PRÓBKOWANIE SYGNAŁÓW DIAGNOSTYCZNYCH CZĘŚC III PRÓBKOWANIE W PRZESTRZENI HILBERTA Z BAZAMI WIELOMIANOWYMI ZA POMOCĄ NIEKLASYCZNYCH JĄDER

Zenon SYROKA
Uniwersytet Warmińsko – Mazurski, Wydział Nauk Technicznych
Ul. Oczapowskiego 11, 10 –717 Olsztyn, e-mail: syrokaz@onet.eu

Streszczenie
W pracy wyprowadzono regułą Cristoffela – Darboux oraz dokonano analizy próbkowania sygnałów diagnostycznych przy wykorzystaniu jądra Legendr'a. Czebyszewa, Laguerre'a i Hermite'a. Podano metodykę wyprowadzania jąder reprodukujących w bazach opartych o klasyczne wielomiany ortogonalne.

Słowa kluczowe: próbkowanie sygnałów, przestrzeń Hilberta, bazy wielomianowe, nieklasyczne jądra reprodukujące.

SAMPLING THE DIAGNOSTIC SIGNALS
PART III
SAMPLING IN THE HILBERT SPACE WITH POLYNOMIALS BASIS USING NON CLASICAL KERNEL

Summary
In this article removaled the Cristoffela – Darboux rule. The analysis of the sampling diagnostic signals using Legendr's. Czebyszew's, Laguerre's and Hermite's kernals was made. Methodology of derivation of reproducing kernels in basics, based on clasical ortogonal polynomial.

Keywords: sampling signals, Hilbert space, polynomials basis, reproducing kernel.

1.WPROWADZENIE

W pracy przeanalizowano próbkowanie sygnałów diagnostycznych w oparciu o generatory zbudowane na podstawie klasycznych wielomianów ortogonalnych.

Praca jest niezależną częścią jednocześnie stanowi kontynuację pracy „Próbkowanie sygnałów diagnostycznych. Część I. Próbkowanie w przestrzeni Hilberta z reprodukującym jądrem Shanona" oraz pracy Próbkowanie sygnałów diagnostycznych. Część II. Próbkowanie w przestrzeni Hilberta z bazami harmonicznymi za pomocą nieklasycznych jąder"

2. OGÓLNA TEORIA JĄDER REPRODUKCYJNYCH W BAZACH WIELOMIANOWYCH

Niech

$$P_0(x), P_1(x), \ldots\ldots\ldots\ldots P_n(x) \tag{1}$$

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots a_1 x + a_0 \tag{2}$$

będzie szeregiem wielomianów ortogonalnych na przedziale [a,b], $-\infty \le a < b \le +\infty$.

Definicja 1 [1]

Mówimy, że szereg wielomianów $\{P_n(x)\}$ jest ortogonalny w przedziale [a,b] jeżeli spełniony jest warunek:

$$\int_a^b P_n(x) P_m(x) = h_n \delta_{nm} \tag{3}$$

gdzie δ_{nm} jest symbolem delta Kroneckera.

Niech $s(t)$ będzie funkcją taką, że:

$$\int_a^b s(t) P_n(t) dt \tag{4}$$

istnieje dla każdego n.

Odpowiadający temu szereg Fouriera dany jest w postaci:

$$s_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \ldots\ldots\ldots + c_n P_n(x) + \ldots\ldots\ldots \tag{5}$$

gdzie:

$$c_n = \frac{\int_a^b s(t)P_n(t)dt}{\int_a^b P_n^2(t)dt} \quad (6)$$

Suma częściowa takiego szeregu dana jest w postaci [1]:

$$s_n(x) = \sum_{j=0}^{n} P_j(x)\frac{\int_a^b s(t)P_n(t)dt}{\int_a^b P_n^2(t)dt} = \int_a^b s(t)K_n(t,x)dt \quad (7)$$

gdzie

$$K_n(t,x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{P_j(x)P_j(t)}{P_j^2(t)} \quad (8)$$

W przypadku gdy szereg (1) jest ortonormalny to zależność (8) przybierze postać:

$$K_n(t,x) = \sum_{j=0}^{n} P_j(x)P_j(t) \quad (9)$$

W [1] podano definicję:

Definicja 2 [1]

Dla szeregu ortonormalnego $\{P_n(x)\}$ *szereg* $\{K_n(t,x)\}$ *dany zależnością*

$$K_n(t,x) = \sum_{j=0}^{n} P_j(x)P_j(t)$$

*nazywany jest **jądrem wielomianowym.***

Twierdzenie 3 [1]

Każdy szereg ortogonalnych wielomianów $\{P_n(x)\}$ spełnia równanie:

$$P_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)P_n(x) - C_n P_{n-1}(x) \quad \text{dla } n \geq 0 \quad (10)$$

gdzie:

$$P_{-1}(x) = 0 \quad (11)$$

$$A_n = \frac{a_{n+1}}{a_a} \quad (12)$$

$$B_n = A_n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{a_{n-1}}{a_n}\right) \quad (13)$$

$$C_n = \frac{A_n}{A_{n-1}}\frac{h_n}{h_{n-1}} \quad (14)$$

gdzie h dane jest wyrażeniem (3)

Na podstawie twierdzenia (3) możemy zapisać:

$$P_{n+1}(x)P_n(t) = (A_n x + B_n)P_n(x)P_n(t) - C_n P_{n-1}(x)\mathrm{P_n(t)} \quad (15)$$

$$P_{n+1}(t)P_n(x) = (A_n t + B_n)P_n(x)P_n(t) - C_n P_{n-1}(t)\mathrm{P_n(x)} \quad (16)$$

Odejmując od wyrażenia (15) wyrażenie (16) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} &P_{n+1}(x)P_n(t) - P_{n+1}(t)P_n(x) = \\ &= (A_n x + B_n)P_n(x)P_n(t) - C_n P_{n-1}(x)P_n(t) - \\ &- (A_n t + B_n)P_n(x)P_n(t) + C_n P_{n-1}(t)P_n(x) = \\ &= P_n(x)P_n(t)(A_n x + B_n - A_n t - B_n) + \\ &+ C_n[P_{n-1}(t)P_n(x) - P_{n-1}(x)P_n(t)] = \\ &= P_n(x)P_n(t)[A_n(x-t)] + \frac{A_n}{A_{n-1}}\frac{h_n}{h_{n-1}}[P_{n-1}(t)P_n(x) - P_{n-1}(x)P_n(t)] \end{aligned} \quad (17)$$

Dzieląc obie strony równania (17) przez $A_n(x-t)h$ otrzymamy:

$$\frac{1}{A_n}\frac{1}{h_n}\frac{P_{n+1}(x)P_n(t) - P_{n+1}(t)P_n(x)}{x-t} = P_n(x)P_n(t) + \frac{1}{A_{n-1}}\frac{1}{h_{n-1}}\frac{P_{n-1}(t)P_n(x) - P_{n-1}(x)P_n(t)}{x-t} \quad (18)$$

Stąd:

$$P_n(x)P_n(t) = \frac{1}{A_n}\frac{1}{h_n}\frac{P_{n+1}(x)P_n(t) - P_{n+1}(t)P_n(x)}{x-t} - \frac{1}{A_{n-1}}\frac{1}{h_{n-1}}\frac{P_{n-1}(t)P_n(x) - P_{n-1}(x)P_n(t)}{x-t} \quad (19)$$

Wykorzystując w (19) własność (11) twierdzenia 3 otrzymamy:

$$\sum_{j=0}^{n} P_j(x)P_j(t) = \frac{1}{A_n}\frac{1}{h_n}\frac{P_{n+1}(x)P_n(t) - P_{n+1}(t)P_n(x)}{x-t} \quad (20)$$

Podstawiając zależność (20) do (8) otrzymamy:

$$K_n(t,x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{P_j(x)P_j(t)}{h_n} = \frac{1}{A_n}\frac{1}{h_n}\frac{P_{n+1}(x)P_n(t) - P_{n+1}(t)P_n(x)}{x-t} \quad (21)$$

W przypadku układu ortonormalnego wielomianów ($h_n = 1$) mamy:

$$K_n(t,x) = \sum_{j=0}^{n} P_j(x)P_j(t) = \frac{1}{A_n}\frac{P_{n+1}(x)P_n(t) - P_{n+1}(t)P_n(x)}{x-t} \quad (22)$$

W miejsce A_n podstawimy zależność (12) twierdzenia 3 i otrzymamy:

$$K_n(t,x) = \sum_{j=0}^{n} P_j(x)P_j(t) = \frac{a_n}{a_{n+1}}\frac{P_{n+1}(x)P_n(t) - P_{n+1}(t)P_n(x)}{x-t} \quad (23)$$

Zależność (22) dla wielomianów stanowiących układ ortonormalny oraz zależność (20) dla wielomianów stanowiących układ ortogonalny nazywana jest twierdzeniem lub regułą Christoffela-Darboux [1], [6].

Reguła Christoffela-Darboux określa jądro wielomianowe dla wielomianów stanowiących układ ortogonalny lub ortonormalny.

Zbiory wielomianów wykorzystywanych do reprezentacji sygnałów w przestrzeni Hilberta nie są zbiorami ortogonalnymi, ale ortogonalnymi z pewną wagą $w(x)$.

Definicja 4

Zbiór wielomianów $\{P_n(x)\}$ *nazywamy ortogonalnym z wagą* $w(x)$ jeżeli:

$$\int_D w(x)P_n(x)P_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \neq m \\ k_n < +\infty & \text{dla } n = m \end{cases} \quad (24)$$

Funkcja wagowa należy do L^1 i spełnia swoje warunki normujące w pewnym przedziale [a, b]. Do najważniejszych typów funkcji wagowych w przedziale [a, b] zaliczamy [4]:

1. Dla każdego skończonego przedziału [a, b]

$$w(x) = (b-x)^{\alpha}(x-a)^{\beta} \quad \text{gdzie } \alpha > -1 \text{ i } \beta > -1 \tag{25}$$

2. Dla przedziału $[a, \infty)$, a jest skończone:

$$w(x) = e^{-x}(x-a)^{\beta} \quad \text{gdzie } \alpha > -1 \tag{26}$$

3. Dla przedziału $(-\infty, +\infty)$:

$$w(x) = e^{-x^2} \tag{27}$$

Wielomiany ortogonalne otrzymane przez ortogonalizację przy pomocy wag danych zależnościami (25), (26), (27) [4] nazywamy **klasycznymi ortogonalnymi wielomianami.**

Funkcja $H(x)$ [4] zostanie zdefiniowana w następujący sposób:

$H(x) = (b-x)(x-a)$ dla funkcji wagowej (25) (28)

$H(x) = x - a$ dla funkcji wagowej (26) (29)

$H(x) = 1$ dla funkcji wagowej (27) (30)

Twierdzenie Rodrigueza [4] umożliwia uzyskanie odpowiedniej postaci analitycznej wielomianu ortogonalnego:

$$P_n(x) = \frac{1}{\mu_n}\frac{1}{w(x)}\frac{d^n}{dx^n}\left[w(x)H^n(x)\right] \tag{31}$$

gdzie μ_n jest odpowiednią stałą.

Do klasycznych wielomianów ortogonalnych dla, których analizowane będą jądra reprodukcyjne zaliczamy:

1. Wielomiany Legendre'a , w przedziale $(-1,1)$, $w(x) = 1$ (32)
2. Wielomiany Czebyszewa pierwszego rodzaju, w przedziale $(-1,1)$, $w(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ (33)
3. Wielomiany Laguerre'a, w przedziale (a,∞), $w(x) = e^{-x}(x-a)^{\alpha}$ gdzie $\alpha > -1$. (34)
4. Wielomiany Hermite'a, w przedziale $(-\infty,+\infty)$, $w(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ (35)

Jądra reprodukcyjne związane z tymi wielomianami zostaną wyprowadzone w następnych podrozdziałach.

3. PRZESTRZEŃ HILBERTA Z REPRODUKUJĄCYM JĄDREM LEGENDRE'A

Wielomiany Legendre'a $P_n(x)$ dla dowolnych rzeczywistych lub zespolonych wartości zmiennej otrzymujemy z twierdzenia Rodrigueza [4] podstawiając do (31) zależność (28) oraz warunek (32) otrzymamy:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{\mu_n}\frac{1}{w(x)}\frac{d^n}{dx^n}\left[w(x)H^n(x)\right] = \\ &= \frac{1}{\mu_n}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)(1+x)\right]^n = \frac{1}{\mu_n}\frac{d^n}{dx^n}\left(1-x^2\right)^n \end{aligned} \tag{36}$$

Wartość współczynnika μ_n wynosi [2]:

$$\frac{1}{\mu_n} = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \tag{37}$$

Uwzględniając w (36) zależność (37) otrzymamy wzór określający wielomiany Legendre'a:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n,\ n = 0, 1, 2, \ldots\ldots \tag{38}$$

W [4] podano, iż:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \neq m \\ k_n = \dfrac{2}{2n+1} & \text{dla } n = m \end{cases} \tag{39}$$

Równanie rekurencyjne dla wielomianów Legendre'a wynosi [6]:

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0 \tag{40}$$

$$P_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)}{(n+1)}xP_n(x) - \frac{n}{n+!}P_{n-1}(x) \tag{41}$$

W związku z tym:

$$A_n = \frac{2n+1}{n+!} \tag{42}$$

Podstawiając do (21) zależności (39) i (42) otrzymamy:

$$\begin{aligned} K_n(t,x) &= \sum_{j=0}^{n}\frac{P_j(x)P_j(t)}{k_n} = \frac{1}{A_n}\frac{1}{k_n}\frac{P_{n+1}(x)P_n(t) - P_{n+1}(t)P_n(x)}{x-t} = \\ &= \frac{n+1}{2n+1}\frac{2n+2}{2}\frac{P_{n+1}(x)P_n(t) - P_{n+1}(t)P_n(x)}{x-t} = \\ &= \frac{n+1}{2}\frac{P_{n+1}(x)P_n(t) - P_{n+1}(t)P_n(x)}{x-t} \end{aligned} \tag{43}$$

Stąd wyrażenie:

$$L_n(t,x) = K_n(t,x) = \frac{n+1}{2}\frac{P_{n+1}(x)P_n(t) - P_{n+1}(t)P_n(x)}{x-t} \tag{44}$$

nazywane jest **jądrem reprodukcyjnym Legendre'a**. Jądra takie rozważano w pracy [3] jako przykład jądra realizującego próbkowanie w skończonym przedziale. Próbkowaniu takiemu można poddawać kanały pracujące z sygnałami nadawanymi kierunkiem prądu lub napięcia. Amplituda takich sygnałów jest ograniczona do przedziału [-A, A], który jest łatwo unormować do [-1, 1].

Rozwinięcie danej funkcji (sygnału) $s(x)$ w szereg według wielomianów Legandre'a ma postać:

$$s(x)=\sum_{j=0}^{\infty} c_j P_j(x) \qquad \text{gdzie } -1<x<1 \tag{45}$$

Współczynniki c_n tego rozwinięcia mogą być formalnie wyznaczone z warunku ortogonalności (39) oraz mnożąc wyrazy szeregu (45) przez $P_m(x)$ i całkując je w przedziale (-1, 1) otrzymamy:

$$\int_{-1}^{1} s(x)P_m(x)dx=\int_{-1}^{1} s(x)\sum_{j=0}^{\infty} c_j P_j(x)P_n(x)=\sum_{j=0}^{\infty} c_j\int_{-1}^{1} P_j(x)P_n(x)dx=\frac{2}{2n+1}c_n \tag{46}$$

stąd wynika, że:

$$c_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} s(x)P_n(x)dx \quad \text{gdzie } n=0,1,......... \tag{47}$$

Oznaczymy przez $s_n(x)$ sumę n+1 wyrazów ciągu (45):

$$s_n(x)=\sum_{j=0}^{n} c_j P_j(x) \tag{48}$$

Podstawiając do (48) zależność (47) otrzymamy:

$$s_n(x)=\sum_{j=0}^{n}\left(j+\frac{1}{2}\right)P_j(x)\int_{-1}^{1} s(t)P_j(t)dt=\int_{-1}^{1} s(t)L_j(t,x)dt \tag{49}$$

gdzie:

$$L_n(t,x)=\sum_{j=0}^{n}\left(j+\frac{1}{2}\right)P_j(x)P_j(t) \tag{50}$$

jest jądrem reprodukującym Legendre'a.

Uwzględniając w (49) zależność (44) otrzymamy:

$$s_n(x)=\int_{-1}^{1} s(t)\frac{n+1}{2}\frac{P_{n+1}(x)P_n(t)-P_{n+1}(t)P_n(x)}{x-t}dt \tag{51}$$

wartość sygnału w odbiorniku odtworzonego z próbek pobranych według wielomianów Legendre'a.

4. PRZESTRZEŃ HILBERTA Z REPRODUKUJĄCYM JĄDREM CZEBYCZEWA PIERWSZEGO RODZAJU

Wielomiany Czebyszewa pierwszego rodzaju otrzymujemy z twierdzenia Rodrigueza [4] podstawiając do (31) warunki (28) i (33)

$$T_n(x)=\frac{1}{\mu_n}\frac{1}{\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-x^2\right)^n\right] \tag{52}$$

Uwzględniając fakt, iż [2]:

$$\frac{1}{\mu_n}=\frac{(-1)^n}{(2n-1)!!} \tag{53}$$

gdzie :

$$(2n-1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdot ....(2n-1) \tag{54}$$

Uwzględniając w (52) zależność (53) otrzymamy wyrażenie określające wielomiany Czebyszewa pierwszego rodzaju

$$T_n(x)=\frac{(-1)^n}{(2n-1)!!}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(1-x^2\right)^{n-\frac{1}{2}}\right] \tag{55}$$

W [4} podano warunek ortonormalizacji:

$$\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}T_n(x)T_m(x)dx=\begin{cases}0 & \text{dla } n\neq m\\ k_n=\dfrac{\Pi}{2} & \text{dla n = m}\end{cases} \tag{56}$$

Równanie rekurencyjne dla wielomianów Czebyszewa pierwszego rodzaju wynosi [1]:

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x) \tag{57}$$

Stąd

$$A_n=2 \tag{58}$$

Uwzględniając w (21) zależność (56) i (58) otrzymamy

$$K_n(t,x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{T_j(x)T_j(t)}{k_n}==\frac{1}{2}\frac{2}{\Pi}\frac{T_{n+1}(x)T_n(t)-T_{n+1}(t)T_n(x)}{x-t} \tag{59}$$

Stąd :wyrażenie:

$$T_n(t,x)=K_n(t,x)=\frac{1}{\Pi}\frac{T_{n+1}(x)T_n(t)-T_{n+1}(t)T_n(x)}{x-t} \tag{60}$$

nazywane jest **jądrem reprodukującym Czebyszewa pierwszego rodzaju.** Jądra te powinny być wykorzystywane do próbkowania sygnałów kierunku prądu lub napięcia podobnie jak Legendre'a.

Funkcja $s(x)$ w przedziale (-1, 1), zostanie rozwinięta w szereg według wielomianów Czebyszewa pierwszego rodzaju:

$$s(x)=\sum_{j=0}^{\infty} c_j T_j(x) \tag{61}$$

Współczynniki c_n tego rozwinięcia zostaną wyznaczone z warunku (56), mnożąc wyrazy szeregu (61) przez $\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}T_j(x)$ i całkując je w przedziale (-1, 1) otrzymamy:

$$\int_{-1}^{1} s(x)\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}T_n(x)dx=\int_{-1}^{1}\sum_{j=0}^{\infty} c_j\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}T_j(x)T_n(x)dx==\sum_{j=0}^{\infty} c_j\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}T_j(x)T_n(x)dx=\frac{\Pi}{2}c_j \tag{62}$$

Stąd wynika, że:

$$c_n=\frac{2}{\Pi}\int_{-1}^{1} s(x)\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}T_n(x)dx \tag{63}$$

Oznaczymy przez $s_n(x)$ sumę n+1 wyrazów szeregu (61)

$$s_n(x)=\sum_{j=0}^{n} c_j T_j(x) \tag{64}$$

Uwzględniając w (64) zależność (63) otrzymamy:

$$s_n(x)=\sum_{j=0}^{n} T_j(x)\frac{2}{\Pi}\int_{-1}^{1} s(t)\left(1-t^2\right)^{-\frac{1}{2}}T_j(t)dt=\int_{-1}^{1} s(r)\frac{2}{\Pi}\left(1-t^2\right)^{-\frac{1}{2}}\sum_{j=0}^{n} T_j(x)T_j(t)dt==\int_{-1}^{1} s(t)\left(1-t^2\right)^{-\frac{1}{2}}dt\sum_{j=0}^{n}\frac{2}{\Pi}T_j(x)T_j(t)=\int_{-1}^{1} s(t)\left(1-t^2\right)^{-\frac{1}{2}}T_n(t,x)dt \tag{65}$$

gdzie:

$$T_n(t,x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{2}{\Pi}T_j(x)T_j(t) \qquad (66)$$

jest jądrem reprodukującym Czebyszewa pierwszego rodzaju. Uwzględniając w (65) zależność (59) otrzymamy:

$$s_n(x)=\int_{-1}^{1}s(t)\left(1-t^2\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{\Pi}\frac{T_{n+1}(x)T_n(t)-T_{n+1}(t)T_n(x)}{x-t}dt \qquad (67)$$

wartość sygnału odtworzonego w odbiorniku z próbek pobranych według wielomianów Czebyszewa pierwszego rodzaju.

1.4. Przestrzeń Hilberta z reprodukującym jądrem Laguerre'a

Wielomiany Laguerre'a otrzymujemy z twierdzenia Rodrigueza [4] podstawiając do (31) warunki (29) i (34)

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{1}{\mu_n}\frac{1}{e^{-x}(x-a)^{\alpha}}\frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-x}(x-a)^{\alpha}(x-a)^n\right] \qquad (68)$$

Wielomiany Laguerre'a rozpatrywane są najczęściej w przedziale $(0,+\infty)$, stąd a = 0. oraz μ_n dana jest w postaci [5]:

$$\frac{1}{\mu_n}=\frac{1}{n!} \qquad (69)$$

Stąd:

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{1}{n!}\frac{1}{e^{-x}x^{\alpha}}\frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-x}x^{\alpha}x^n\right]=\frac{1}{n!}e^{x}x^{-\alpha}\frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-\alpha}x^{n+\alpha}\right] \qquad (70)$$

Warunek ortonormalizacji wynosi [4]:

$$\int_0^{\infty}e^{-x}x^{\alpha}L_n^{(\alpha)}(x)L_m^{(\alpha)}(x)dx=\begin{cases}0 & \text{dla } n\neq m\\ k_n=\dfrac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!} & \text{dla } n=m\end{cases} \qquad (71)$$

gdzie $\Gamma(x)$ jest funkcją gamma Eulera.

Równanie rekurencyjne dla wielomianów Laguerre'a wynosi [1]

$$(n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x)=-(x-\alpha-2n-1)L_n^{(\alpha)}(x)-(n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)} \qquad (72)$$

Przekształcamy (72) do postaci (10)

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x)=\frac{(-x+\alpha+2n+1)}{(n+1)}L_n^{(\alpha)}(x)-\frac{(n+\alpha)}{(n+1)}L_{n-1}^{(\alpha)}=$$
$$=\left[\frac{-1}{n+1}x+\frac{\alpha+2n+1}{n+!}\right]L_n^{(\alpha)}(x)-\frac{n+\alpha}{n+1}L_{n-1}^{(\alpha)} \qquad (73)$$

Stąd A_n dane jest w postaci:

$$A_n=\frac{-1}{n+1} \qquad (74)$$

Po uwzględnieniu w wyrażeniu (21) zależność (71) oraz (74) otrzymamy:

$$K_n(t,x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{L_j^{(\alpha)}(x)L_j^{(\alpha)}(t)}{k_n}=$$
$$=\frac{1}{A_n}\frac{1}{k_n}\frac{L_{n+1}^{(\alpha)}(x)L_n^{(\alpha)}(t)-L_{n+1}^{(\alpha)}(t)L_n^{(\alpha)}(x)}{x-t}=$$
$$=\frac{-n!(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}\frac{L_{n+1}^{(\alpha)}(x)L_n^{(\alpha)}(t)-L_{n+1}^{(\alpha)}(t)L_n^{(\alpha)}(x)}{x-t} \qquad (75)$$

Wyrażenie

$$LG_n^{(\alpha)}(t,x)=K_n(t,x)=$$
$$=\frac{-n!(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}\frac{L_{n+1}^{(\alpha)}(x)L_n^{(\alpha)}(t)-L_{n+1}^{(\alpha)}(t)L_n^{(\alpha)}(x)}{x-t} \quad (67) \qquad (76)$$

nazywane jest **jądrem reprodukującym Laguerre'a**.. Wykorzystywane ono może być do próbkowania sygnałów wartości prądu lub napięcia.

Funkcję $s(x)$ określoną w przedziale $(0,\infty)$ przedstawimy w postaci szeregu:

$$s(x)=\sum_{j=0}^{\infty}c_jL_j^{(\alpha)}(x) \qquad (77)$$

Współczynniki c_n tego szeregu obliczymy uwzględniając warunek (71) oraz mnożąc wyrazy szeregu przez $x^{\alpha}e^{-x}L_n^{(\alpha)}(x)$ i całkując w przedziale $(0,\infty)$, w wyniku czego otrzymamy:

$$\int_0^{\infty}s(x)x^{\alpha}e^{-x}L_n^{(\alpha)}(x)dx=\int_0^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}c_jx^{\alpha}e^{-x}L_j^{(\alpha)}(x)L_n^{(\alpha)}(x)dx=c_n\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$$

Stąd wynika, że:

$$c_n=\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\int_0^{\infty}s(x)x^{\alpha}e^{-x}L_n^{(\alpha)}(x)dx \qquad (79)$$

Oznaczymy przez $s(t)$ sumę n+1 wyrazów szeregu (77):

$$s_n(x)=\sum_{j=0}^{n}c_jL_j^{(\alpha)}(x) \qquad (80)$$

Uwzględniając w (80) zależność (79) suma uzyska postać:

$$s_n(x)=\sum_{j=0}^{n}L_j^{(\alpha)}(x)\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\int_0^{\infty}s(t)t^{\alpha}e^{-t}L_j^{(\alpha)}(t)dr=$$
$$=\int_0^{\infty}s(t)e^{-t}t^{\alpha}\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}L_j^{(\alpha)}(x)L_j^{(\alpha)}dt=\int_0^{\infty}s(t)e^{-t}t^{\alpha}LG_n^{(\alpha)}(t,x)dt \qquad (81)$$

Gdzie:

$$LG_n^{(\alpha)}(t,x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}L_j^{(\alpha)}(x)L_j^{(\alpha)}(t) \qquad (82)$$

Uwzględniając w (81) zależność (76) otrzymamy:

$$s_n(x)=\int_0^{\infty}s(t)e^{-t}t^{\alpha}$$
$$\frac{-n!(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}\frac{L_{n+1}^{(\alpha)}(x)L_n^{(\alpha)}(t)-L_{n+1}^{(\alpha)}(t)L_n^{(\alpha)}(x)}{x-t}dt \qquad (83)$$

wartość sygnału odtworzonego w odbiorniku z próbek pobranych według wielomianów Laguerre'a.

6. PRZESTRZEŃ HILBERTA Z REPRODUKUJĄCYM JĄDREM HERMITE'A

Bardzo ważną klasą klasycznych wielomianów ortogonalnych ze względu na dziedzinę $x \in (-\infty, +\infty)$, są wielomiany Hermite'a. Uzyskujemy je z twierdzenia Rodrigueza [4] (31) przez zastosowanie w nim warunku (30) i (35) w postaci:

$$H_n(x) = \frac{1}{\mu_n}\frac{1}{w(x)}\frac{d^n}{dx^n}\left[w(x)H^n(x)\right] = \frac{1}{\mu_n}\frac{1}{e^{-x^2}}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right) \tag{84}$$

Wartość μ_n dana jest w postaci [4]:

$$\frac{1}{\mu_n} = (-1)^n \tag{85}$$

Wyrażenie (84) z uwzględnieniem (85) zapiszemy w postaci:

$$H_n(x) = (-1)^n \frac{1}{e^{-x^2}}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right) \tag{86}$$

Zależność (86) określa wielomiany Hermite'a.

Warunek ortonormalizacji wynosi [5]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \neq m \\ k_n = 2^n n! \sqrt{\Pi} & \text{dla } n = m \end{cases} \tag{87}$$

Równanie rekurencyjne dla wielomianów Hermite'a wynosi [1]:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \tag{88}$$

Stąd A_n wynosi:

$$A_n = 2 \tag{89}$$

Po uwzględnieniu w (21) zależności (87) oraz (89) otrzymamy:

$$\begin{aligned} K_n(t,x) &= \sum_{j=0}^{n} \frac{H_j(x)H_j(t)}{k_n} = \\ &= \frac{1}{A_n}\frac{1}{k_n}\frac{H_{n+1}(x)H_n(t) - H_{n+1}(t)H_n(x)}{x-t} = \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2^n n!\sqrt{\Pi}}\frac{H_{n+1}(x)H_n(t) - H_{n+1}(t)H_n(x)}{x-t} \end{aligned} \tag{90}$$

Stąd wyrażenie:

$$H_n(t,x) = K(t,x)_n = \frac{1}{2^{n+1} n!\sqrt{\Pi}}\frac{H_{n+1}(x)H_n(t) - H_{n+1}(t)H_n(x)}{x-t} \tag{91}$$

nazwane jest **jądrem reprodukującym Hermite'a.**

Rozwinięcie funkcji $s(x)$ określonej w przedziale $(-\infty, \infty)$ w szereg według wielomianów Hermite'a dane jest w postaci:

$$s(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j H_j(x) \tag{92}$$

Współczynniki c_c obliczymy korzystając z warunku (87) oraz mnożąc wyrazy szeregu (92) przez $e^{-x^2} H_n(x)$ i całkując w przedziale $(-\infty, \infty)$, otrzymamy:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(x) e^{-x^2} H_n(x) dx = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_j(x) dx = 2^n n! \sqrt{\Pi} c_n \tag{93}$$

Stąd wynika, że:

$$c_n = \frac{1}{2^n n!\sqrt{\Pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(x) H_n(x) dx \tag{94}$$

Sumę n+1 pierwszych składników szeregu (94) przybiera postać:

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \sum_{j=0}^{n} c_j H_j(x) = \sum_{j=0}^{n} H_j(x) \frac{1}{2^n n!\sqrt{\Pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-t^2} H_j(t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-t^2} \sum_{j=0}^{n} \frac{H_j(x)H_j(t)}{2^n n!\sqrt{\Pi}} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-t^2} H_n(t,x) dt \end{aligned} \tag{95}$$

gdzie:

$$H_n(t,x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{H_j(x)H_j(t)}{2^n n!\sqrt{\Pi}} \tag{96}$$

jest jądrem reprodukującym Hermite'a. Uwzględniając w (95) zależność (91) otrzymamy:

$$s_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-t^e} \frac{1}{2^{n+1} n!\sqrt{\Pi}} \frac{H_{n+1}(x)H_n(t) - H_{n+1}(t)H_n(x)}{x-t} dt \tag{97}$$

wartość sygnału odtworzonego w odbiorniku z próbek pobranych według wielomianów Hermite'a.

7. PODSUMOWANIE

Jądra reprodukujące w bazach wielomianowych są rozpatrywane w [3]. Podana jest tam analityczna postać końcowa jądra Legrndre'a lecz bez sposobu jego wyprowadzenia.

Autor podał sposób wyprowadzania jąder reprodukujących w bazach opartych o klasyczne wielomiany ortogonalne oraz wyprowadził jądra reprodukujące dla wielomianów Legendre'a, Czebyszewa pierwszego rodzaju, Laguere'a, Hermite'a. W przypadku wielomianów Legendre'a autor uzyskał taki sam rezultat jaki był podany w [3]. Dla pozostałych przypadków wielomianów ortogonalnych zależności analityczne określające jądra reprodukujące wyprowadzone w pracy autor nie znalazł w literaturze przedmiotu.

Bibliografia

[1] G. E. Andrews, R. Askey, R. Roy, *Special Function*, Cambrige University Press, 2001.
[2] H. Bateman, A. Erdelyi, *Higher Transcendental Functions*, Volume II, wydanie rosyjskie Moskwa 1974.
[3] J. R. Higgins, *Sampling Theory in Fourier and Signal Analysis – Foundations*. Clarendon Press, Oxford 1996.

[4] A. Kufner, J. Kadlec, *Fourier Series*, Academia Prague 1971.
[5] N. N. Lebiediew, *Funkcje specjalne i ich zastosowania*, PWN, Warszawa 1957.
[6] G. G. Walter, Wavelets and Other Orthogonal Systems With Applications. CRC Press, London 1994.
[7] P Brémaud, *Mathematical Principles of Signal Processing – Fourier and Wavelet* Analysis. Springer, New York 2001.
[8] J. W Brown, R. V Churchill, *Fourier Series and Boundary Value Problems,* McGraw-Hill Higher Education, New York 2001
[9] R. E Edwards, *Fourier Series A Modern Introduction, Volume I,* Springrt-Verlag, Berlin 1979.
[10] C Gasquet, P Witomski, *Fourier Analysis and Applications: Filtering, Numerical Computation, Wavelets,* Springer, New York 1998.
[11] J. R Higgins, R. L Stens*, Sampling Theory in Fourier and Signal Analysis – Advanced Topics,* Oxford University Press 1999.
[12] T. W Körner, *Fourier Analysis,* Cambrige University Press 1991.
[13] S. G Krantz, *A Panorama of Harmonic Analysis,* Published by The Mathematical Association of America 1999.
[14] E. H Lieb, M Loss*, Analysis, Graduate Studies in Mathematics,* American Mathenatical Society, 1998.
[15] R Paley, N Wiener, *Fourier transforma in the complex domain,* American MathemaSociety , 1934.
[16] W Mlak, *Wstęp do teorii przestrzeni Hilberta,* PWN Warszawa 1970.
[17] L Shwartz, *Sous espaces hilbertiens d'espaces vectoriels topoloqiues et noyaux associes,* Journal d'Analyse Mathematique, pp. 115-256, 1964.
[18] E. M Stein, *Singular Integrals and Differentability Properties of Functions,* Princeton University Press, Pronceton 1970.
[19] G Tołstow, *Szeregi Fouriera,* PWN Warszawa 1954.
[20] R. G. Vaughan, N. L Scott, D. R White, *The theory of Bandpass Sampling,* IEEE Trans. On Signal Processing, Vol 39, No 9, september 91.
[21] N Wiener, The *Fourier integral and certaon of its applications,* wydanie rosyjskie, Moskwa 1963.
[22] A Zygmund, *Trigonomertic Series, Volume I,* Cambrige at the University Press, 1959, wydanie rosyjskie Moskwa 1965.