

Maria Majkowska
Katedra Zastosowań Matematyki
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

SPADKI PODCIŚNIENIA W DŁUGIM PRZEWODZIE MLECZNYM APARATU UDOJOWEGO OBLICZANE NA PODSTAWIE UPROSZCZONEGO RÓWNANIA BERNOULLIEGO

Streszczenie

W pracach A. Kupczyka został przedstawiony model matematyczny spadku podciśnienia w długim przewodzie mlecznym [Kupczyk 1999; Iwaszko i in. 1996]. Spadek podciśnienia jest opisany równaniem Bernoulliego na wysokość straconą. Model ten jest nieliniowy, w postaci funkcji uwikłanej. Okazuje się, że ciśnienie w zakresie wartości występujących w aparatach udojowych, w długim przewodzie mlecznym praktycznie nie wpływa na prędkość wznoszenia pęcherza w długim przewodzie mlecznym. Równanie Bernoulliego może być uproszczone do wielomianu czwartego stopnia względem spadku podciśnienia. Przedstawiono model spadków podciśnienia w długim przewodzie mlecznym w postaci uproszczonej, wyniki weryfikacji modelu uproszczonego oraz przykładowe symulacje spadków podciśnienia przeprowadzone zgodnie z modelem uproszczonym.

Słowa kluczowe: dojarka, długi przewód mleczny, podciśnienie robocze, spadek podciśnienia, model matematyczny, funkcja uwikłana, weryfikacja modelu

Wstęp

Dojarka mechaniczna dla krów jest urządzeniem pracującym na zasadzie pompy ssącej i tylko częściowo naśladuje naturalny proces ssania mleka przez cielę. Występują znaczne różnice między ssaniem strzyka przez cielę a dojem mechanicznym [Woyke 1993; Juszka 1993; Nowak 1989]. Dojarka pracuje w bezpośrednim kontakcie ze zwierzęciem, kondycja krów jest celem nadrzędnym, przy jednoczesnym spełnieniu oczekiwań człowieka, którego pracę zastępuje. Spadek podciśnienia jest naturalną konsekwencją przepływu mleka od kolektora do zbiornika. Jednak jego konsekwencje stanowią o zagrożeniu zdrowia krowy. Wahań ciśnienia powodują przepływy zwrotne, zmniejsza się prędkość wydajania, zwiększa się czas trwania doju mechanicznego [Woyke i in. 1993]. Wieloletnie doświadczenie i badania nad negatywnym oddziaływaniem wahań podciśnienia na wymię krowy wskazu-

je, że podciśnienie w dojarce mechanicznej powinno być stabilne [Iwaszko, Kupczyk 1996; Tolle 1984; Szlachta, Wiercioch 1988], więc spadki i wahania podciśnienia możliwie najmniejsze. Z drugiej strony jakość mleka istotnie zależy od budowy dojarki oraz elementów związanych z transportem mleka.

Czynnikiem wpływającym na jakość mleka jest powietrze dopuszczane do aparatu udojowego. Może ono w znacznym stopniu zanieczyszczać mleko oraz przyczynia się do uszkodzania kuleczek tłuszczowych (podnosi się poziom wolnych kwasów tłuszczowych) [Szlachta 1995].

Powstało wiele modeli opisujących pracę dojarki. Przeważają modele statystyczne, wiążące równaniami regresji obserwowane wielkości. Modele matematyczne, których podstawą jest fizyczny opis zjawisk zachodzących w dojarce, dają możliwość symulacji pracy dojarki i budowy modeli optymalizacyjnych.

Takim modelem jest równanie Bernoulliego na wysokość straconą opisujące spadek podciśnienia w długim przewodzie mlecznym (dpm) [Kupczyk 1999]. Podciśnienie obniża się na skutek wynoszenia cieczy na wysokość H , pokonywania sił tarcia (wsp. λ) oraz strat lokalnych (wsp. ξ) na króćcu wylotowym z kolektora do długiego przewodu mlecznego (dmp).

Występujący we wzorze współczynnik objętościowy powietrza α_{pdpm} jest ilorzem prędkości zredukowanej (u_p) i prędkości wznoszenia powietrza (v_p). Pośrednio prędkość wznoszenia v_p jest zależna od prędkości pęcherza w cieczy nieruchomej (v_∞). Okazuje się, że wielkość ta jest niemal stała w funkcji zmian ciśnienia p , co pozwala na istotne uproszczenie równania opisującego spadek podciśnienia.

W pracy przedstawiono analizę prędkości wznoszenia pęcherza powietrza w mieszaninie mleka i powietrza oraz propozycję uproszczenia struktury modelu spadków podciśnienia w aparacie udojowym. Przedstawiono wyniki weryfikacji modelu o uproszczonej strukturze z modelem i danymi laboratoryjnymi. Zaproponowano wykorzystanie modelu uproszczonego do badania spadków podciśnienia w rzeczywistych i hipotetycznych aparatach udojowych.

Metodyka - uproszczenie modelu spadków podciśnienia

Prędkość unoszenia pęcherza v_∞ jest między innymi funkcją gęstości powietrza [Kupczyk 1999; Walden 1978]:

$$v_\infty = k_1 \sqrt{\frac{g(\rho_m - \rho_p)D}{\rho_m}},$$

$$k_1 = 0,345 \left[1 - \exp\left(\frac{-0,01\sqrt{Ar}}{0,345}\right) \right] * \left[1 - \exp\left(\frac{3,37 - Eo}{M_1}\right) \right],$$

$$Ar = \frac{g}{\mu_m^2} (\rho_m - \rho_p) D^3, \quad Eo = \frac{g}{\sigma} (\rho_m - \rho_p) D^2, \quad \rho_p = \frac{p}{RT}.$$

Analizując wartość pochodnej dv_∞/dp dla $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, $D = 0,016 \text{ m}$, $\rho_m = 1030 \text{ kg/m}^3$, $T = 288 \text{ K}$ okazuje się, że wynosi ona ok. $0,5315 \cdot 10^{-9}$ w zakresie zmian ciśnienia 48000-52000 Pa i jest niemal stała. Zmiana średnicy D nie zmienia tej relacji. Brak wrażliwości prędkości powietrza w rozważanym zadaniu związany jest z wartością gęstości mleka i gęstości powietrza. Gęstość mleka wynosi $\rho_m = 1030 \text{ kg/m}^3$ w temperaturze 288-293 K, podczas gdy gęstość powietrza w warunkach 288 K, $p = 101,3 \text{ kPa}$ wynosi $\rho_p = 1,225 \text{ kg/m}^3$. Wielkości te mają się jak 1000:1. To sprawia, że w zakresie spadków podciśnienia obserwowanych w dpm , a tym samym w zakresie zmian podciśnienia roboczego p_r , prędkość pęcherza v_∞ jest niemal stała.

Pozostałe wielkości określające v_∞ są wielkościami fizycznymi (σ , μ_m , R), które są znane i zgodnie z pracą Kupczyka [1999] przyjęte jako stałe: $\sigma = 0,0725 \text{ N/m}$, $\mu_m = 0,001030 \text{ Pa} \cdot \text{s}$, $R = 287 \text{ J/kg K}$ oraz $\xi = 0,5$, $\lambda = 0,03$. Powyższe wnioski pozwoliły zastąpić w równaniu Bernoulliego:

$$\Delta p_{kol} = (1 - \alpha_{pdpm}) \rho_m g H + (1 - \alpha_{pdpm}) \lambda \rho_m \frac{l_{dpm}}{D} \frac{u_M^2}{2} + (1 - \alpha_{pdpm}) \xi \rho_m \frac{u_M^2}{2}$$

opisującym spadki podciśnienia wielkość v_∞ wartością c , stałą dla ustalonej średnicy. Spadek podciśnienia Δp_{kol} występuje w czynnikach:

$$u_M = u_m + u_p = \frac{Q_m}{A_{dpm}} + \frac{Q_p}{A_{dpm}} \frac{\rho_N}{\rho},$$

$$\alpha_{pdpm} = \frac{u_p}{1,2u_M + v_\infty},$$

przy czym $p = p_r + \frac{\Delta p_{kol}}{2}$.

Oznaczając $\Delta p_{kol} = x$, równanie spadku podciśnienia można sprowadzić do wielomianu czwartego stopnia względem Δp_{kol} :

$$W(x) = w_{x4} x^4 + w_{x3} x^3 + w_{x2} x^2 + w_{x1} x + w_w,$$

którego miejsca zerowe $w_{x4} x^4 + w_{x3} x^3 + w_{x2} x^2 + w_{x1} x + w_w = 0$ są poszukiwanymi spadkami podciśnienia.

Przyjmując oznaczenia:

$$\begin{aligned}
 a &= (Q_p * 100000 / Adpm) * 2.778 * 10^{-4}, & c &= v_{\infty}, \\
 b &= (Q_m / Adpm) * 1.6667 * 10^{-5}, & d &= pr, \\
 e &= \rho_m * g * H, & f &= \lambda * \rho_m / 2 * Idpm / D, \\
 g &= \xi * \rho_m / 2, & h &= c / 2 + 0.6 * b, \\
 i &= 1.2 * (b * d + a) + c * d - a
 \end{aligned}$$

odpowiednie czynniki równania Bernoulliego wynoszą:

$$\begin{aligned}
 1 - \alpha_{pdpm} &= \frac{i + xh}{i + a + xa}, \\
 u_M^2 &= b^2 + \frac{2ab}{d + 0,5x} + \frac{a^2}{(d + 0,5x)^2}.
 \end{aligned}$$

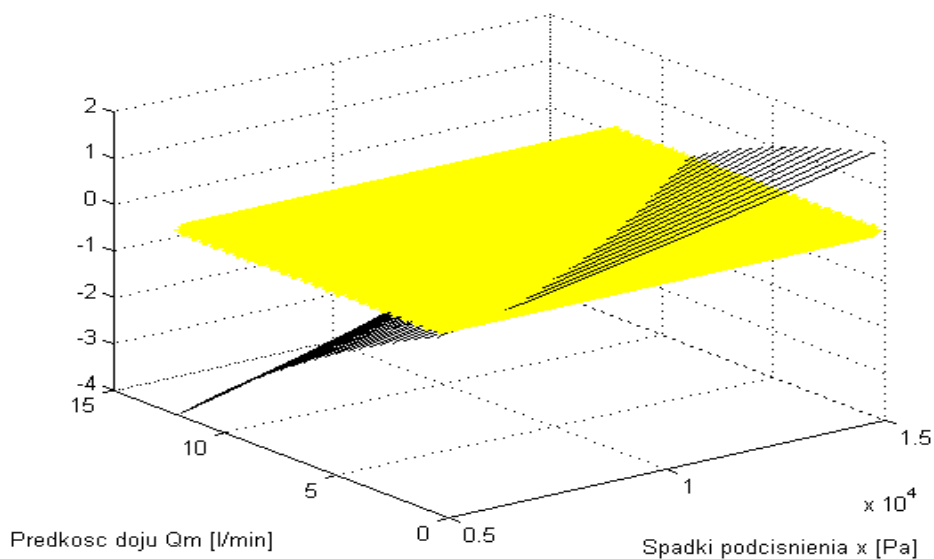
Natomiast przykładowe współczynniki wielomianu przyjmują postać:

$$\begin{aligned}
 w_{x4} &= (3/20 * b + 1/8 * c), \\
 w_{x3} &= ((3/5 * b + 1/2 * c) * (1/4 * e + 1/4 * (f + g) * b^2 + 3/10 * b * pr + 1/4 * c * pr \\
 &\quad + 3/10 * a + (3/5 * b + 1/2 * c) * pr).
 \end{aligned}$$

Wyniki analizy wartości wielomianu upraszczającego model

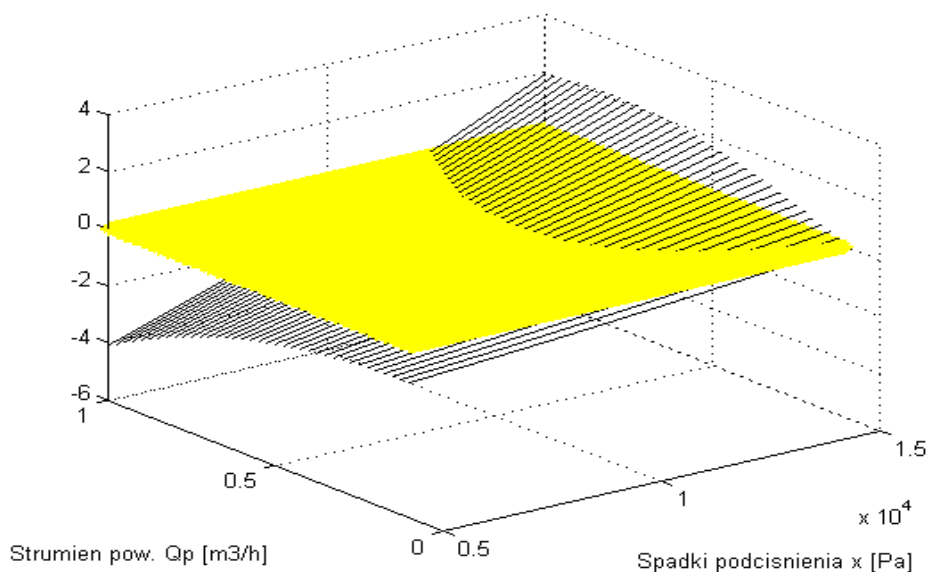
W prezentowanych dalej obliczeniach zostały przyjęte wielkości fizyczne zgodnie z pracą Kupczyka [1999]. Na rysunkach 1 i 2 przedstawione są wartości wielomianu $W(x)$ w funkcji wartości Q_m (przy $Q_p = 0,3 \text{ m}^3/\text{h}$) oraz Q_p (przy $Q_m = 5 \text{ l/min}$) odpowiednio, dla $D = 0,016 \text{ m}$, $H = 1,9 \text{ m}$.

Przekrój otrzymanych powierzchni płaszczyzną $W = 0$ daje obraz zależności spadku podciśnienia w funkcji Q_m (rys.1) i w funkcji Q_p (rys. 2). Otrzymane krzywe są przedstawione na wykresach dwuwymiarowych (rys. 3, 4).



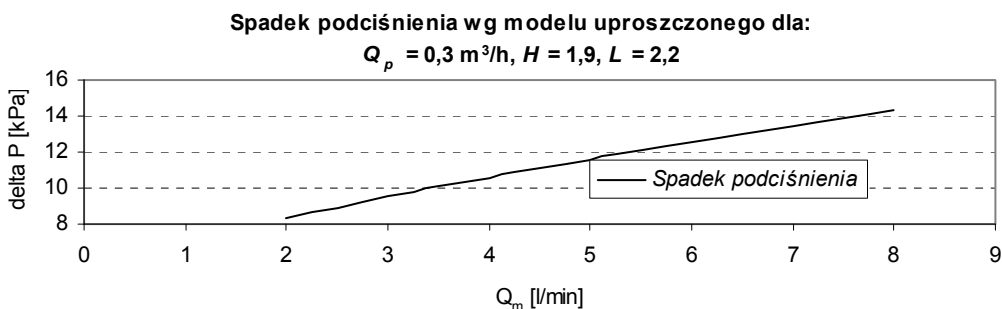
Rys. 1. Wpływ zmiany strumienia mleka Q_m na wartości wielomianu $W(x)$ przy ustalonym strumieniu powietrza $Q_p = 0,3 \text{ m}^3/\text{h}$

Fig. 1. Effect of the milk stream Q_m changes on polynomial value $W(x)$ at steady air stream $Q_p = 0.3 \text{ (m}^3/\text{h)}$

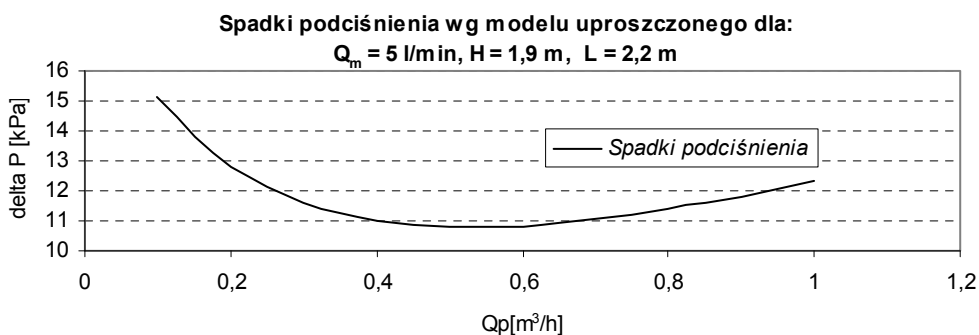


Rys. 2. Wpływ zmiany strumienia powietrza Q_p na wartości wielomianu $W(x)$ przy ustalonym strumieniu mleka $Q_m = 5 \text{ l/min}$

Fig. 2. Effect of the air stream Q_p changes on the polynomial $X(x)$ value at steady milk stream $Q = 5 \text{ l/min}$



Rys. 3. Zależność spadków podciśnienia od strumienia mleka
 Fig.3. Dependence of vacuum pressure drops on the milk stream

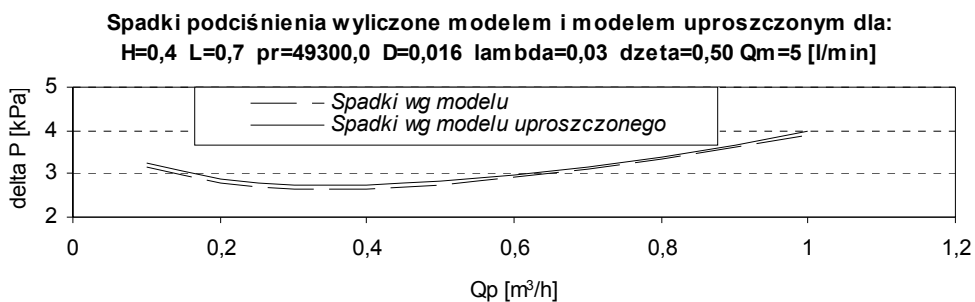


Rys. 4. Zależność spadków podciśnienia od strumienia powietrza dopuszczanego
 Fig. 4. Dependence of vacuum pressure drops on the stream of air flowing in

Wyniki weryfikacji modelu i modelu uproszczonego

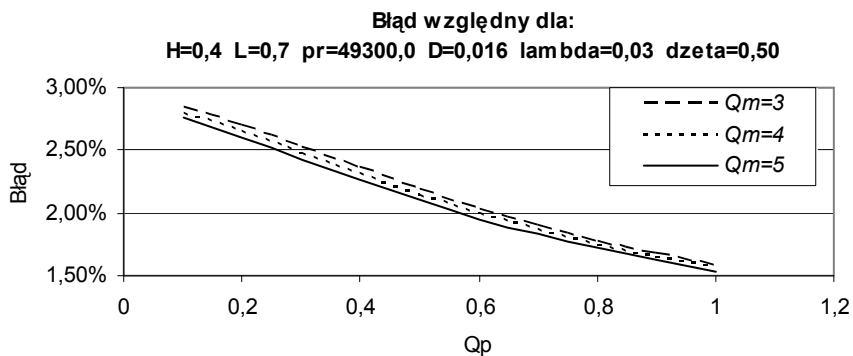
Porównane zostały spadki podciśnienia obliczone modelem i modelem uproszczonym. Błędy względne modelu uproszczonego i modelu, niezależnie od typu dojarki, prędkości doju oraz strumienia powietrza dopuszczanego, nie przekraczają 3%. Przykładowe wyniki porównania spadków podciśnienia wyliczonych modelem i modelem uproszczonym przedstawiają wykresy na rysunkach 5 i 6.

Porównanie modelu uproszczonego z danymi laboratoryjnymi wskazuje również na dużą zgodność modelu uproszczonego (rys. 7 i 8). Dane laboratoryjne zostały przyjęte na podstawie opracowania Szlachty i Wierciocha [1988] oraz pracy Kupczyka [1999]. Błąd średni bezwzględny tego porównania wynosi 0,03 kPa.



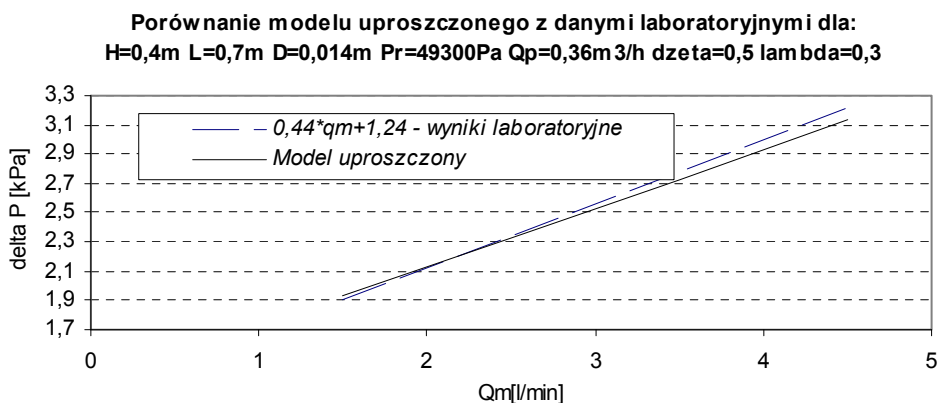
Rys. 5. Spadki podciśnienia w funkcji strumienia powietrza dopuszczanego - dojarka bańkowa

Fig. 5. Drops of vacuum pressure in function of air stream flowing in a bucket milking machine



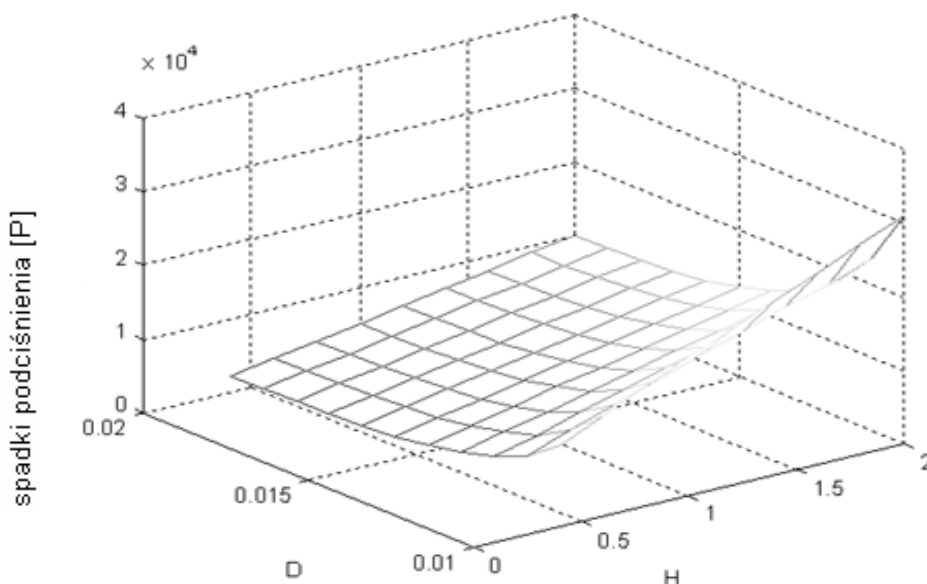
Rys. 6. Błędy względne spadków podciśnienia obliczonych modelem i modelem uproszczonym - dojarka bańkowa

Fig. 6. Relative errors of vacuum pressure drops calculated by model and simplified model - bucket milking machine



Rys. 7. Spadki podciśnienia obserwowane w laboratorium oraz wyliczone modelem uproszczonym - dojarka bańkowa

Fig. 7. Vacuum pressure drops observed in laboratory and computed by simplified model – bucket milking machine



Rys. 8. Powierzchnia wyobrażająca spadki podciśnienia w zależności od średnicy dpm oraz od wysokości podnoszenia cieczy

Fig. 8. The surface displaying vacuum pressure drops depending on the diameter of long milk pipeline and the lifting height of liquid

Wnioski

1. Równanie Bernoulliego o uproszczonej strukturze może być wygodnym narzędziem do analizy spadków podciśnienia przy różnych konfiguracjach parametrów pracy aparatu udojowego, np. wykres ilustrujący symulację spadków podciśnienia w funkcji wysokości podnoszenia cieczy i średnicy długiego przewodu mlecznego. Odpowiednie przekroje otrzymanej powierzchni przedstawiają zależność spadków podciśnienia od wysokości podnoszenia cieczy (niemal liniowy przebieg) oraz od średnicy długiego przewodu mlecznego (zależność nieliniowa).
2. Duża zgodność modelu i modelu o uproszczonej strukturze upoważnia do zastąpienia modelu modelem uproszczonym.
3. Model spadku podciśnienia będący warunkiem początkowym w modelu zmian ciśnienia w dojarce przedstawiony w pracy Iwaszko i in. [1996] może być zastąpiony modelem uproszczonym.

Bibliografia

Govier G., Aziz K. 1972. The flow of Complex Mixtures in Pipes. Van Nostrand Co.

- Iwaszko J., A. Kupczyk, J. Osiak. 1996. Analiza błędów obliczeń spadku podciśnienia w dojarce mechanicznej przy wykorzystaniu różnych cieczy mlekopodobnych. *Problemy Inżynierii Rolniczej*, 3(13)
- Juszka H. 1993. Dalsze badania podciśnienia ssania u cieląt. *Zeszyty Problemowe Postępów Nauk Rolniczych*, 410
- Kupczyk A. 1999. Doskonalenie warunków doju mechanicznego ze szczególnym uwzględnieniem podciśnienia w aparacie udojowym. Rozprawa hab. SGGW, Warszawa
- Nowak C. 1989. Analiza rozkładu ciśnienia wywieranego na strzyki krów dojonych mechanicznie. Rozprawa hab. AR, Kraków
- Orzechowski Z. 1999. Przepływy dwufazowe. PWN, Warszawa
- Szlachta J. 1991. Wpływ doju mechanicznego na powstawanie nowych infekcji mastitis. *Przegląd Hodowlany*, 4
- Szlachta J., Wiercioch M. 1988. Wpływ dojarek na jakość doju. IBMER, Warszawa OORIDR SITR
- Szlachta J. 1995. Problemy związane z pozyskiwaniem mleka przy doju mechanicznym. Materiały na konferencję. IBMER, Warszawa, ss. 40-54
- Tolle A. 1984. New developments in milking practices with a special view to udder health. 35-th Annual Meeting of the European Association for Animal Production, The Hague, 6-9
- Walden H. 1978. *Mechanika płynów*. Wyd. PW
- Woyke W. i in. 1993. Wpływ parametrów pracy dojarek mechanicznych na tkanki stryków. *Zeszyty Problemowe Postępów Nauk Rolniczych*, 410: 93-98

Recenzent: Józef Szlachta