

PRÓBKOWANIE SYGNAŁÓW DIAGNOSTYCZNYCH CZĘŚĆ I PRÓBKOWANIE W PRZESTRZENI HILBERTA Z REPRODUKUJĄCYM JĄDREM SHANONA

Zenon SYROKA

Uniwersytet Warmiński – Mazurski, Wydział Nauk Technicznych
ul. Oczapowskiego 11, 10 – 717 Olsztyn, e-mail: syrokaz@onet.eu

Streszczenie

W pracy przedstawiono matematyczny opis sygnałów diagnostycznych przestrzeni Hilberta oraz sposób konstrukcji tej przestrzeni. Podano teorię jąder reprodukujących w zastosowaniu do próbkowania sygnałów diagnostycznych oraz zapis klasycznego twierdzenia o próbkowaniu Shanona wykorzystującego teorię jąder reprodukujących.

Słowa kluczowe: próbkowanie sygnałów, przestrzenie sygnałów, przestrzeń Hilberta, jądra reprodukujące, jądra Shanona.

SAMPLING THE DIAGNOSTIC SIGNALS

PART I

SAMPLING IN THE REPRODUCING KERNEL HILBERT SPACE WITH SHANON KERNEL

Summary

In this article is defined the diagnostic signals in the reproducing kernel Hilbert space and the way this space is constructed. The theory of the reproducing kernel Hilbert space and Shanon theorem in this space were given.

Keywords: sampling signals, signals space, Hilbert space, reproducing kernel, Shanon kernel.

1. WPROWADZENIE

Próbkowanie jest procesem reprezentowania sygnału o czasie ciągłym za pomocą ciągu próbek pobieranych w dyskretnych chwilach czasu. Technika próbkowania jest wszechobecna w dziedzinie cyfrowego przetwarzania sygnałów. W praktyce próbkowanie przeprowadza się poprzez podanie sygnału ciągłego na wejście przetwornika analogowo – cyfrowego, którego sygnał wyjściowy jest ciągiem wartości cyfrowych. W chwilach, w których chcemy zarejestrować próbki sygnału, otwierana jest bramka elektroniczna. W ten sposób tworzone są krótkie impulsy o amplitudach odpowiadających wartościom sygnału ciągłego w wybranych chwilach próbkowania.

Praca jest wprowadzeniem do matematycznej teorii próbkowania sygnałów diagnostycznych dolnopasmowych, czyli opisu procesu próbkowania za pomocą jąder, tzn. funkcji matematycznych, dzięki którym sygnał diagnostyczny może być odpowiednio wysłany w kanał telekomunikacyjny a w odbiorniku na podstawie odebranych próbek zrekonstruowany. Wystarczy w tym celu znaleźć najbardziej odpowiednią bazę sygnałów diagnostycznych dla konstrukcji przetwornika.

Głównym celem trzech części prac jest udowodnienie w ścisły sposób analityczny iż,

rozkładając sygnał w szereg względem odpowiedniej bazy (szeregi takie nazywane są finite and infinite sampling series) ortogonalnej po stronie nadawczej i przesyłając w kanale tylko informacje o jego współczynnikach rozwinięcia a w odbiorniku odpowiednio je generując i sumując można otrzymać sygnał wejściowy (bezzprzewodowy system diagnostyczny).

W tej części pracy przedstawiono ogólną teorię jąder reprodukujących oraz próbkowanie klasyczne, przy pomocy jądra Shanona.

2. PRZESTRZENIE FUNKCYJNE SYGNAŁÓW DIAGNOSTYCZNYCH

Występujące w technice sygnały diagnostyczne należy rozważać jako elementy przestrzeni funkcyjnych. Podejście takie umożliwia efektywne stosowanie analizy funkcjonalnej. Podstawowym elementem analizy funkcjonalnej jest przestrzeń liniowa [8].

Definicja 1

Zbiór sygnałów $\{S\}$ nazywamy przestrzenią liniową, jeżeli dla każdego dwóch sygnałów f_1, f_2 określona jest ich suma $f_1 + f_2 = f \in S$ oraz, jeżeli dla każdego sygnału $f \in S$ i dla każdej liczby rzeczywistej $\alpha, \beta \in R$ (zespolonej $\alpha, \beta \in C$) określony jest iloczyn $\alpha f \in R$.

Wprowadzone działania dodawania i mnożenia muszą spełniać ponadto następujące aksjomaty:

- (I) $f_1 + f_2 = f_2 + f_1$ – przemienność dodawania;
 (II) $(f_1 + f_2) + f_3 = f_1 + (f_2 + f_3)$ – łączność dodawania;
 (III) istnieje element zerowy $\theta \in S$ taki, że $\theta f = \theta$, dla każdego $f \in S$;
 (IV) $\alpha(f_1 + f_2) = \alpha f_1 + \alpha f_2$ – prawo rozdzielności;
 (V) $(\alpha + \beta)f + \alpha f + \beta f$ – prawo rozdzielności;
 (VI) $(\alpha\beta)f = \alpha(\beta f)$, łączność mnożenia;
 (VII) $sf = f$, $s \in S$, istnieje element neutralny zbioru $\{S\}$.

Zbiory sygnałów diagnostycznych o ograniczonej mocy średniej i o ograniczonej energii, zbiory diagnostycznych sygnałów sinusoidalnych, a także okresowych stanowią przestrzenie liniowe.

Definicja 2

Jeżeli każdemu sygnałowi f z przestrzeni liniowej S przyporządkować liczbę nieujemną $\|f\|$ tak, że spełnione są warunki (aksjomaty normy):

- (I) $\|f\| = 0 \Rightarrow f = \theta$;
 (II) $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$, $\lambda \in R$ lub $\lambda \in C$ – jednorodność normy;
 (III) $\|f_1 + f_2\| \leq \|f_1\| + \|f_2\|$ – nierówność trójkąta, to przestrzeń S nazywamy unormowaną, a liczbę $\|f\|$ nazywamy normą sygnału.

Jeżeli w przytoczonych przykładach norma zdefiniowana będzie jako pierwiastek całki z wartości bezwzględnej sygnału diagnostycznego, to wszystkie aksjomaty normy zostaną spełnione, a wymienione przestrzenie będą przestrzeniami liniowymi unormowanymi.

Definicja 3 [2]

Niech $\{f_n\}$ będzie nieskończonym ciągiem sygnałów w przestrzeni unormowanej $\{S, \|\cdot\|\}$ oraz f wyróżnionym elementem tej przestrzeni. Jeżeli:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$$

to mówimy, że ciąg sygnałów jest zbieżny do sygnału f w sensie normy. Sygnał f nazywamy granicą ciągu $\{f_n\}$

Definicja 4

Ciąg sygnałów $\{f_n\}$ przestrzeni liniowej i unormowanej $\{S, \|\cdot\|\}$ nazywamy ciągiem Cauchy'ego gdy:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \|f_n - f_m\| = 0,$$

tzn. jeżeli odległość pomiędzy wyrazami ciągu o dostatecznie dużych numerach maleje do zera.

Definicja 5

Jeżeli w przestrzeni liniowej unormowanej każdy ciąg Cauchy'ego ma granicę należącą do tej przestrzeni, to przestrzeń $\{S, \|\cdot\|\}$ nazywamy przestrzenią zupełną.

Definicja 6

Przestrzeń liniowa sygnałów, unormowana i zupełna nosi nazwę przestrzeni Banacha.

Znane z geometrii euklidesowej pojęcia iloczynu skalarnego i ortogonalności wektorów uogólnia się na przypadek przestrzeni sygnałów diagnostycznych w następujący sposób.

Definicja 7

Iloczynem skalarnym uporządkowanej pary sygnałów $f_1, f_2 \in S$ przestrzeni liniowej S nazywamy odwzorowanie, które tej parze przyporządkowuje liczbę $\langle f_1, f_2 \rangle$ rzeczywistą lub zespoloną tak, że spełnione są następujące aksjomaty:

- (I) $\langle f_1, f_2 \rangle = \langle f_1, f_2 \rangle^*$
 (II) $\langle \alpha f_1, f_2 \rangle = \alpha \langle f_1, f_2 \rangle$
 (III) $\langle f_1 + f_2, f_3 \rangle = \langle f_1, f_3 \rangle + \langle f_2, f_3 \rangle$
 (IV) $\langle f, f \rangle = 0$ dla $f = \theta$ i $\langle f, f \rangle > 0$ dla $f \neq \theta$

Z wymienionych aksjomatów wynikają zależności:

$$\langle \theta, f \rangle = 0 \quad (1)$$

$$\langle f_1, f_2 \rangle \leq \sqrt{\langle f_1, f_1 \rangle} \sqrt{\langle f_2, f_2 \rangle} \quad (2)$$

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} \quad (3)$$

Definicja 8

Przestrzeń liniowa sygnałów S , w której istnieje iloczyn skalarny i norma określona wzorem (3), nazywamy przestrzenią unitarną.

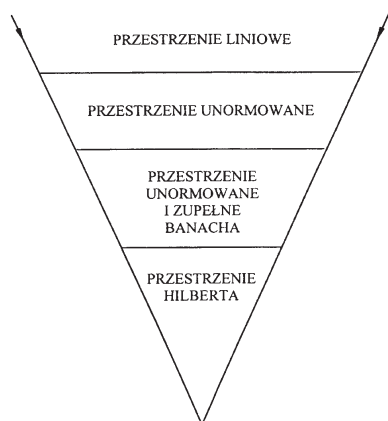
Definicja 9

Przestrzeń liniową, unitarną i zupełną sygnałów nazywamy przestrzenią Hilberta.

Sposób konstrukcji przestrzeni Hilberta odgrywającej ważną rolę w analizie sygnałów przedstawia rys. 1.

Przestrzeń $L_p^2(0, T)$, sygnałów diagnostycznych całkowalnych z kwadratem w przedziale $\langle 0, T \rangle$, przestrzeń sygnałów diagnostycznych o skończonej energii i mocy, przestrzeń l_2 są przestrzeniami Hilberta.

Własności takich sygnałów zostaną opisane w następnym rozdziale.



Rys. 1. Ilustracja konstrukcji przestrzeni Hilberta

3. WŁASNOŚCI SYGNAŁÓW DIAGNOSTYCZNYCH W PRZESTRZENI HILBERTA

Właściwości abstrakcyjnej przestrzeni Banacha czy przestrzeni Hilberta są automatycznie słuszne dla każdej konkretnej przestrzeni Hilberta i Banacha. Nie jest zatem konieczne badanie każdej z poszczególnych przestrzeni osobno. Jest to niewątpliwie zaletą abstrakcyjnego ujęcia teorii sygnałów.

Ze względu na specyfikę analizy wyodrębniamy przestrzeń pre – Hilbertowską zdefiniowaną [2]:

Definicja 10

Liniowa wektorowa przestrzeń sygnałów wyposażona w iloczyn skalarny nazywana jest przestrzenią pre – Hilbertowską.

Norma w przestrzeni pre – Hilbertowskiej zadana jest przez iloczyn skalarny (3). Kwadrat normy jest interpretowany jako energia sygnału. Przestrzeń $L_p^2(0, T)$ jest przestrzenią sygnałów impulsowych o ograniczonej energii. Można zatem powiedzieć, iż jeżeli f_1 jest sygnałem napięciowym a f_2 prądowym to iloczyn skalarny tych sygnałów w przestrzeni Hilberta określa całkowitą energię dostarczoną do układu w przedziale $(0, T)$.

Lemat 11 [2]

Niech H jest pre – Hilbertowską przestrzenią nad ciałem C . To dla każdego $x, y \in H$ spełnione są następujące tożsamości:

(I) nierówność Schwartza
$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad (4)$$

(II) prawo równoległoboku

(III)
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (5)$$

W przestrzeni pre – Hilbertowskiej nad ciałem R można zdefiniować kąt pomiędzy dwoma sygnałami $x, y \in H$ w postaci [5]:

$$\cos \varphi = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \quad (6)$$

Kąt ten jest postaci $k\pi$, gdzie k jest dowolną liczbą.

Zdefiniowanie kąta pomiędzy sygnałami prowadzi do pojęcia ortogonalności sygnałów [2]:

Definicja 12

Niech H jest przestrzenią pre – Hilbertowską, mówimy, iż $x, y \in H$ są ortogonalne jeżeli $\langle x, y \rangle = 0$. Niech S jest podzbiorem przestrzeni H . Zbiór ortogonalny do S oznaczony jest przez S^\perp i zdefiniowany jest w postaci:

$$S^\perp = \{x \in H \mid \langle x, y \rangle = 0 \text{ dla każdego } y \in S\} \quad (7)$$

Z pojęciem ortogonalności sygnałów związana jest addytywność energii lub mocy średniej sygnału względem rozkładu sygnału na składowe.

Ortogonalność w przestrzeni pre – Hilbertowskiej nad ciałem R implikuje zależność Pitagorasa [2]:

Twierdzenie 14

Niech H jest przestrzenią pre – Hilbertowską. Jeżeli x i y są ortogonalne to:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad (8)$$

Można zapisać [2]:

$$\langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad (9)$$

W przestrzeni pre – Hilbertowskiej nad ciałem C twierdzenie (14) nie jest prawdziwe.

Norma w przestrzeni pre – Hilbertowskiej spełnia jeszcze poniższe warunki [5]:

Twierdzenie 15

(I) dla przestrzeni pre – Hilbertowskiej nad ciałem R

$$4\langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \quad (10)$$

(II) dla przestrzeni pre – Hilbertowskiej nad ciałem C

$$4\langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\| - i\|x - iy\| \quad (11)$$

Norma w przestrzeni pre – Hilbertowskiej indukuje odległość pomiędzy sygnałami.

Definicja 16

Odwzorowanie $d : H \times H \rightarrow R_+$ jest nazywane odległością sygnałów w przestrzeni pre – Hilbertowskiej jeżeli dla każdego $x, y, z \in H$ zachodzą związki:

(I) $d(x, y) \geq 0$ i $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$; (12)

$$(II) \quad d(x, y) = d(y, x); \quad (13)$$

$$(III) \quad d(x, y) \geq d(x, z) + d(z, y); \quad (14)$$

odległość $d(x, y)$ dana jest wtedy w postaci:

$$d(x, y) = \|x - y\|. \quad (15)$$

Definicja 17

Przestrzeń pre-Hilbertowska zupełną sygnałów w metryce danej przy pomocy normy (15) nazywamy przestrzenią Hilberta.

W celu wyjaśnienia teorii konstrukcji jąder reprodukcyjnych wykorzystywanych do próbkowania sygnałów diagnostycznych należy rozważyć aproksymację dyskretną sygnałów w przestrzeni Hilberta.

Aproksymacje dyskretnie polegają na przybliżaniu sygnału f szeregiem:

$$f(t) \approx \sum_{n=1}^n a_n e_n(t) \quad (16)$$

gdzie:

a_n – współczynniki szeregu,
 $e_n(t)$ - funkcje bazowe,

tak, aby błąd aproksymacji był możliwie jak najmniejszy.

Aproksymację przeprowadza się w dwóch fazach, w pierwszej fazie procedury aproksymacyjnej wybiera się zbiór funkcji bazowych $e_n(t)$, charakteryzujących się zwykle określonym typem zmienności w czasie. Po ustaleniu tych funkcji, w drugiej fazie, wyznacza się liczby a_n , tak, aby błąd aproksymacji sygnału szeregiem (16) był najmniejszy w sensie pewnego ustalonego kryterium miary błędu. Z reguły funkcje $e_n(t)$ są dobierane w taki sposób, że ze wzrostem ich liczby, tzn. ze wzrostem n , błąd aproksymacji maleje. Mówimy wówczas, że ciąg funkcji jest zbieżny w sensie ustalonego kryterium zbieżności do sygnału f .

Definicja 18 [6]

Nieskończony ciąg $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$ elementów przestrzeni Hilberta nazywamy ciągiem liniowo niezależnym, gdy dowolna kombinacja liniowa tych elementów spełnia warunek:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n e_n = 0 \rightarrow \text{dla każdego } n \in N \quad a_n = 0$$

Z definicji liniowej niezależności elementów e_n wynika, że żaden z elementów e_n nie może być przedstawiony jako kombinacja liniowa pozostałych elementów.

Definicja 19 [4]

Zbiór elementów liniowo niezależnych $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$ przestrzeni Hilberta nazywamy

układem ortogonalnym, gdy wszystkie elementy e_n są parami ortogonalne. $\langle e_i, e_k \rangle = 0$ gdy $j \neq k$.

Definicja 20 [4]

Zbiór elementów liniowo niezależnych $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$ przestrzeni Hilberta nazywamy układem zupełnym, jeśli dla elementu x przestrzeni Hilberta warunek $\langle x, e_n \rangle = 0$ pociąga warunek $x = 0$

Definicja 21 [4]

Bazą ortonormalną w przestrzeni Hilberta nazywamy każdy układ $\{e_1, e_2, \dots, e_n, \dots\}$ ortogonalny, unormowany ($\|e_n\| = 1, n \in N$) i zupełny.

Twierdzenie 22 [4]

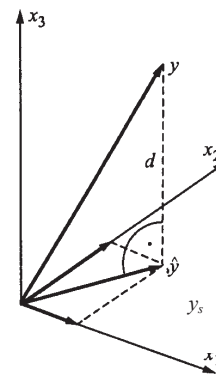
W przestrzeni Hilberta istnieje przeliczalna baza ortonormalna wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzeń jest ośrodkowa.

Przykładami przestrzeni ośrodkowych są przestrzenie $l^2, L^2, L^2(0, T)$. Należy zauważyć, że w ośrodkowej przestrzeni Hilberta istnieje na ogół nieskończenie wiele baz sygnałów.

Definicja 23 [2]

Sygnał $y_S \in H$ nazywamy rzutem ortogonalnym sygnału $y \in H$ na podprzestrzeń $S \subset H$, jeśli $y_S \in S$ i różnica $d = y - y_S$ jest ortogonalna do S .

Na rys. 2 przedstawiono ilustrację graficzną tej definicji.



Rys. 2. Rzut ortogonalny na podprzestrzeń $y \in R^3$, a y_S jest jego rzutem na podprzestrzeń rozpiętą przez $\{x_1, x_2\}$, przy czym $d = y - y_S$ jest sygnałem ortogonalnym do podprzestrzeni rozpiętej przez $\{x_1, x_2\}$

Zachodzi wówczas równość:

$$\|y\|^2 = \|y_S\|^2 + \|d\|^2 \quad (17)$$

Zauważmy, że każdy sygnał $y \in H$ ma co najwyżej jeden rzut ortogonalny na daną podprzestrzeń $S \subset H$. Istnienie rzutu ortogonalnego rozstrzyga następujące twierdzenie

Twierdzenie 24 [4]

Niech S będzie domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Hilberta H . Dla każdego sygnału $y \in H$ istnieje dokładnie jeden sygnał $y_S \in S$ taki, że $\|y - y_S\| = d(y, S)$. Sygnał y spełnia jednocześnie warunek $\langle y - y_S, u \rangle = 0$ dla każdego $u \in S$.

Jeśli $\{\varphi_n\}$ jest bazą ortonormalną w S , to rzut ortogonalny sygnału $f \in H$ na S jest określony

$$y_S = \sum_n \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n \quad (18)$$

w przypadku jeśli $\{\varphi_n\}$ jest bazą ortogonalną to rzut ortogonalny sygnału $f \in H$ na S jest określony

$$y_S = \sum_n \frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle} \varphi_n \quad (19)$$

Powyższe zależności stanowią podstawę do zdefiniowania funkcji zwanej jądrem reprodukującym wykorzystywanym do teorii próbkowania sygnałów.

4. JĄDRO REPRODUKUJĄCE W PRZESTRZENI HILBERTA

Jądro reprodukujące jest funkcją $D \times D \rightarrow R$ (w ogólności $D \subseteq R^n$). Funkcje te należą do przestrzeni sygnałów (typowo do L^2 , zbiór sygnałów całkowalnych z kwadratem). Przestrzeń Hilberta wyposażona w jądro nazywana jest przestrzenią Hilberta z reprodukującym jądrem.

Definicja 25 [1]

Funkcja $k(\cdot, \cdot)$ z $D \times D \rightarrow R$ jest dodatnim jądrem jeżeli jest symetryczna i jeżeli dla każdego podzbioru $\{D_i\}$, $i = 1, n$, zbioru D , i dla każdego szeregu skalarów $\{\alpha_i\}$, $i = 1, n$ był spełniony jest warunek

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j k(x_i, x_j) \geq 0 \quad (20)$$

W związku z tym możemy zapisać

$$k(x, y) > 0 \Leftrightarrow \forall f \in L^2 \langle \langle f, f \rangle_{L^2}, f \rangle_{L^2} \geq 0 \quad (21)$$

W pracy [1] udowodniono, iż:

$$k(x, y) > 0 \Leftrightarrow \forall f \in H \langle \langle f, f \rangle_H, f \rangle_H \geq 0 \quad (22)$$

oraz wprowadzono bijekcję pomiędzy pojęciem dodatniego jądra a przestrzenią Hilberta z reprodukującym jądrem.

Twierdzenie 26 [1]

Dla każdej przestrzeni Hilberta z reprodukującym jądrem odpowiada jednoznacznie zdefiniowana funkcja zwana reprodukującym jądrem i odwrotnie dla każdej funkcji f spełniającej warunki definicji (25) można zbudować przestrzeń Hilberta z tą funkcją jako jądrem reprodukującym.

W pracy [7] uogólniono pojęcie jądra przy pomocy pojęcia dualnej bazy.

$$k(x, y) > 0 \Leftrightarrow \forall f \in E^* \langle \langle f, f \rangle_{E^*}, f \rangle_{E^*} \geq 0 \quad \text{gdzie } E \in H \quad (23)$$

Definicja 27 [3]

Biortogonalny system w przestrzeni Hilberta składa się z dwóch podzbiorów $\{\varphi_n\}$ i $\{\varphi_n^*\}$ należących do H , zbiór $\{\varphi_n, \varphi_n^*\}$ ma własność

$$\langle \varphi_n, \varphi_m^* \rangle = \delta_{nm} \quad (24)$$

gdzie

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases} \quad (25)$$

jest symbolem delta Kroneckera.

Twierdzenie 28 [3]

Jeżeli $\{\varphi_n\}$ jest bazą dla H , to określa ona jednoznacznie podzbiór $\{\varphi_n^*\}$ w H tak, że $\{\varphi_n, \varphi_n^*\}$ jest biortogonalnym systemem $c_n(f) = \langle f, \varphi_n \rangle$ i $\{\varphi_n^*\}$ jest także bazą w H .

Definicja 29 [3]

Kiedy $\{\varphi_n\}$ jest bazą w H , to biortogonalny system określony w twierdzeniu (28) wyznacza par baz w H , gdzie obie są do siebie dualne.

Niech H będzie ośrodkową przestrzenią Hilberta, której elementami są funkcje z dziedziny D . Załóżmy, że istnieje jądro k zdefiniowane na $D \times D$ spełniające dwa warunki:

- dla funkcji f określonych na zbiorze $X \in H$, $k(x, y)$ należy do H dla każdego $y \in D$;
- dla każdego $f \in H$

$$f(y) = \langle f, k(\cdot, y) \rangle, \quad y \in D \quad (26)$$

jest regułą reprodukującą.

Definicja 30 [3]

Jądro k spełniające dwa powyższe warunki nazywane jest jądrem reprodukującym. Przestrzeń Hilberta wyposażona w reprodukujące jądro jest nazywana

przestrzeni Hilberta z reprodukującym jądrem (RKHS)

Przestrzeń Hilberta z reprodukującym jądrem cechuje się następującymi właściwościami [3]:

1. Przestrzeń funkcji należących do przestrzeni Hilberta jest przestrzenią z reprodukującym jądrem wtedy i tylko wtedy jeżeli punktowe oszacowanie $Lf = f(y)$ jest ograniczonym liniowym funkcjonałem na H .
2. Określona przestrzeń Hilberta posiada najwyżej jedno jądro reprodukujące.
3. Jeżeli $\{\varphi_n\}$, $n \in X$ jest ortonormalną bazą dla przestrzeni Hilberta z reprodukującym jądrem to:

$$k(x, y) = \sum_{x \in X} \varphi_n(x) \overline{\varphi_n(y)} \quad (27)$$

a co za tym idzie:

$$k(x, y) = \overline{k(y, x)} \quad (28)$$

4. Jeżeli $\{\varphi_n\}$, $n \in X$ jest bazą dla przestrzeni Hilberta z reprodukującym jądrem i biortogonalną bazą $\{\varphi_n^*\}$, $n \in X$ to w sensie silnej zbieżności

$$k(x, y) = \sum_{x \in X} \varphi_n(x) \overline{\varphi_n^*(y)} \quad (29)$$

5. Zbieżność szeregu w przestrzeni Hilberta z reprodukującym jądrem implikuje zbieżność punktową w D do tej samej sumy, zbieżność jest jednostajna na każdym podziorze D , w którym $k(x, x)$ jest ograniczony.

Przestrzeń Hilberta z reprodukującym jądrem stanowi doskonałe narzędzie analizy sygnałów diagnostycznych poddanych próbkowaniu.

5. ZASTOSOWANIE TEORII JĄDER REPRODUKUJĄCYCH W PRÓBKOWANIU SYGNAŁÓW DIAGNOSTYCZNYCH

Niech H jest przestrzenią Hilberta z reprodukującym jądrem dla funkcji zdefiniowanych w dziedzinie D . Niech przestrzeń posiada reprodukujące jądro $k(x, y)$ i (λ_n) , $n \in X$ jest szeregiem punktów należących D .

Definicja 31 [3]

Szereg funkcyjny $\{\varphi_n\}$, $n \in X$, należący do H ma własności próbkujące względem (λ_n) jeżeli

$$\varphi_n(\lambda_m) = \delta_{nm} \quad n, m \in X \quad (30)$$

gdzie

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases} \quad (31)$$

jest symbolem delta Kroneckera.

Lemat 32

Niech (λ_n) jest takim szeregiem punktów należących do D , że $\{k(\cdot, \lambda_n)\}$ jest bazą dla przestrzeni Hilberta i niech $\{S^*\}$ będzie dualną bazą. To dla każdego $f \in H$ mamy regułę próbkowania:

$$f = \sum_{n \in X} f(\lambda_n) S_n^* \quad (32)$$

ze zbieżnością według normy.

Jeżeli w szczególności $\{k(\cdot, \lambda_n)\}$ jest ortogonalną bazą dla H to

$$f = \sum_{x \in X} f(\lambda_n) \frac{k(\cdot, \lambda_n)}{k(\lambda_n, \lambda_n)} \quad (33)$$

gdzie

$$k(\lambda_n, \lambda_n) = \|k(\cdot, \lambda_n)\|^2 \quad (34)$$

Lemat 33 [3]

Niech $\{\varphi_n\}$ jest bazą w H taką, że:

Albo mamy:

$$f = \sum_{i=1}^n f(\lambda_n) \varphi_n^* \quad i \quad f \in H \quad (35)$$

albo:

zbiór $\{\varphi_n\}$ ma własności próbkujące w $\{\lambda_n\}$ (sekwencja punktów należących do D)

to:

$$\varphi_n = k(\cdot, \lambda_n) \quad (36)$$

Na podstawie podanych definicji i lematów rozważmy rekonstrukcję sygnałów diagnostycznych zdefiniowanych w dziedzinie o skończonej mierze Lebesgue'a na podstawie próbek w skończonej liczbie punktów. Jest to zadanie podobne do problemu interpolacji sygnału w skończonej liczbie punktów.

Funkcje te są reprezentowane przez skończone szeregi próbkujące będące w ogólnym sensie wielomianami. Szeregi te są ograniczone do ortogonalnych zbiorów. Sygnały diagnostyczne podlegające próbkowaniu są analogowe i wąskopasmowe.

Natychmiast można rozpoznać przypadek trygonometrycznych wielomianów charakteryzujących skończoną ilość częstotliwościowych składników. Wielomiany te są najprostrzymi funkcjami interesującymi w teorii próbkowania. Aproksymują one sygnały należące do wielu klas.

Niech $\{\varphi_n\}$ jest ortonormalną bazą dla $L^2(E)$, gdzie $E \in H$. To rozważana klasa sygnałów określona na E jest w skończenie wymiarowej przestrzeni H dla wszystkich wielomianów dana w postaci:

$$f(t) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(t) \quad (37)$$

$$\{c_i\} \in C$$

Jeżeli g jest inną funkcją tego typu o współczynnikach $\{c_n\} \in C$ to:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^n c_i \bar{c}_i \quad (38)$$

W związku z tym możemy zapisać:

$$k_n(t, \lambda) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(t) \overline{\varphi_i(\lambda)} \quad (39)$$

$$f(\lambda) = \sum_{i=1}^n c_n \varphi_n(\lambda) = \langle f, k_n(\cdot, \lambda) \rangle \quad (40)$$

Dla zbioru punktów $\{\lambda_n\}$ takich, że $\{k_n(t, \lambda_i)\}$ jest ortogonalnym zbiorem w H zachodzi:

$$\langle k_n(\cdot, \lambda_i), k_n(\cdot, \lambda_j) \rangle = k_n(\lambda_i, \lambda_j) \delta_{ij} \quad (41)$$

i

$$\left\{ \frac{k_n(t, \lambda_i)}{\sqrt{k_n(\lambda_i, \lambda_i)}} \right\} \quad (42)$$

jest ortomormalną bazą w H .

Zależność określająca sygnał jako sumę próbek wynosi [3]:

$$f(t) = \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) \frac{k_n(t, \lambda_i)}{k_n(\lambda_i, \lambda_i)} \quad (43)$$

Teraz uwzględniając teorię jąder reprodukcujących można sformułować twierdzenie Shanona w postaci:

Twierdzenie 34 Shanona

Niech g będzie sygnałem o ograniczonej częstotliwości, nie większej niż W

$$\text{sup } p(\bar{G}) \subset [-W, W] \quad (44)$$

oraz o skończonej energii

$$\bar{G} \in L^2(R) \quad (45)$$

To dla każdego $T_s > 0$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |g(nT_s)|^2 < +\infty \quad (46)$$

i dla każdego

$$T_s \leq \frac{1}{2W} \quad (47)$$

zachodzi

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(nT_s) k_n(t, nT_s) \quad (48)$$

gdzie:

$$k_n(t, nT_s) = \frac{\sin \frac{\Pi}{T_s}(t - nT_s)}{\frac{\Pi}{T_s}(t - nT_s)} \quad (49)$$

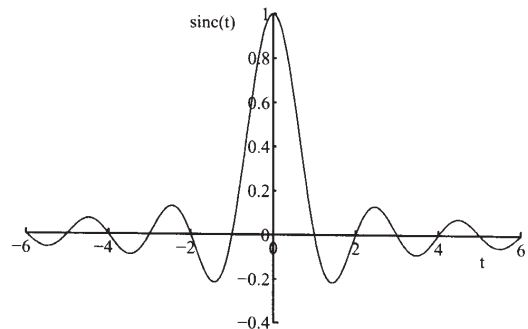
jest jądrem reprodukcującym Shanona.

Jeżeli ponadto

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |g(nT_s)| < +\infty \quad (50)$$

to szereg (48) jest zbieżny jednostajnie w R , dla każdego $t \in R$

Można powiedzieć, iż twierdzenie to określa przestrzeń Hilberta z reprodukcującym jądrem Shanona danym zależnością (49). Przykładowy przebieg funkcji jądra Shanona pokazano na rys. 3.



Rys. 3. Przebieg zmienności jądra reprodukcyjnego Shanona $\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\Pi t)}{\Pi t}$

PODSUMOWANIE

W pracy sformułowano teorię jąder reprodukcujących w przestrzeni Hilberta w zastosowaniu do próbkowania sygnałów diagnostycznych.

Analizę jąder reprodukcujących rozpatrzono głównie dla sygnałów diagnostycznych spełniających założenia twierdzenia Shanona o wąskopasmowości. W dostępnej inżynierskiej literaturze przedmiotu twierdzenie Shanona podawane jest bez dowodu. W literaturze matematycznej [2] podany jest szkic dowodu tego twierdzenia.

Teoria jąder reprodukcujących została podana w rozdziale (4) i (5). W literaturze przedmiotu teoria ta jest wykorzystywana w analizie harmoniczej. W rozdziale (5) podano zastosowanie teorii jąder reprodukcujących w próbkowaniu sygnałów oraz sformułowano twierdzenie Shanona wykorzystując tę teorię.

Bibliografia

- [1] N. Aronszajn, *Theory of reproducing kernels*, Transactions of the American Mathematical Society 68, pp 337-404.
- [2] C Gasquet, P Witomski, *Fourier Analysis and Applications: Filtering, Numerical Computation, Wavelets*. Springer, New York 1998.
- [3] J. R Higgins, *Sampling Theory in Fourier and Signal Analysis - Foundations*. Clarendon Press, Oxford 1996.
- [4] A Jakubowski, *Repetitorium z przedmiotu „Miara i prawdopodobieństwo”*, UMK Toruń 2001.
- [5] A Kufner, J Kadlec, *Fourier Series*, Academia Prague 1971.

- [6] E. H. Lieb, M. Loss, *Analysis, Graduate Studies in Mathematics*, American Mathematical Society, 1998.
- [7] L. Schwartz, *Sous espaces hilbertiens d'espaces vectoriels topologiques et noyaux associes*, Journal d'Analyse Mathematique, pp. 115-256, 1964.
- [8] E. M. Stein, G. Weiss, *Fourier Analysis on Euclidean Spaces*. Princeton University Press 1971.



Dr inż. **Zenon SYROKA** jest adiunktem w Katedrze Elektrotechniki i Energetyki UWM w Olsztynie. Ukończył Wydział Elektroniki WAT w Warszawie i Wydział Matematyki i Informatyki UMK w Toruniu. Jego zainteresowania naukowe to:

radiokomunikacja; systemy telekomunikacyjne; analiza, przetwarzanie sygnałów, obrazów i drgań; zastosowania matematyki i informatyki w naukach technicznych; sterowanie maszyn; układy elektroniczne analogowe i cyfrowe; programowane układy elektroniczne; programowanie C, PASCAL, MATLAB, VHDL. Jest autorem licznych publikacji związanych z powyższą tematyką.