentowany poniżej uogólniony model oddychania sformułowany został na podstawie niepublikowanych, udostępnionych autorce niniejszej pracy, wyników pomiarów przeprowadzonych w Zakładzie Przechowalnictwa i Przetwórstwa Ziemniaka Instytutu Hodowli i Aklimatyzacji Roślin w Jadwisinie. Badania obejmowały 29 odmian ziemniaka i realizowane były w dwunastu kolejnych latach od 1973 do 1984. Intensywność oddychania mierzona jest ilością ciepła wydzielaną przez kilogram ziemniaków w poszczególnych miesiącach przechowywania. Uogólniony model oddychania bulw ma postać:

$$\frac{dq_{res}}{d\tau} = -0,0459t_{zi}\tau^3 + 0,6165t_{zi}\tau^2 + 2,7350\tau^2 - 1,6626t_{zi}\tau +$$

$$-14,7750\tau + 1,5255t_{zi} + 55,1600 \quad (7)$$

Model ten obowiązuje dla temperatur ziemniaków  $t_{zi}$  z przedziału od 2 do 8°C i czasu przechowywania  $0 \leq \tau \leq 6$  miesięcy.

### Dobór wartości współczynników wnikania ciepła i masy

Z punktu widzenia inżynierii chemicznej, warstwa ziemniaków składowanych w przechowalni jest złożem porowatym. W podręcznikach termodynamiki lub inżynierii procesowej znaleźć można wiele różnych zależności, umożliwiających wyliczenie wartości współczynników wnikania ciepła  $\alpha$  i masy  $\beta$  w złożach porowatych. Jednakże po rozwiązaniu układu równań (1–4), stanowiących model warstwy ziemniaków okazuje się, że w zależności od przyjętego ze wspomnianej literatury wzoru, w wyniku obliczeń uzyskuje się krańcowo różne wartości poszukiwanych parametrów termiczno – wilgotnościowych ziemniaków i powietrza je otaczającego. Wynika to stąd, że podawane w literaturze zależności dotyczą złożów o różnej średnicy ziaren, zbudowanych z martwej, nieożywionej materii. Tymczasem ziemniaki są organizmami żywymi. Zatem podczas rozwiązywania równań, tworzących model warstwy, należy wykorzystywać jedynie zależności empiryczne, umożliwiające wyliczenie współczynników wnikania ciepła i masy z ziemniaków do otaczającego je powietrza, wyznaczone na podstawie badań doświadczalnych przeprowadzonych w przechowalni ziemniaków (np. zależność podaną w pracy [Ginzburg, Gromow 1987]).

### Trudności związane z rozwiązywaniem równań, tworzących model warstwy bulw

Równania matematyczne (1–4) wraz z warunkami brzegowymi (5) i warunkami początkowymi (6), uzupełnione uogólnionym modelem oddychania bulw (7), tworzą nieliniowy, matematyczny model procesów wymiany ciepła i masy w warstwie ziemniaków. Podczas rozwiązywania nieliniowych równań rutynowym działaniem jest linearyzacja równań, dzięki czemu możliwe jest ich rozwiązanie. Podczas linearyzacji przyjęto następujące oznaczenia:

$$Z_1 = \rho_{pw}c_{pw}(t_{zis} - t_{zi}), \quad Z_2 = \rho_{pw}c_{pw}(t_{pws} - t_{pw}), \quad Z_3 = \alpha\alpha(u_{zis} - u_{zi}), \quad Z_4 = \alpha\beta(x_{pws} - x_{pw}),$$

$$Z_5 = \rho_{pw}c_{pw}t_{pn}, \quad Z_6 = \alpha\beta x_{pn}, \quad \tau = \vartheta, \quad C = (1 - \varepsilon)\rho_{zi}r_p, \quad D = b, \quad X = x/v,$$

$$A = (\rho_{pw}c_{pw})/[(1 - \varepsilon)\rho_{zi}c_{zi}], \quad B = 1/(1 - \varepsilon), \quad T_1 = (\rho_{pw}c_{pw})/[(1 - \varepsilon)\rho_{zi}k_1],$$

$$T_3 = 1/[(1 - \varepsilon)\alpha\beta], \quad T_2 = (\rho_{pw}c_{pw})/[(1 - \varepsilon)\alpha\alpha].$$

Po linearyzacji i uwzględnieniu podanych wyżej oznaczeń równania (1–4) przyjmują postać:

$$dZ_1/d\vartheta = (A/T_1 - A/T_2)Z_1 + (A/T_2)Z_2 - CAZ_3 + ACDZ_4 \quad (8)$$

$$\partial Z_2/\partial \vartheta + \partial Z_2/\partial X = (1/T_2)Z_1 - (1/T_2)Z_2 \quad (9)$$

$$dZ_3/d\vartheta = -(B/T_3)Z_3 + (BD/T_3)Z_4 \quad (10)$$

$$\partial Z_4/\partial \vartheta + \partial Z_4/\partial X = (1/T_3)Z_3 + (D/T_3)Z_4 \quad (11)$$

z warunkami brzegowymi:

$$\begin{aligned} X = 0, \quad Z_2 = Z_5, \\ X = 0, \quad Z_4 = Z_6 \end{aligned} \quad (12)$$

i warunkami początkowymi:

$$\begin{aligned} Z_1(X,0) &= Z_{10} \\ Z_2(X,0) &= Z_{20} \\ Z_3(X,0) &= Z_{30} \\ Z_4(X,0) &= Z_{40} \end{aligned} \quad (13)$$

Następnie równania (8–11) oraz (12) i (13) zostały poddane przekształceniu Laplace'a i rozwiązane. Rozwiązaniami układu równań (8–11) są zależności:

$$Z_1(s) = h e^{-pX} Z_5(s) \quad (14)$$

$$Z_2(s) = e^{-pX} Z_5(s) \quad (15)$$

$$Z_3(s) = l e^{-qX} Z_6(s) \quad (16)$$

$$Z_4(s) = e^{-qX} Z_6(s) \quad (17)$$

gdzie:

$$p = [T_1 T_2 s^2 + A(T_1 - T_2)s + T_1 s - A] / [T_1 T_2 s + A(T_1 - T_2)],$$

$$u = T_1,$$

$$r = T_2,$$

$$p/n = 1 / [T_1 T_2 s + A(T_1 - T_2)],$$

$$q = [s(T_3 s + B + D)] / (T_3 s + B),$$

$$d = ACD T_1 T_3 s / (T_3 s + B),$$

$$l = BD / (T_3 s + B),$$

$$h = pur/n,$$

$$n = T_1 T_2 s^2 + A(T_1 - T_2)s + T_1 s - A,$$

$$y = A/T_2.$$

Rozwiązania (14–17) mają postać transformat Laplace'a. Jednakże automatyka nie interesuje rozwiązania modelu wymiany ciepła i masy w warstwie ziemniaków w tej postaci, lecz rozwiązania opisujące zmiany w czasie poszukiwanych wielkości fizycznych. Aby je uzyskać, transformaty (14–7) poddaje się odwrotnemu przekształceniu Laplace'a, wyliczając oryginały funkcji. Niestety równania (1–4), stanowiące model warstwy bulw nie mają analitycznych rozwiązań w dziedzinie czasu. Nie istnieją bowiem oryginały funkcji transformat (14–17). Trudność tę można pokonać dzięki zastosowaniu znanej w inżynierii chemicznej analityczno – graficznej metody, umożliwiającej uzyskanie przybliżonych rozwiązań równań (1–4). Metoda ta nazywana jest metodą charakterystyk częstotliwościowych.

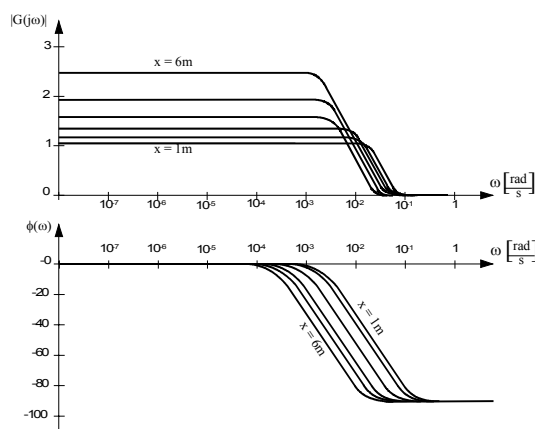
### Metoda charakterystyk częstotliwościowych

Metoda omówiona zostanie poniżej na przykładzie rozwiązywania równania 1, opisującego wymianę ciepła w ziemniakach w warstwie. Algorytm postępowania jest tu następujący:

1. Punktem wyjścia w tej metodzie jest analityczne wyznaczenie transmitancji operatorowej procesu wymiany ciepła w ziemniakach. Transmitancja ta ma postać:

$$G(s) = Z_1(s)/Z_2(s) = h e^{-pX} \quad (18)$$

2. Znając transmitancję operatorową  $G(s)$  należy wyznaczyć transmitancję widmową  $G(j\omega)$ , korzystając ze wzoru  $G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} = |G(j\omega)| e^{-j\phi(\omega)}$
3. Na podstawie znajomości modułu  $|G(j\omega)|$  oraz argumentu  $\phi(\omega)$  transmitancji widmowej należy narysować rodzinę częstotliwościowych charakterystyk: amplitudowych  $|G(j\omega)| = f(\omega)$  i fazowych  $\phi(\omega) = f(\omega)$  dla różnych wysokości  $x$  warstwy bulw. Uzyskany przebieg tych charakterystyk pokazano na rysunku 1.



Rys. 1. Przebieg charakterystyk częstotliwościowych procesu wymiany ciepła w ziemniakach w wentylowanej warstwie w zależności od wysokości  $x$  warstwy bulw

Fig. 1. Trajectories of frequency characteristics for heat exchange process in potatoes in ventilated layer in relation to tuber layer height "x"

4. Przebieg charakterystyk częstotliwościowych (rys. 1) procesu wymiany ciepła w ziemniakach należy porównać z podanymi w podręcznikach automatyki, teoretycznymi, wzorcowymi przebiegami charakterystyk częstotliwościowych typowych urządzeń automatyki. W podręcznikach tych podane są także transmitancje operatorowe (posiadające oryginały funkcji), opisujące te urządzenia.
5. Z dokonanego porównania teoretycznych, podręcznikowych charakterystyk częstotliwościowych z charakterystykami pokazanymi na rysunku 1 wynika, że pokazany na rysunku 1 przebieg jest najbardziej zbliżony do wzorcowego przebiegu charakterystyk częstotliwościowych urządzenia nazywanego członem inercyjnym I rzędu, opisanego transmitancją operatorową

$$G_{upr}(s) = [K/(T_1s+1)]e^{-sT_0} \quad (19)$$

Uzyskana w ten sposób postać transmitancji operatorowej, opisującej proces wymiany ciepła w ziemniakach jest przybliżonym, uproszczonym opisem własności dynamicznych badanego procesu.

6. Na podstawie przebiegu charakterystyk częstotliwościowych (rys. 1) należy graficznie wyznaczyć parametry transmitancji, tzn.: współczynnik wzmocnienia  $K$ , stałą czasową  $T_1$  oraz opóźnienie czasowe  $T_o$  dla różnych wysokości  $x$  warstwy bulw. Przykładowo dla  $x = 6\text{m}$   $K = 2.437$ ,  $T_1 = 280\text{h}$ ,  $T_o = 0.026\text{h}$ .
7. Badania eksperymentalne wykazały, że temperatura powietrza w kanale wentylacyjnym po załączeniu wentylatora zmienia się wykładniczo od wartości początkowej (przed załączeniem wentylacji) do wartości temperatury powietrza nawiewanego. Zmianę tę można opisać wzorem:

$$t_{pn} = A[1 - e^{-(\tau/T)}]. \quad (20)$$

Znając zależność (20), możemy wyznaczyć czasową charakterystykę skokową

$$t_{zi} = AK [1 + (1/(T-T_1))(Te^{-\tau/T} - T_1e^{-\tau/T_1})], \quad (21)$$

opisującą zmiany w czasie temperatury ziemniaków i stanowiącą szukane rozwiązanie równania (1).

Wadami omówionej wyżej metody rozwiązywania równań, tworzących matematyczny model procesów wymiany ciepła i masy w warstwie ziemniaków jest to, iż:

- współczynniki rozwiązań wyznaczane są mało dokładną metodą graficzną,
- metoda ta nie gwarantuje adaptacji rozwiązań, do zmieniających się podczas przechowywania warunków, np. do zmieniającej się masy ziemniaków.

Współczynnikami rozwiązań (zależność 21) nie są bowiem parametry charakteryzujące własności termiczno-wilgotnościowe ziemniaków i powietrza je otaczającego, umożliwiające adaptację rozwiązań, lecz teoretyczne parametry uproszczonej transmitancji operatorowej (wzór 19). Czynniki powyższe powodują małą dokładność uzyskanych rozwiązań. Wyniki badań eksperymentalnych wykazały, że uzyskane rozwiązania układu równań (1-4), za pomocą omówionej wyżej analityczno-graficznej metody częstotliwościowej nie gwarantują dokładnego sterowania mikroklimatem w przechowalni ziemniaków, a ich stosowanie grozi zniszczeniem ziemniaków.

Wymienione tu trudności można pokonać, wykorzystując symulację komputerową do rozwiązania układu równań (1-4). W tym celu należy posłużyć się specjalistycznym oprogramowaniem, np. pakietem programowym MATLAB. Pakiet ten umożliwia opracowanie komputerowego modelu warstwy ziemniaków [Wachowicz, Dudzicz 1998].

Uzyskane rozwiązania równań, tworzących model warstwy są dokładniejsze. Tym samym sterowanie mikroklimatem jest precyzyjniejsze i straty masy bulw niższe, zaś ich jakość lepsza, w porównaniu z metodą analityczno-graficzną.

## Podsumowanie

1. Dokładność modelu procesów wymiany ciepła i masy zachodzących w warstwie ziemniaków zależy od:
  - postaci zależności  $dq_{res}/dt$  przyjętej podczas formułowania modelu,
  - wartości współczynników wnikania ciepła  $\alpha$  i masy  $\beta$  pomiędzy ziemniakami i otaczającym je powietrzem,
  - metody rozwiązywania równań stanowiących model warstwy.

2. Rozwiązania równań modelu warstwy ziemniaków uzyskane dzięki zastosowaniu metody analityczno – graficznej nie zapewniają adaptacji modelu do zmieniających się warunków przechowalniczych.
3. Dzięki zastosowaniu podczas modelowania:
  - uogólnionego modelu oddychania ziemniaków, opracowanego na podstawie wyników badań wielu odmian ziemniaka przeprowadzonych w kilku sezonach technologicznych,
  - wyznaczonych eksperymentalnie wartości współczynników wnikania ciepła i masy,
  - symulacji komputerowej z wykorzystaniem np. programu MATLABmożliwa jest poprawa dokładności modelu warstwy bulw i adaptacja modelu do nowych sytuacji przechowalniczych. Tym samym możliwe jest dokładniejsze niż dotąd sterowanie mikroklimatem w przechowalni, a tym samym niższe straty technologiczne i lepsza jakość ziemniaków.

## Bibliografia

- Ginzburg M.A., Gromov M.A.** 1987. Teplofiziceskije charakteristiki kartofel'ja, ovoscej i płodov. Agroprouzdat. Moskva. s. 86-107.
- Wachowicz E. Dudzicz** 1998. Wykorzystanie programu MATLAB do symulacji procesów zachodzących w warstwie ziemniaków. Inżynieria Rolnicza. 2. s. 99-106.
- Wachowicz E.** 1999. Modelowanie wybranych procesów w przechowalniach ziemniaków. Inżynieria Rolnicza. 4(5). Seria: Rozprawy habilitacyjne nr 2. ISSN 1429-7264.

## MODELLING PROBLEMS FOR PROCESSES IN POTATO STORE

**Abstract.** The paper presents difficulties involved in the formulation and solving of equations constituting models of heat and mass exchange processes in a potato layer.

**Key words:** storage, potatoes, layer, processes, modelling

### Adres do korespondencji:

Ewa Wachowicz; e-mail: ewa.wachowicz@tu.koszalin.pl  
Katedra Automatyki  
Politechnika Koszalińska  
ul. Raławicka 15/17  
75-620 Koszalin