

Piotr FOŁĘGA, Tomasz FIGLUS
Politechnika Śląska, Gliwice

WYZNACZANIE NAPRĘŻEŃ W PODSTAWACH ZĘBÓW KÓŁ NAPĘDÓW ZĘBATYCH

Słowa kluczowe

Koło zębate, stan naprężenia, metoda elementów brzegowych.

Streszczenie

W artykule przedstawiono zastosowanie Metody Elementów Brzegowych (MEB) w numerycznej analizie wytrzymałości zębów. Przeanalizowano wpływ cech konstrukcyjnych koła zębatego oraz cech konstrukcyjnych narzędzia na wartości naprężeń w stopie zęba koła wewnętrznie oraz zewnętrznie uzębionego. Przeprowadzono również analizę wpływu zużycia powierzchni roboczych zębów oraz parametrów protuberancji narzędzia na wartości naprężeń w ich stopach. Ponadto zastosowano MEB do wyznaczania zmian wartości sztywności zązębienia kół zębatych oraz naprężeń w dnach wrębów międzyzębnych wieńca zębatego koła podatnego przekładni falowej.

Wprowadzenie

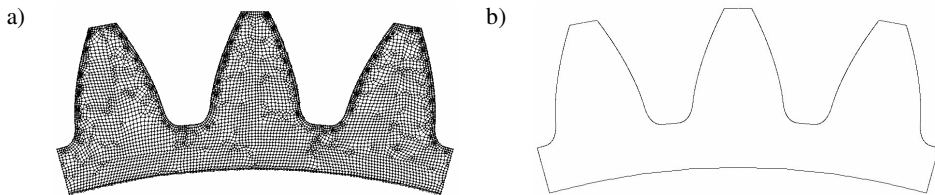
Dążenie do zmniejszenia wymiarów napędów zębatych, a także wzrost obciążeń roboczych przenoszonych przez przekładnie wpływają na zwiększenie sił międzyzębnych. Potrzeba spełnienia wysokich wymagań stawianych przekładniom zębatym w czasie ich eksploatacji powoduje, że prowadzi się ciągłe badania w celu zwiększenia wytrzymałości zębów ich kół zębatych.

Jedną z najprostszych metod obliczeniowych pozwalających na określenie naprężeń w podstawie zęba koła zębatego jest metoda łamanych przekrojów. Metoda ta za pomocą elementarnych sposobów znanych z wytrzymałości materiałów daje jakościowo dobry obraz stanu naprężenia w podstawie zęba, uwzględniając naprężenia wywołane momentem gnącym, siłą ścinającą oraz siłą ściskającą. Jednakże wyniki obliczeń tą metodą nie są wystarczająco dokładne z uwagi na zbyt uproszczony model obliczeniowy zęba. Inną z metod służącą do określania naprężeń w podstawie zęba jest metoda odwzorowań wiernokątnych (MOW). Główną zaletą MOW jest to, że otrzymuje się zadowalające wartości naprężeń w podstawie zęba przy założeniu kilku punktów na zarysie stopy zęba. Zaleta ta okupiona jest jednak koniecznością rozwiązywania układu nieliniowych równań algebraicznych, co stwarza problemy natury numerycznej. Do głównych wad MOW należy jednak przede wszystkim brak uniwersalności. Zastosowanie MOW do obliczeń naprężeń w kołach wewnątrznie uzębionych napotyka na znaczne trudności. Obecnie w praktyce konstrukcyjnej najczęściej do wyznaczania naprężeń w podstawach zębów kół napędów zębatach stosuje się metody zalecane przez normy [1], które przede wszystkim uwzględniają naprężenia gnące w podstawie zęba. Dla uściślenia obliczeń wytrzymałościowych oraz optymalizacji cech konstrukcyjnych przekładni celowe jest stosowanie dokładnych metod wyznaczania naprężeń. Metodami zapewniającymi największą dokładność uzyskanych wyników naprężeń w podstawie zęba są dzisiaj numeryczne metody analizy stanu naprężenia. Należą do nich Metoda Elementów Brzegowych (MEB) oraz Metoda Elementów Skończonych (MES). Wykorzystanie tych metod do wyznaczania wartości naprężeń w kołach napędów zębatach pozwala obecnie wykonywać analizy wytrzymałościowe zębów o dowolnej geometrii kół wewnątrznie i zewnątrznie uzębionych oraz pozwala na optymalny dobór cech konstrukcyjnych kół zębatach i zarysu odniesienia.

W niniejszym opracowaniu przedstawiono zastosowanie MEB w obliczeniach wytrzymałościowych zębów kół napędów zębatach. W tym celu opracowano programy komputerowe służące do analizy stanu naprężenia i przemieszczeń zębów kół zębatach [2–7]. Obliczenia wykonywane są przy wykorzystaniu trzech programów komputerowych. Pierwszy program pozwala wyznaczyć dokładne zarysy zębów kół zewnątrznie lub wewnątrznie uzębionych w zależności od przyjętych cech geometrycznych kół zębatach i parametrów zarysu odniesienia. Kolejny program na podstawie wczytanych danych geometrycznych umożliwia zadanie warunków brzegowych (obciążeń i podpór w dowolnie przyjętych węzłach) oraz dowolne zobrazowanie przyjętego modelu numerycznego. Po wczytaniu tak przygotowanych danych wejściowych przy pomocy programu do analizy płaskiego stanu naprężenia i przemieszczenia wykonywane są obliczenia numeryczne z wykorzystaniem MEB.

1. Wyznaczanie naprężeń w stopie zęba z wykorzystaniem MEB

Podstawowym powodem wyboru MEB do analizy stanu naprężenia w podstawie zęba było to, że w metodzie tej naprężenia wyznaczone są bezpośrednio na brzegu elementu (na zarysie zęba). Z badań doświadczalnych wynika, że w przypadku zębów maksymalne naprężenia występują właśnie bezpośrednio na ich zarysie. Metoda ta ponadto wymaga zwykle dyskretyzacji brzegu ciała, a nie jego wnętrza, jak to jest w innych metodach numerycznych, np. w MES (rys. 1). Ta redukcja wymiaru zadania o jeden rząd ułatwia przygotowywanie danych wejściowych i prowadzi do układu równań algebraicznych znacznie mniejszego rzędu niż w MES.



Rys. 1. Przykładowy podział zębów na elementy w metodzie: a) MES, b) MEB

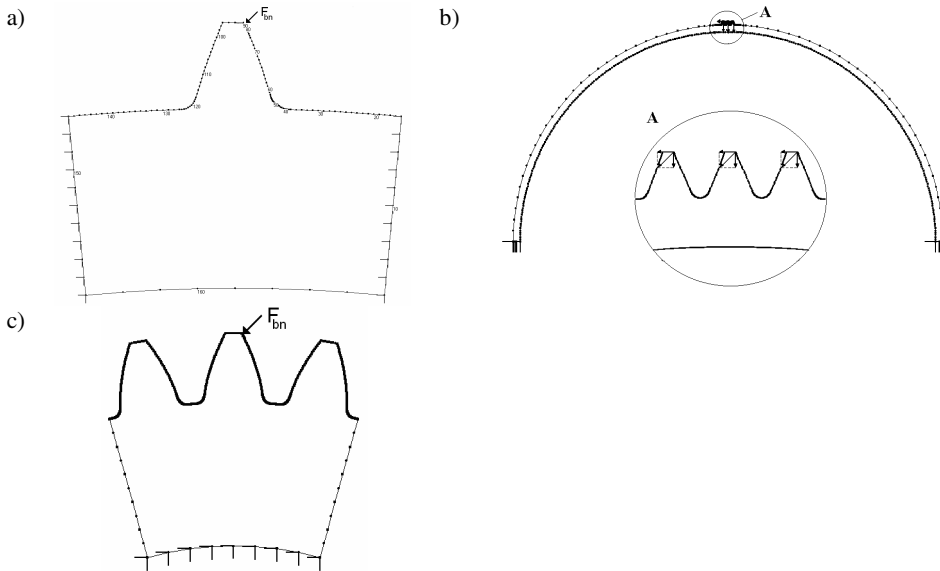
Zastosowanie MEB do efektywnych i dokładnych obliczeń wytrzymałościowych zębów wymaga wcześniejszego przyjęcia modelu numerycznego zęba. Wykonane obliczenia kół wewnętrznie i zewnętrznie uzębionych dotyczyły zębów obciążonych jednostkową siłą skupioną w górnej części zarysu oraz podpartych w sposób przedstawiony na rysunku 2a. W obliczeniach rozpatrywano wyodrębniony z koła zębatego pojedynczy ząb pomijając wpływ sąsiednich zębów. Założenie to upraszcza obliczenia numeryczne, nie wprowadzając do wyników obliczeń znacznych błędów.

Rozważono także naprężenia w wieńcu zębatym koła podatnego przekładni falowej, którego opracowany model numeryczny przedstawiono na rysunku 2b. W modelu tym obciążenie koła pochodzące od generatora przekładni falowej zostało zadane w postaci uprzednio wyznaczonych przemieszczeń powierzchni wewnętrznej koła podatnego. Natomiast obciążenie wywołane przenoszonym przez przekładnię momentem obrotowym zostało zadane w postaci sił międzyzębnych. W obliczeniach rozpatrywano wyodrębnione z wieńca zębatego trzy zęby pomijając wpływ pozostałych. Ze względu na trudności numeryczne przyjęto uproszczony model wieńca zębatego w zakresie analizy stanu naprężenia przy asymetrii stref obciążenia: międzyzębnej i opierania na generatorze.

Na rysunku 2c przedstawiono natomiast sposób podparcia i obciążenia zęba przyjęty do wyznaczania zmian sztywności zazębienia na odcinku przyporu. Opracowany model numeryczny uwzględnia rzeczywisty kształt zęba oraz odkształcenie wieńca koła zębatego. W przeprowadzonych obliczeniach przy wy-

znaczeniu sztywności zazębienia nie uwzględniono spłaszczenia powierzchni obu zębów w kolejnych punktach styku spowodowanego kontaktem tych powierzchni.

W programie komputerowym do obliczeń współrzędnych punktów zarysu zębów wykorzystano zależności podane przez L. Müllera [8, 9]. Wszystkie wymiary zębów zostały odniesione do modułu równego jeden, co pozwoliło uzyskać parametry geometryczne zarysu zęba oraz wyniki obliczeń w wielkościach bezwymiarowych.



Rys. 2. Opracowane modele numeryczne MEB stosowane w obliczeniach: a) wytrzymałości zębów kół zębatych, b) wieńca zębatego koła podatnego przekładni falowej, c) zmian sztywności zazębienia kół

2. Zastosowanie MEB w analizie stanu naprężenia w podstawie zęba

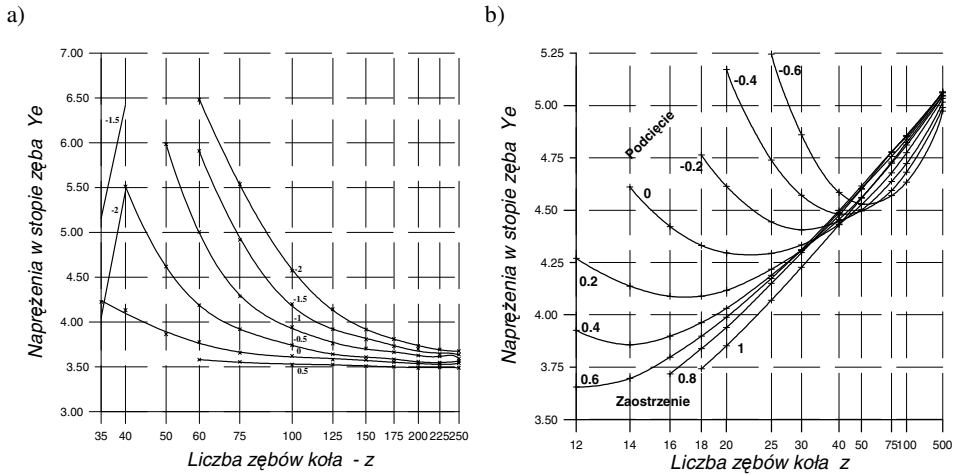
O kształcie zęba, a zwłaszcza jego stopy, decydują nie tylko parametry nacinanego koła (liczba zębów, współczynnik przesunięcia zarysu), ale także parametry zarysu odniesienia. W pracach [2–5] przeanalizowano wpływ cech geometrycznych koła i narzędzia na wartości naprężeń w stopie zęba. Wyniki obliczeń przedstawiono w postaci krzywych ukazujących zależność naprężeń w stopie zęba w funkcji liczby zębów koła przy stałych wartościach współczynnika przesunięcia zarysu koła (rys. 3). Naprężenia podano w jednostkach bezwymiarowych [8, 9]:

$$Y_e = \sigma_{\max} \cdot \frac{b \cdot m}{F_{bn}} \quad (1)$$

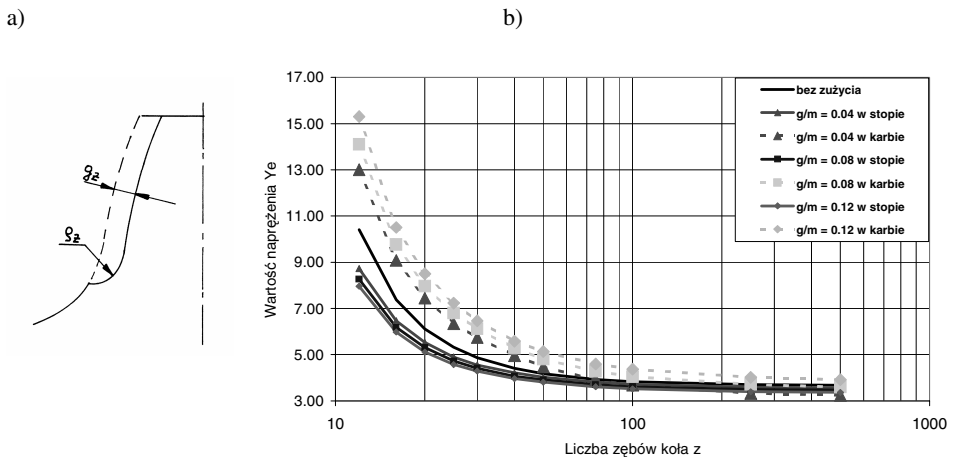
gdzie: σ_{max} – maksymalna wartość naprężenia na brzegu zęba,
 b – szerokość koła zębatego,
 m – moduł zęba,
 F_{bn} – wartość siły międzyzębnej.

Z zależności (1) wynika, że przy założeniu $F_{bn} / b \cdot m = 1$ wartość naprężeń w stopie zęba σ_{max} równa jest wyznaczonym wartości współczynnika Y_e [8, 9].

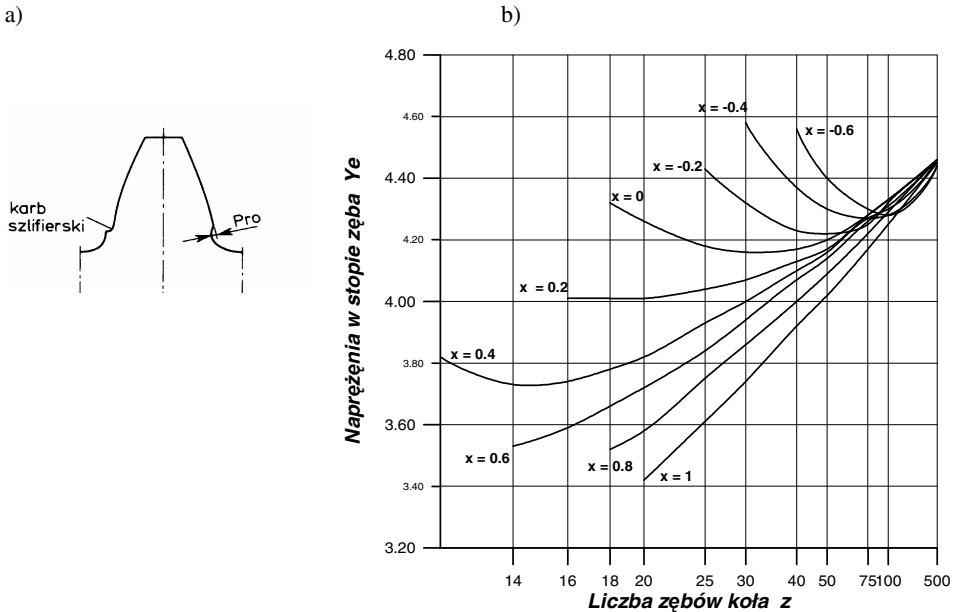
Otrzymane przykładowe wyniki obliczeń numerycznych dla przyjętych założeń przedstawiono na rys. 3–5.



Rys. 3. Naprężenia w stopie zęba koła: a) wewnątrz uzębionego, b) zewnątrz uzębionego



Rys. 4. a) przyjęte parametry zużycia zęba, b) naprężenia w funkcji głębokości zużycia



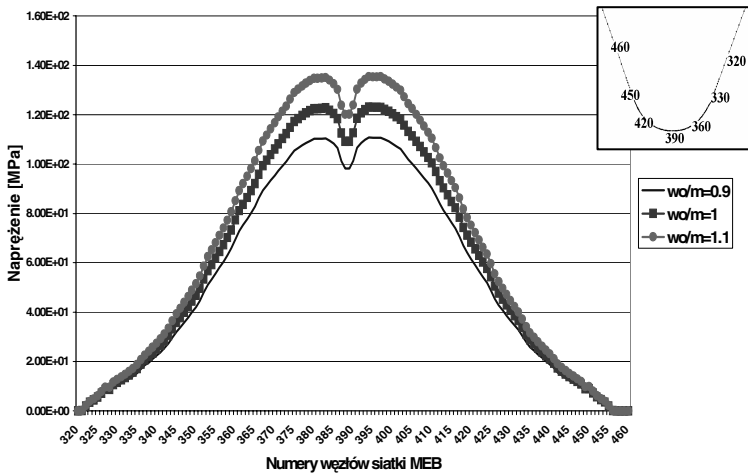
Rys. 5. a) ząb z karbem szlifierskim i z protuberancją, b) naprężenia w stopie zęba

Ważnym problemem związanym z eksploatacją kół zębatych jest wpływ zachodzącego zużycia powierzchni roboczych na występujące naprężenia w stopie zęba. W opracowaniu [4] rozważono przypadek naturalnego procesu zużywania się zębów w wyniku ich współpracy, a w szczególności wpływu tego zużycia na wartości naprężeń występujących w stopie zęba. Obliczenia naprężeń wykonano dla zęba nieużytego oraz dla kilku wartości głębokości zużycia g_z/m oraz wartości promienia zużycia $\rho_z/m = 0,5$ przyjętych na podstawie badań doświadczalnych (rys. 4a). Przykładowe wyniki obliczeń przedstawiono na rysunku 4b. Na podstawie doświadczeń eksploatacyjnych można stwierdzić, że zużycie powierzchni roboczej zębów prowadzi do wystąpienia karbu w skrajnym punkcie przyporu położonym na stopie zęba. Analizując wyniki przedstawione na rys. 4b można zauważyć, że zwiększenie wartości głębokości zużycia powoduje spadek wartości naprężeń w stopie zęba, przy jednoczesnym wzroście naprężeń w karbie spowodowanym zużyciem. Podstawową przyczyną tego jest odciążenie stopy zęba przez powstający w wyniku zużycia karb [4].

W opracowaniu [5] przeprowadzono analizę wpływu parametrów protuberancji narzędzia na wartości maksymalnych naprężeń w podstawie zęba koła zewnętrznie uzębionego. W przypadku kół szlifowanych oprócz karbu zmęczeniowego w stopie zęba może powstać dodatkowy ostry karb od krawędzi tarczy szlifierskiej, który może znacznie zmniejszyć wytrzymałość zmęczeniową zęba. Aby uniknąć tego szkodliwego zjawiska stosuje się zarysy odniesienia z protu-

berancją, która polega na wykonywaniu w trakcie nacinania zębów specjalnego łagodnego wgłębienia u podstawy zęba (rys. 5a). Wgłębienie to stanowi wybieg dla tarczy szlifierskiej, stosowanej w procesie obróbki wykańczającej przez szlifowanie. Przykładowe otrzymane wyniki obliczeń numerycznych pokazano na rys. 5b. Wpływ parametrów protuberancji na zmiany naprężeń w podstawie zęba jest nieznaczny, dlatego celowe jest w każdym przypadku przeprowadzenie obliczeń sprawdzających.

Ważnym etapem obliczeń wytrzymałościowych przekładni falowych jest ocena wartości naprężeń w dnach wrębów międzyzębnych wieńca koła podatnego [6]. Częstym zjawiskiem poprzedzającym zniszczenie tego elementu przekładni jest jego pęknięcie w miejscach lokalnego wzrostu naprężeń w wieńcu zębatym. Przykładowe wyniki obliczeń oraz fragment dna wrębu międzyzębnego z zaznaczoną numeracją siatki MEB pokazano na rys. 6. Dotyczą one wpływu na naprężenia względnej deformacji promieniowej w_o/m . Wzrost względnej deformacji promieniowej powoduje zwiększenie wartości naprężeń. Miejscem narażonym na znaczny wzrost wartości naprężeń są dna wrębów międzyzębnych, co odpowiada wynikom badań doświadczalnych.



Rys. 6. Rozkłady naprężeń w dnie wrębu międzyzębnego wieńca koła podatnego

Podsumowanie

W pracy przedstawiono obliczenia wytrzymałościowe kół napędów zębatych z wykorzystaniem MEB. Otrzymane wyniki dotyczące naprężeń w stopach zębów stawiają tę metodę na równi z innymi, wykorzystywanymi obecnie metodami analizy stanu naprężenia. Zastosowanie MEB w obliczeniach wytrzymało-

ściowych zębów kół umożliwia nie tylko ich numeryczną analizę wytrzymałości, ale także analizę wrażliwości oraz optymalizację kształtu zarysu podstawy zęba.

Przedstawione w pracy wykresy zbiorcze wyników obliczeń mogą stanowić wytyczne do konstruowania kół napędów zębatych.

Bibliografia

1. Jaśkiewicz Z., Wąsiewski A.: Przekładnie walcowe, WKiŁ, Warszawa 1992.
2. Fołęga P., Wilk A.: Analiza stanu naprężenia w podstawie zęba z wykorzystaniem MEB, Materiały XXI Sympozjonu PKM, Bielsko Biała-Ustroń, Tom I, WNT 2003.
3. Fołęga P.: Analiza naprężeń w kołach zębatych wyznaczonych metodą elementów brzegowych, Problemy Eksploatacji, vol. 3, Radom 2006.
4. Fołęga P.: Wpływ zużycia zębów na wartości naprężeń w stopach zębów kół zewnętrznie uzębionych, Przegląd Mechaniczny, vol. 5, Warszawa 2007.
5. Fołęga P., Wilk A.: Wpływ protuberancji na stan naprężeń w stopie zęba koła zewnętrznie uzębionego, ZN Pol. Śl., s. Transport, Z. 38, Gliwice 1999.
6. Fołęga P.: Analiza stanu naprężenia w dnach wrębów międzyzębnych koła podatnego przekładni falowej, Materiały XXIII Sympozjonu PKM, Rzeszów-Przemyśl, Tom IV, 2007.
7. Fołęga P., Wilk A., Figlus T.: Symulowanie rozwoju pęknięcia zęba koła z wykorzystaniem MEB w badaniach diagnostycznych przekładni, Diagnostyka, vol. 33, 2005.
8. Müller L.: Przekładnie zębate – projektowanie, WNT, Warszawa 1996.
9. Müller L.: Obliczanie naprężeń w podstawie zęba, ZN Pol. Śl., s. Transport, z. 8, Gliwice 1988.

Recenzent:
Jerzy OSIŃSKI

The calculation of the values of stresses of the tooth base of a driving gear

Key words

Toothed wheel, state of stress, boundary elements method.

Summary

Application of the Boundary Elements Method (BEM) in the numerical analysis of the strength of the wheels' gears has been presented in the paper.

There has been presented the influence of the construction features of gear wheel and construction features of the tool (gear-shaper cutter) on the values of stresses in the base of an internal and external gear tooth. Analysis of the influence of wear of active faces of teeth and the influence of the construction features of protuberation on the values of stresses in their bases has also been made. Application of the BEM in the numerical analysis of the stiffness of meshing of toothed wheels and of the harmonic gear drive flexspline has also been presented in the paper.

