

PRÓBKOWANIE SYGNAŁÓW DIAGNOSTYCZNYCH CZĘŚĆ II PRÓBKOWANIE W PRZESTRZENI HILBERTA Z BAZAMI HARMONICZNYMI ZA POMOCĄ NIEKLASYCZNYCH JĄDER

Zenon SYROKA

Uniwersytet Warmiński – Mazurski, Wydział Nauk Technicznych
Ul. Oczapowskiego 11, 10 –717 Olsztyn, e-mail: syrokaz@onet.eu

Streszczenie

W pracy dokonano analizy próbkowania sygnałów diagnostycznych przy wykorzystaniu jądra Dirichleta, Fejere'a, de la Vallee Poussina. i Poissona. Pokazano pełne matematyczne wyprowadzenie tych jąder; pierwsze trzy jądra są ze sobą powiązane. Podano zależności między nimi oraz ich przebiegi graficzne.

Słowa kluczowe: próbkowanie sygnałów, przestrzeń Hilberta, bazy harmoniczne, nieklasyczne jądra reprodukujące.

SAMPLING THE DIAGNOSTIC SIGNALS PART II SAMPLING IN THE HILBERT SPACE WITH HARMONIC BASIS USING NON CLASICAL KERNEL

Summary

In this article the analysis of the sampling diagnostic signals using Dirichlet's, Fejer's, Poisson's and de la Vallee Poussin's kernels was made. The full derivation of those kernels have given; first three off them one connected. Dependences between them and their graphical representation have also given in this article.

Keywords: sampling signals, Hilbert space, harmonic basis, reproducing kernel.

1. WPROWADZENIE

Historycznie rzecz biorąc w praktyce stosowano nośne harmoniczne, z tego też powodu interesujące są w teorii próbkowania sygnałów diagnostycznych osiągnięcia z dziedziny analizy harmonicznej. W pracy przeanalizowano sposób próbkowania sygnałów diagnostycznych z wykorzystaniem baz funkcji harmonicznych.

Praca jest niezależną częścią, jednocześnie stanowi kontynuację pracy „Próbkowanie sygnałów diagnostycznych. Część I. Próbkowanie w przestrzeni Hilberta z reprodukującym jądrem Shanona”.

2. PRZESTRZEŃ HILBERTA Z REPRODUKUJĄCYM JĄDREM DIRICHLETA

Najczęściej wykorzystywaną bazą ortonormalną zupełną jest zbiór funkcji harmonicznych rzeczywistych lub zespolonych. Uwarunkowane jest to praktyką inżynierską. Urządzenia konstruowane do tej pory wykorzystywały w procesie formowania diagnostycznych sygnałów nadawczych i analizy diagnostycznych sygnałów odbiorczych sygnały harmoniczne. Sygnały takie są aktualnie łatwe do

wygenerowania. Systemy wykorzystujące nośne nieharmoniczne istnieją, ale są rzadkością. Typowym przykładem impulsowych nośnych jest specjalistyczna diagnostyka dla celów militarnych. Częstotliwościowa analiza sygnałów diagnostycznych polega na rozkładzie sygnału na składowe harmoniczne. Z tych powodów ważnym staje się w pierwszej kolejności analizować jądra związane z wielomianami trygonometrycznymi.

Zbiór funkcji ortonormalny zupełny w H (funkcje harmoniczne zespolone) można zapisać w postaci:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(jit) \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N \right\} \quad (1)$$

Jądro związane z tą bazą zgodnie z [2] wynosi:

$$k(x, y) = \sum_{x \in X} \varphi_n(x) \overline{\varphi_n(y)} \quad (2)$$

W związku z tym uwzględniając w (2) zależność (1) mamy:

$$\begin{aligned} k(t, \lambda) &= \sum_{i=-n}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(ijt) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-ij\lambda) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{i=-n}^n \exp[ij(t - \lambda)] = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=-n}^n \exp(ijs) \end{aligned} \quad (3)$$

Jest to suma częściowa szeregu geometrycznego, dla którego

$$q = \exp(is) \quad (4)$$

Do obliczenia sumy (3) wykorzystuję wzór na sumę $2n+1$ wyrazów szeregu geometrycznego:

$$S_n(s) = a_{-n} \frac{1 - q^{2n+1}}{1 - q} \quad (5)$$

Podstawiając do (5) wartość a_{-n} oraz q otrzymamy:

$$\begin{aligned} S_n(s) &= e^{-jns} \frac{1 - e^{j(2n+1)s}}{1 - e^{js}} = \frac{e^{-jns} \left(1 - e^{j\left(n+\frac{1}{2}\right)s} e^{j\left(n+\frac{1}{2}\right)s} \right)}{1 - e^{\frac{j}{2}s} e^{\frac{j}{2}s}} = \\ &= \frac{e^{-jns} \left(e^{-j\left(n+\frac{1}{2}\right)s} e^{j\left(n+\frac{1}{2}\right)s} - e^{j\left(n+\frac{1}{2}\right)s} e^{-j\left(n+\frac{1}{2}\right)s} \right)}{e^{-\frac{j}{2}s} e^{\frac{j}{2}s} - e^{\frac{j}{2}s} e^{-\frac{j}{2}s}} = \\ &= \frac{e^{-jns} e^{jns} e^{\frac{j}{2}s} \left(e^{-j\left(n+\frac{1}{2}\right)s} - e^{j\left(n+\frac{1}{2}\right)s} \right)}{e^{\frac{j}{2}s} \left(e^{-\frac{j}{2}s} - e^{\frac{j}{2}s} \right)} = \frac{\left(e^{-j\left(n+\frac{1}{2}\right)s} - e^{j\left(n+\frac{1}{2}\right)s} \right)}{\left(e^{-\frac{j}{2}s} - e^{\frac{j}{2}s} \right)} \quad (6) \end{aligned}$$

Mnożąc licznik i mianownik przez $\frac{-1}{2i}$, w celu zastosowania wzoru Eulera:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

zależność (6) będzie można zapisać

$$\begin{aligned} \frac{\left(e^{-j\left(n+\frac{1}{2}\right)s} - e^{j\left(n+\frac{1}{2}\right)s} \right)}{\left(e^{-\frac{j}{2}s} - e^{\frac{j}{2}s} \right)} &= \frac{\left(\frac{e^{-j\left(n+\frac{1}{2}\right)s} - e^{j\left(n+\frac{1}{2}\right)s}}{-2j} \right)}{\left(\frac{e^{-\frac{j}{2}s} - e^{\frac{j}{2}s}}{-2j} \right)} = \frac{\left(e^{j\left(n+\frac{1}{2}\right)s} - e^{-j\left(n+\frac{1}{2}\right)s} \right) \frac{1}{2j}}{\left(e^{\frac{j}{2}s} - e^{-\frac{j}{2}s} \right) \frac{1}{2j}} = \\ &= \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)s}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)s} \quad (7) \end{aligned}$$

Uwzględniając powyższy rezultat w (3) otrzymano wzór określający **jądro Dirichleta**:

$$k(t, \lambda) = D_n(s) = \frac{1}{2\Pi} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)s}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)s} \quad (8)$$

Zależność (8) została przedstawiona w funkcji s [3] na rys. 1.

Drugim ważnym układem [1], [5], [6] do rozważenia jest podstawowy układ trygonometryczny

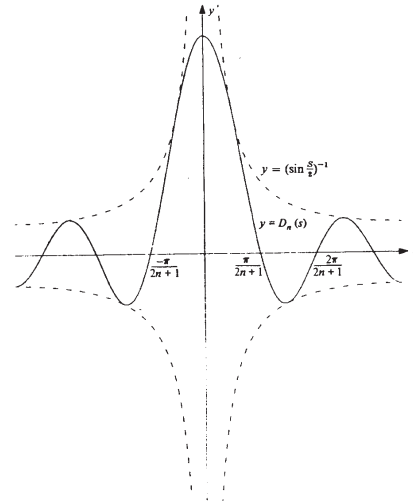
$$\{1, \cos(jt), \sin(jt) \quad j = 1..n\} \quad (9)$$

dla powyższego układu mamy:

$$\|1\| = \sqrt{\int_{-\Pi}^{\Pi} 1 dt} = \sqrt{2\Pi} \quad (10)$$

$$\|\cos jt\| = \sqrt{\int_{-\Pi}^{\Pi} \cos^2 jt} = \sqrt{\Pi} \quad (11)$$

$$\|\sin jt\| = \sqrt{\int_{-\Pi}^{\Pi} \sin^2 jt} = \sqrt{\Pi} \quad (12)$$



Rys. 1. Jądro Dirichleta jako funkcja parametru s

W związku z tym układ trygonometryczny:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\Pi}}, \frac{1}{\sqrt{\Pi}} \cos jt, \frac{1}{\sqrt{\Pi}} \sin jt \quad j = 1..n \right\} \quad (13)$$

jest zbiorem ortonormalnym zupełnym w przestrzeni H . Każdy sygnał diagnostyczny $s(t)$ należący do przestrzeni H o takiej bazie można aproksymować szeregiem Fouriera:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^n (a_j \cos jx + b_j \sin jx) \quad (14)$$

gdzie

$$a_j = \int_{-\Pi}^{\Pi} s(x) \cos jx dx \quad (15)$$

$$b_j = \int_{-\Pi}^{\Pi} s(x) \sin jx dx \quad (16)$$

są współczynnikami Fouriera.

Uwzględniając w (14) zależności (15) i (16) otrzymamy:

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{2\Pi} \int_{-\Pi}^{\Pi} s(t) dt + \sum_{j=1}^n \left(\int_{-\Pi}^{\Pi} s(t) \cos(jt) dt \cos(jx) + \right. \\ &\quad \left. \int_{-\Pi}^{\Pi} s(t) \sin(jt) dt \sin(jx) \right) = \\ &= \frac{1}{\Pi} \int_{-\Pi}^{\Pi} s(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^n (\cos(jt) \cos(jx) + \sin(jt) \sin(jx)) \right) dt = \\ &= \frac{1}{\Pi} \int_{-\Pi}^{\Pi} s(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^n \cos j(t-x) \right) dt \quad (17) \end{aligned}$$

W celu rozwiązania powyższej całki rozwiązane zostanie pomocnicze równanie w postaci:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n e^{ijs} &= \sum_{j=1}^n (\cos js + i \sin js) = e^{is} \frac{1 - e^{ins}}{1 - e^{is}} = \\ &= e^{is} \frac{1 - e^{ins}}{e^{-\frac{i}{2}s} e^{\frac{i}{2}s} - e^{\frac{i}{2}s} e^{-\frac{i}{2}s}} = \\ &= \frac{e^{is}}{e^{\frac{i}{2}s} e^{\frac{i}{2}s} - e^{-\frac{i}{2}s}} \frac{1 - e^{ins}}{e^{\frac{i}{2}s} - e^{-\frac{i}{2}s}} = \frac{e^{\frac{i}{2}s} - e^{j\left(n+\frac{1}{2}\right)s}}{-e^{\frac{i}{2}s} + e^{-\frac{i}{2}s}} \quad (18) \end{aligned}$$

Następnie wyrażenia w liczniku i mianowniku zostaną zapisane przy pomocy funkcji sin i cos.

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{2}s} - e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)s} &= \cos\left(\frac{1}{2}s\right) + i \sin\left(\frac{1}{2}s\right) - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)s - i \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)s = \\ &= \cos\left(\frac{1}{2}s\right) - \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)s + i \left[\sin\left(\frac{1}{2}s\right) - \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)s \right] \quad (19) \\ -e^{-\frac{i}{2}s} + e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)s} &= -\cos\left(\frac{1}{2}s\right) - i \sin\left(\frac{1}{2}s\right) + \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)s + i \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)s = \\ &= -\cos\left(\frac{1}{2}s\right) - i \sin\left(\frac{1}{2}s\right) + \cos\left(\frac{1}{2}s\right) - i \sin\left(\frac{1}{2}s\right) = -2i \sin\left(\frac{1}{2}s\right) \quad (20) \end{aligned}$$

Uwzględniając (19) i (20) w (18) otrzymamy:

$$\begin{aligned} \frac{\cos\left(\frac{1}{2}s\right) - \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)s + i \left[\sin\left(\frac{1}{2}s\right) - \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)s \right]}{-2i \sin\left(\frac{1}{2}s\right)} + \frac{i \left[\sin\left(\frac{1}{2}s\right) - \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)s \right]}{-2i \sin\left(\frac{1}{2}s\right)} = \\ = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)s - \sin\left(\frac{1}{2}s\right)}{2 \sin\left(\frac{1}{2}s\right)} + i \frac{\cos\left(\frac{1}{2}s\right) - \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)s}{2 \sin\left(\frac{1}{2}s\right)} \quad (21) \end{aligned}$$

Z zależności (21) wynika :

$$\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^n \cos js = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)s - \sin\left(\frac{1}{2}s\right)}{2 \sin\left(\frac{1}{2}s\right)} \quad (22)$$

$$\sum_{j=1}^n \sin js = \frac{\cos\left(\frac{1}{2}s\right) - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)s}{2 \sin\left(\frac{1}{2}s\right)} \quad (23)$$

Uwzględniając (22) w (17) otrzymamy:

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{\Pi} \int_{-\Pi}^{\Pi} s(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^n \cos j(t-x) \right) dt = \\ &= \frac{1}{\Pi} \int_{-\Pi}^{\Pi} s(t) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)s}{2 \sin\left(\frac{1}{2}s\right)} = \int_{-\Pi}^{\Pi} s(t) D_n(s) dt \quad (24) \end{aligned}$$

Powyższe wyrażenie jest nazywane wzorem całkowym dla sumy częściowej szeregu Fouriera. W tym momencie możemy wyznaczyć jądro Dirichleta dla bazy danej (13).

$$\begin{aligned} D_n(s) &= \frac{1}{2\Pi} + \sum_{j=1}^n \frac{\cos jx \cos jt + \sin jx \cos jt}{\Pi} = \quad (25) \\ &= \frac{1}{2\Pi} + \frac{1}{\Pi} \sum_{j=1}^n \cos j(t-x) \end{aligned}$$

Wykorzystując w (25) tożsamość (22) otrzymamy

$$D_n(s) = \frac{1}{2\Pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)s}{\sin\left(\frac{1}{2}s\right)} \quad (26)$$

Jest to zależność określająca jądro Dirichleta dla ortonormalnej bazy danej zależnością (13).

Na podstawie zależności (23) otrzymamy:

$$\overline{D}_n(s) = \frac{1}{2\Pi} \frac{\cos\left(\frac{1}{2}s\right) - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)s}{2 \sin\left(\frac{1}{2}s\right)} \quad (27)$$

wyrażenie nazywane **jądrem sprzężonym Dirichleta**.

Zostanie teraz wyznaczona wartość wyrażenia (24) w przypadku gdy n dąży do nieskończoności, obliczamy granicę:

$$s_{\infty}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) \quad (28)$$

Biorąc pod uwagę zależność (26) otrzymamy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\Pi}^{\Pi} s(t) D_n(s) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\Pi} \int_{-\Pi}^{\Pi} s(t) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)s}{\sin\left(\frac{1}{2}s\right)} dt \quad (29)$$

Jądro Dirichleta zostanie zapisane w następującej postaci:

$$\begin{aligned} D_n(s) &= \frac{1}{2\Pi} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)s}{\sin\left(\frac{1}{2}s\right)} = \frac{1}{\Pi} \left[\frac{\sin(ns) \cos\left(\frac{1}{2}s\right) + \cos(ns) \sin\left(\frac{1}{2}s\right)}{2 \sin\left(\frac{1}{2}s\right)} \right] = \\ &= \frac{1}{\Pi} \left[\frac{\sin(ns)}{2 \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}s\right)} + \frac{1}{2} \cos(ns) \right] \quad (30) \end{aligned}$$

Wprowadzamy funkcję pomocniczą:

$$g(s) = \frac{1}{2 \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}s\right)} - \frac{1}{s} \quad (31)$$

Funkcja ta spełnia warunek:

$$\lim_{s \rightarrow 0} g(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{2 \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}s\right)} - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \quad (32)$$

Wykorzystując regułę de L'Hospitala, zależność (32) ma postać:

$$\lim_{s \rightarrow 0} g(s) = 0 \quad (33)$$

Jądro Dirichleta zapisane przy wykorzystaniu funkcji $g(s)$ wynosi:

$$D_n(s) = \frac{1}{\Pi} \left[\frac{\sin(ns)}{2\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}s}\right)} + \frac{1}{2}\cos(ns) \right] = \frac{1}{\Pi} \left[\sin(ns) \left(g(s) + \frac{1}{s} \right) + \frac{1}{2}\cos(ns) \right] =$$

$$= \frac{\sin(ns)}{s} + g(s)\sin(ns) + \frac{1}{2}\cos(ns) \quad (34)$$

Podstawiając do (35) zależność (34) otrzymamy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\Pi} \int_{-\Pi}^{\Pi} s(t) \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}s\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}s\right)} dt = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\Pi} \int_{-\Pi}^{\Pi} s(t) \frac{\sin(ns)}{s} dt + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\Pi} \int_{-\Pi}^{\Pi} s(t) g(s) \sin(ns) dt +$$

$$+ \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{\Pi} \int_{-\Pi}^{\Pi} s(t) \frac{1}{2} \cos(ns) dt \quad (35)$$

Do obliczenia granicy wykorzystujemy następujące twierdzenie [5]:

Twierdzenie 1

Jeżeli $s(t)$ jest sumą ciągu funkcji, a $g(t)$ jest funkcją ograniczoną i obie mają okres 2Π to całki

$$\int_{-\Pi}^{\Pi} s(t) g(t) \cos(nt) dt$$

$$\int_{-\Pi}^{\Pi} s(t) g(t) \sin(nt) dt \quad (36)$$

dążą do zera gdy n dąży do nieskończoności.

W związku z tym otrzymamy:

$$s_{\infty}(x) = \frac{1}{2} \int_{-\Pi}^{\Pi} s(t) \frac{\sin(ns)}{s} dt = \int_{-\Pi}^{\Pi} s(t) \bar{D}_{\infty}(s) dt \quad (37)$$

Zależność

$$\bar{D}_{\infty}(s) = \frac{\sin(ns)}{s} \quad (38)$$

nazywana jest **jądrem Dirichleta zdegenerowanym, uproszczonym lub granicznym**, [4], [5].

3. PRZESTRZEŃ HILBERTA Z REPRODUKUJĄCYM JĄDREM FEJERA

Zostanie rozważony układ trygonometryczny:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\Pi}}, \frac{1}{\sqrt{\Pi}} \cos jt, \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \sin jt \quad j = 1..n \right\} \quad (39)$$

Jest to zbiór ortonormalnym zupełnym w przestrzeni H . Każdy sygnał $s(t)$ należący do przestrzeni H o takiej bazie można aproksymować szeregiem Fouriera:

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^n (a_j \cos jx + b_j \sin jx) \quad (40)$$

Jeżeli z góry wiadomo, że szereg (40) jest zbieżny do funkcji $s(x)$, to $s(x)$ otrzymamy jako granicę sum częściowych tego szeregu.

Inaczej wygląda sprawa w przypadku gdy nie da się stwierdzić zbieżności szeregu lub gdy szereg jest rozbieżny. W takim przypadku albo nie wiemy czy istnieje granica sum częściowych, albo wiemy, że suma nie istnieje.

Trzeba więc znaleźć operację za pomocą, której można będzie znaleźć funkcję znając jej szereg Fouriera niezależnie od tego, czy jest on zbieżny czy nie.

Zostanie rozpatrzony szereg:

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n \dots \quad (41)$$

Niech:

$$S_n = u_0 + \dots + u_n \quad (42)$$

$$\sigma_n = \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_n}{n+1} \quad (43)$$

Jeżeli istnieje [6]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma \quad (44)$$

to szereg (41) jest sumowalny sposobem średnich arytmetycznych do wartości σ .

W celu wyprowadzenia jądra Fejera wykorzystano twierdzenia 2, udowodnione w [6] oraz [5].

Twierdzenie 2 [6]

Jeżeli szereg $u_0 + u_1 + \dots + u_n \dots$ jest zbieżny i jego suma jest równa σ , to szereg ten jest sumowalny sposobem średnich arytmetycznych do tej samej sumy o wartości σ .

W związku z powyższym zależność (43) wynosi:

$$\sigma_n(s) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n s_k(s) \quad (45)$$

Biorąc pod uwagę zależność (24) wyrażenie (45) przybierze postać:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \int_{-\Pi}^{\Pi} s(t) \sum_{k=0}^n D_k(t-x) dt = \int_{-\Pi}^{\Pi} s(t) K_n(t-x) dt \quad (46)$$

gdzie wyrażenie:

$$K_n(s) = \frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^n D_k(s) \quad (47)$$

nazywane jest **jądrem Fejera**.

Jądro Fejera dla sygnałów diagnostycznych określonych przez układ (39) obliczono uwzględniając w (47) zależność określającą jądro Dirichleta (8):

$$K_n(s) = \frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2\Pi} \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)s}{\sin\left(\frac{1}{2}s\right)} =$$

$$\frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2\Pi} \frac{2 \sin\left(\frac{1}{2}s\right) \sin\left(k + \frac{1}{2}\right)s}{2 \sin\left(\frac{1}{2}s\right) \sin\left(\frac{1}{2}s\right)} \quad (48)$$

W liczniku wykorzystano tożsamość:

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \quad (49)$$

i zależność (48) przybierze postaci:

$$K_n(s) = \frac{1}{1+n} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2\Pi} \frac{\cos ks - \cos(k+1)s}{2 \sin\left(\frac{1}{2}s\right) \sin\left(\frac{1}{2}s\right)} \quad (50)$$

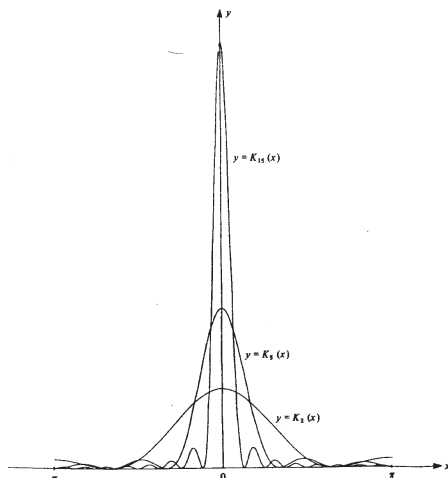
Suma cosinusów posiada postać:

$$1 - \cos s + \cos s - \cos 2s + \cos 2s - \cos 3s + \dots - \cos ns + \cos ns - \cos(n+1)s = 1 - \cos(n+1)s \quad (51)$$

Uwzględniając (51) w (50) otrzymamy:

$$K_n(s) = \frac{1}{n+1} \frac{1}{2\pi} \frac{1 - \cos(n+1)s}{\left[\sin\left(\frac{1}{2}s\right)\right]^2} = \frac{1}{n+1} \frac{1}{2\pi} \frac{2 \left[\sin\left(\frac{n+1}{2}s\right)\right]^2}{\left[\sin\left(\frac{1}{2}s\right)\right]^2} = \frac{1}{n+1} \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}s\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}s\right)} \right]^2 \quad (52)$$

Powyższa zależność określa **jądro Fejera**. Przykładowy przebieg jądra Fejera pokazano na rys. 2 [3].



Rys. 2. Jądro Fejera dla trzech wartości n = 3, 5, 15

Uwzględniając (52) w (46) suma szeregu ma postać:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1+n} \int_{-\pi}^{\pi} s(t) \left[\frac{\sin(n+1)\frac{s}{2}}{\sin\left(\frac{1}{2}s\right)} \right]^2 dt \quad (53)$$

Powyższa zależność będzie wykorzystywana do analizy jądra de la Vallee Poussina.

4. PRZESTRZEŃ HILBERTA Z REPRODUKUJĄCYM JĄDREM POISSONA

Podstawą do analizy jąder Poissona jest twierdzenie dotyczące sumowania szeregów Fouriera metodą Abela [5]:

Twierdzenie 3

Szereg $\sum_{j=0}^{\infty} u_j$ jest sumowalny metodą Abela,

jeżeli szereg $\sum_{j=0}^{\infty} r^j u_j$ dla $0 \leq r < 1$ jest zbieżny

i istnieje granica:

$$\lim_{r \rightarrow 1} \sum_{j=0}^{\infty} r^j u_j = s_n \quad (54)$$

równa sumie ciągu.

Rozpatrzmy przestrzeń Hilberta z bazą określona zależnością (1). Zostanie obliczona suma szeregu

$$P_r \left(\frac{1}{2\pi} e^{it} \right) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} r^{|j|} e^{ijt} \quad (55)$$

Powyższa suma zostanie rozpisana przy pomocy dwóch składników, w związku z tym, iż wartość dla zera liczona jest podwójnie jest ona jeden raz odjęta.

$$P_r \left(\frac{1}{2\pi} e^{it} \right) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} r^{|j|} e^{ijt} = \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{j=0}^{+\infty} (re^{it})^j + \sum_{j=0}^{+\infty} (re^{-it})^j - 1 \right] = \quad (56)$$

Wykorzystując zależności dotyczące sumy szeregu geometrycznego o nieskończeniu wielu wyrazach

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a_1}{1-q} \quad (57)$$

Zależność (56) przybierze postać (pominięto czynnik $\frac{1}{2\pi}$):

$$\left[\frac{1}{1-re^{it}} + \frac{1}{1-re^{-it}} - 1 \right] = \frac{1-re^{-it} + 1-re^{it}}{(1-re^{it})(1-re^{-it})} - 1 = \frac{2-r(e^{it} + e^{-it})}{1-re^{-it} - re^{it} + r^2 e^{it} e^{-it}} - 1 =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2-2r \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)}{1-r(e^{it} + e^{-it}) + r^2} - 1 = \frac{2-2r \cos t}{1-2r \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right) + r^2} - 1 = \frac{2-2r \cos t}{1-2r \cos t + r^2} - 1 = \\ &= \frac{2-2r \cos t}{1-2r \cos t + r^2} - \frac{1-2r \cos t + r^2}{1-2r \cos t + r^2} = \frac{1-r^2}{1-2r \cos t + r^2} \quad (58) \end{aligned}$$

Zależność końcowa (58) nazywana jest **jądrem Poissona**. Suma szeregu (55) wyniesie:

$$P(r, t) = P_r \left(\frac{1}{2\pi} e^{it} \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos t + r^2} \quad (59)$$

Na rys. 3 pokazano porównanie przebiegu trzech jąder, Dirichleta, Fejera, Poissona [4] (nie uwzględniono czynnika $1/\pi$).

Dla przestrzeni z bazą daną zależnością (13) suma szeregu na postać:

$$P_r \left(\frac{1}{\pi} e^{it} \right) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{+\infty} r^j e^{ijt} \right] \quad (60)$$

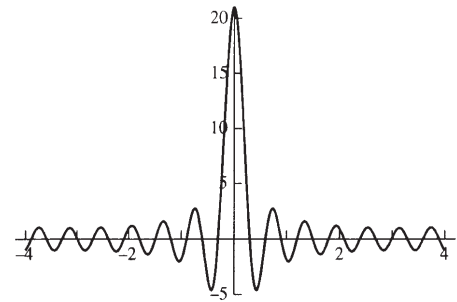
Czynnik $\frac{1}{\Pi}$ zostanie pominięty, uwzględniony zostanie dopiero w ostatecznym wyniku. Do obliczenia sumy wykorzystano zależność (57):

$$\begin{aligned}
 P_r(e^{it}) &= \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{+\infty} r^j e^{ijt} = \frac{1}{2} + \frac{re^{it}}{1-re^{it}} = \frac{1+re^{it}}{2(1+re^{it})} = \\
 &= \frac{1+re^{it}}{2(1+re^{it})} \frac{1-re^{-it}}{1-re^{-it}} = \\
 &= \frac{1-re^{-it}+re^{it}-r^2e^{it}e^{-it}}{2(1-re^{-it}-re^{it}+r^2e^{-it}e^{it})} = \\
 &= \frac{1+r(e^{it}-e^{-it})-r^2}{2[1-r(e^{it}+e^{-it})+r^2]} = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1-r^2}{1-2r\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)+r^2} + \frac{1}{2} \frac{r(e^{it}+e^{-it})}{1-2r\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)+r^2} = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1-r^2}{1-2\cos t+r^2} + \frac{ri \frac{e^{it}+e^{-it}}{2i}}{1-2\cos t+r^2} = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1-r^2}{1-2\cos t+r^2} + i \frac{r \sin t}{1-2\cos t+r^2}
 \end{aligned} \tag{61}$$

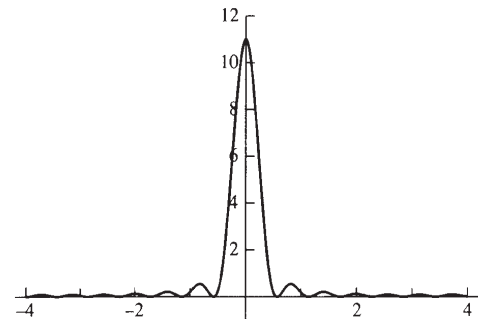
W związku powyższym suma szeregu (60) wyniesie:

$$\begin{aligned}
 P_r\left(\frac{1}{\Pi} e^{it}\right) &= \frac{1}{\Pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{+\infty} r^j e^{ijt} \right] = \\
 &= \frac{1}{2\Pi} \frac{1-r}{1-2\cos t+r^2} + i \frac{1}{\Pi} \frac{r \sin t}{1-2\cos t+r^2} = \\
 &= P(r,t) + iQ(r,t)
 \end{aligned} \tag{62}$$

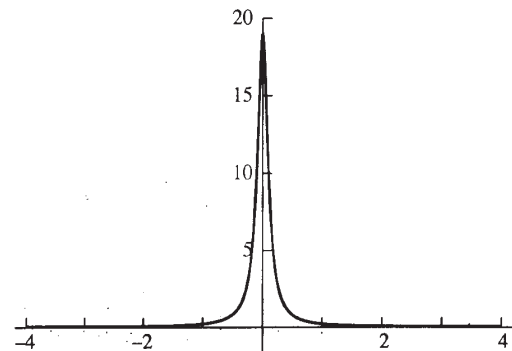
Wartość $P(r,t)$ nazywamy **jądrem Poissona** a wartość $Q(r,t)$ **sprzężonym jądrem Poissona**.



Jądro Dirichleta n = 10



Jądro Fejera n=10



Jądro Poissona r = 9

Rys. 3. Porównanie jąder Dirichleta, Fejera i Poissona

5. PRZESTRZEŃ HILBERTA Z REPRODUKUJĄCYM JĄDREM DE LA VALLEE POUSSINA

Rozpatrzmy szereg:

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n \tag{63}$$

i oznaczmy odpowiednio sumy

$$s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n \text{ (jądro Dirichleta)} \tag{64}$$

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n+1} \text{ (jądro Fejera)} \tag{65}$$

$$v_n = \frac{s_n + s_{n+1} + \dots + s_{2n-1}}{n} \text{ (jądro de la Vallee Poussina)} \tag{66}$$

Suma v_n zostanie obliczona uwzględniając w (66) zależność (24):

$$v_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=n}^{2n-1} \int_{-\pi}^{\pi} s(t) D_j(s) dt = \int_{-\pi}^{\pi} s(t) dt \frac{1}{n} \sum_{j=n}^{2n-1} D_j(s) = \int_{-\pi}^{\pi} s(t) V_n(s) dt \quad (67)$$

Gdzie wielkość

$$V_n(s) = \frac{1}{n} \sum_{j=n}^{2n-1} D_j(s) \quad (68)$$

nazywana jest **jądrem de la Vallee Poussina**.

Jądro de la Vallee Poussina obliczono wykorzystując zależność (26) określającą jądro Dirichleta:

$$V_n(s) = \frac{1}{n} \sum_{j=n}^{2n-1} D_j(s) = \frac{1}{n} \frac{1}{2\pi} \sum_{j=n}^{2n-1} \frac{\sin\left(j + \frac{1}{2}\right)s}{\sin\left(\frac{1}{2}s\right)} = \quad (69)$$

$$= \frac{1}{n} \frac{1}{2\pi} \sum_{j=n}^{2n-1} \frac{\sin\left(\frac{1}{2}s\right) \sin\left(j + \frac{1}{2}\right)s}{\sin\left(\frac{1}{2}s\right) \sin\left(\frac{1}{2}s\right)}$$

W liczniku wykorzystano tożsamość (49):

$$V_n(s) = \frac{1}{n} \frac{1}{2\pi} \sum_{j=n}^{2n-1} \frac{\cos(js) - \cos(j+1)s}{2 \sin\left(\frac{1}{2}s\right) \sin\left(\frac{1}{2}s\right)} \quad (70)$$

Suma cosinusów przybiera postać:

$$\begin{aligned} &\cos(ns) - \cos(n+1)s + \cos(n+1)s - \dots + \\ &+ \cos(2n-2)s - \cos(2n-1)s + \cos(2n-1)s - \\ &- \cos(2ns) = \cos(ns) - \cos(2ns) \end{aligned} \quad (71)$$

Uwzględniając (71) w (70) **jądro de la Vallee Poussina wynosi:**

$$V_n(s) = \frac{1}{n} \frac{1}{2\pi} \frac{\cos(ns) - \cos(2ns)}{2 \sin\left(\frac{1}{2}s\right) \sin\left(\frac{1}{2}s\right)} = \frac{1}{2\pi n} \frac{\cos(ns) - \cos(2ns)}{2 \sin^2\left(\frac{1}{2}s\right)} \quad (72)$$

Jądro de la Vallee Poussina jest powiązane a jądrem Fejera. W tym celu sumę:

$$\sigma_{2n-1}(x) = \frac{s_0 + \dots + s_n + \dots + s_{2n-1}}{2n} \quad (73)$$

rozpiszemy w postaci różnicy dwóch sum w taki sposób aby ich różnica określona była zależnością (66):

$$2 \left(\frac{s_0 + \dots + s_n + \dots + s_{2n-1}}{2n} \right) - \frac{s_0 + \dots + s_{n-1}}{n} = \quad (74)$$

$$= \frac{s_n + \dots + s_{2n-1}}{n}$$

Uwzględniając w (74) zależności (65) i (66) otrzymamy:

$$2\sigma_{2n-1}(x) - \sigma_{n-1}(x) = v_n(x) \quad (75)$$

Zależność (75) jest cytowana w [7] lecz nie jest wyprowadzona.

Uwzględniając (46) w (75) otrzymano:

$$\begin{aligned} v_n(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} s(t) K_{2n-1}(s) dt - \int_{-\pi}^{\pi} s(t) K_{n-1}(s) dt = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} s(t) [2K_{2n-1}(s) - K_{n-1}(s)] dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} s(t) V_n(s) dt \end{aligned} \quad (76)$$

gdzie zależność:

$$V_n(s) = 2K_{2n-1}(s) - K_{n-1}(s) \quad (77)$$

określa związek pomiędzy jądrem de la Vallee Poussina a jądrem Fejera. Można sformułować twierdzenie:

Twierdzenie 4

Jeżeli suma szeregu Fouriera metodą de la Vallee Poussina związane jest z sumą szeregu Fouriera metodą średnich arytmetycznych zależnością:

$$2\sigma_{2n-1}(x) - \sigma_{n-1}(x) = v_n(x)$$

To jądro de la Vallee Poussina jest różnicą jąder Fejera i dane jest w postaci:

$$V_n(s) = 2K_{2n-1}(s) - K_{n-1}(s)$$

Jądro de la Vallee Poussina obliczono wykorzystując twierdzenie 4 i zależność (52):

$$K_{2n-1}(x) = \frac{1}{2n} \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin(ns)}{\sin\left(\frac{1}{2}s\right)} \right]^2 \quad (78)$$

$$K_{n-1}(x) = \frac{1}{n} \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin\left(\frac{1}{2}ns\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}s\right)} \right]^2 \quad (79)$$

Podstawiając (78) i (80) do (77) jądro ma postać:

$$V_n(x) = \frac{1}{2\pi n} \left[\frac{1}{2} \frac{2 \sin^2(ns)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}s\right)} - \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}ns\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}s\right)} \right] = \frac{1}{2\pi n} \left[\frac{\sin^2(ns) - \sin^2\left(\frac{1}{2}ns\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}s\right)} \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi n} \frac{1 - \cos^2(ns) - 1 + \cos^2\left(\frac{1}{2}s\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}s\right)} = \frac{1}{2\pi n} \frac{\cos^2\left(\frac{1}{2}ns\right) - \cos^2(ns)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}s\right)} \quad (80)$$

Wykorzystując zależność:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad (81)$$

wyrażenie (80) wyniesie:

$$V_n(x) = \frac{1}{2\pi n} \frac{\frac{1}{2}(1 + \cos(ns)) - \frac{1}{2}(1 + \cos(2ns))}{\sin^2\left(\frac{1}{2}s\right)} = \frac{1}{2\pi n} \frac{\cos(ns) - \cos(2ns)}{2 \sin^2\left(\frac{1}{2}s\right)} \quad (82)$$

Jest to identyczna zależność jak (72) **określająca jądro de la Vallee Poussina**. Wykorzystując tożsamość na różnicę cosinusów wyrażenie (82) przybierze postać:

$$V_n(x) = \frac{1}{2\pi n} \frac{\sin\left(\frac{3ns}{2}\right) \sin\left(\frac{ns}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}s\right)} \quad (83)$$

Jest to inna wersja (sinusowa) jądra de la Vallee Poussina.

6. PODSUMOWANIE

W pracy podano pełne wyprowadzenie jąder reprodukujących Dirichleta, Fejera, de la Valle Poussina oraz Poissona. Pierwsze trzy jądra są ze sobą powiązane i podano zależności pomiędzy nimi oraz pokazano przebiegi graficzne. Na podstawie rysunków podanych w literaturze, najlepsze własności do próbkowania mają jądra Poissona. W dostępnej literaturze przedmiotu nie ma podanych bezpośrednich wyprowadzeń tych jąder. Istnieją odnośniki [2] do literatury gdzie takie analizy robiono lecz te pozycje literaturowe są niedostępne. Najbardziej uboga literatura dotyczy jądra de la Valle Poussina. Autor wyprowadził zależność analityczną określającą jądro de la Valle Poussina na podstawie informacji zamieszczonych w [7] dotyczących sum szeregów metodą de la Valle Poussina. Podano też zależności pomiędzy jądrem de la Valle Poussina i Fejera. Jądra de la Valle Poussina autor nie znalazł w postaci analitycznej w literaturze przedmiotu.

Bibliografia

- [1] J. W. Brown, R. V. Churchill, *Fourier Series and Boundary Value Problems*, McGraw-Hill Higher Education, New York 2001.
- [2] J. R. Higgins, *Sampling Theory in Fourier and Signal Analysis – Foundations*. Clarendon Press, Oxford 1996.
- [3] T. W. Körner, *Fourier Analysis*, Cambridge University Press 1991.
- [4] S. G. Krantz, *A Panorama of Harmonic Analysis*, Published by The Mathematical Association of America 1999.
- [5] A. Kufner, J. Kadlec, *Fourier Series*, Academia Prague 1971.
- [6] G. Tołstow, *Szeregi Fouriera*, PWN Warszawa 1954.
- [7] A. Zygmund, *Trigonometric Series, Volume I*, Cambridge at the University Press, 1959, wydanie rosyjskie Moskwa 1965.