MODELOWANIE DYNAMIKI MASZYN Z ZASTOSOWANIEM METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Jerzy OSIŃSKI
Politechnika Warszawska, Instytut Podstaw Budowy Maszyn, ul. Narbutta 84, 02-524 Warszawa, tel. 660-82-55, fax. 660-86-22
e-mail: josinski@ipbm.simr.pw.edu.pl

Wstęp

Metoda Elementów Skończonych posiada wiele zalet, dzięki którym jest powszechnie stosowana w problemach dynamiki maszyn. Przede wszystkim umożliwia obliczanie dużych układów. W wielu przypadkach dużych obiektów, takich jak: nadwozia samochodów, kadłuby lotnicze i okrętowe jest jedyną metodą umożliwiającą tego rodzaju analizy. Ważną zaletą MES jest fakt, że warunki brzegowe są opisane równaniami algebraicznymi, a nie różniczkowymi, co znacznie upraszcza opis. Ważna jest także możliwość wprowadzenia w jednym systemie różnych obciążeń, np. mechanicznych i cieplnych oraz uwzględnienie różnych właściwości materiałów: lepkosprężystych, plastycznych, analiza struktur kompozytowych.

Początkiem analizy dynamiki jest rozwiązanie zagadnienia własnego – wyznaczenie częstości i pstaci drgań. Drugim podstawowym zadaniem jest numeryczne rozwiązywanie równań ruchu. W przypadku układu liniowego opisanego równaniem:

$$\underline{M}\underline{\ddot{x}} + \underline{C}\underline{\dot{x}} + \underline{K}\underline{x} = \underline{Q}(t) \qquad (1)$$

możliwe jest rozwiązanie bardzo dużych układów. Korzystając z profesjonalnych systemów MES można więc rozwiązać w zasadzie każde zadanie tego rodzaju. Trudności występują w przypadku konieczności uwzględnienia nieliniowych i zmiennych w czasie zależności.

Problemem jest także opis właściwości dysypacyjnych w układach o większym poziomie tłumienia, np. w strukturach warstwowych, kompozytowych, elementach maszyn z tworzyw sztucznych. Metody do tego rodzaju zastosowań są rozwijane w wielu ośrodkach naukowo-badawczych, między innymi w Instytucie Podstaw Budowy Maszyn Politechniki Warszawskiej, w zespole pod kierownictwem autora niniejszego referatu. W dalszej części pracy zostanie przedstawione skrótowe omówienie wyników tych prac.

1. Zagadnienia własne

W przypadku układu liniowego bez tłumienia:

$$\underline{M}\underline{\ddot{x}} + \underline{K}\underline{x} = 0 \qquad (2)$$

potrzebne jest rozwiązanie zagadnienia własnego z macierzą symetryczną. Stosowane algorytmy [1], [2], [3] umożliwiają rozwiązanie dużych zadań – wyznaczana jest pewna liczba najniższych częstości własnych. Z największą dokładnością jest wyznaczana najniższa częstość własna, kolejno wyższe – z mniejszą. W przypadku układu z tłumieniem konieczne jest rozwiązanie zagadnienia własnego z macierzą niesymetryczną (wynikami są zespolone wartości własne i postacie drgań). Opracowane dotychczas algorytmy rozwiązywania tego rodzaju zadań są mało efektywne i nie są stosowane w systemach MES. Chętnie są natomiast stosowane szczególne rodzaje tłumienia umożliwiające rozprzęganie równań (zapis we współrzędnych normalnych), w szczególności tłumienie proporcjonalne:

$$\underline{C} = \mu \underline{M} + \xi \underline{K} \qquad (3)$$

gdzie: μ i ξ są współczynnikami proporcjonalności. Drugą możliwością jest tłumienie modalne [2] – przyjęcie założenia, że postacie drgań są niezależne od tłumienia i przyjęcie współczynników tłumienia oddzielnie dla każdej postaci drgań. Podejście takie jest wystarczające w przypadku układów o małym poziomie tłumienia. W przypadku bezpośredniego numerycznego rozwiązywania równań ruchu macierz tłumienia może być dowolna, czas obliczeń będzie jednak znacznie dłuższy.

2. Układy nieliniowe

Systemy MES posiadają możliwość wprowadzenia różnego rodzaju nieliniowości [4]: fizycznych wynikających z właściwości materiału (plastyczność, pełzanie) i geometrycznych (duże odkształcenia, wyboczenia). W wielu przypadkach, np. w zagadnieniach kontaktowych, występuje jednocześnie nieliniowość fizyczna i geometryczna. Do tworzenia opisu nieliniowego można również wykorzystać możliwość wprowadzenia opisu funkcji określającej zależność właściwości materiałowych od np. przemieszczenia lub naprężenia. Przykładowo analiza ściskania cieczy w pomiarowym mieszku hydraulicznym (opisana w rozprawie doktorskiej [5]) wymagała zapisania modułu Younga jako funkcji naprężenia (ciśnienia w mieszku). Ze znanych autorowi systemów MES możliwość taka istnieje w systemie ANSYS, który zastosowano do tej analizy [5]. Zależność pomiędzy modułem Younga a ciśnieniem aproksymowano wielomianem korzystając z wyników badań wykonanych w Instytucie Technologii Eksploatacji w Radomiu. Możliwości wprowadzenia opisu funkcyjnego, w którą są wyposażone systemy MES są ograniczone i nie wszystkie praktycznie ważne układy mogą być opisane (np. charakterystyka układów z luzem). Układy nieliniowe wymagają zastosowania numerycznego rozwiązywania równań ruchu, co znacznie przedłuża czas obliczeń i zwiększa ich koszty. Z tego względu opracowano dla potrzeb MES sposób szybkiego rozwiązywania równań ruchu – metodę Neumarka-Wilsona, opisaną między innymi w monografii [2]. Jest to metoda drugiego rzędu (aproksymująca rozwiązanie krzywą drugiego rzędu) i nie zawsze jest dostatecznie dokładna. Wprowadzane są dodatkowe współczynniki zwiększające zbieżność metody.

3. Modelowanie układów dyskretno - ciągłych

Z powodu ograniczeń omówionych w poprzednim rozdziale rozwijano sposoby umożliwiające prostszą analizę złożonych układów. Do zastosowań w budowie maszyn wygodna jest metoda modelowania układów dyskretno - ciągłych. Zakłada się, że układ jest złożony z szeregu części ciągłych i dyskretnych. Części ciągłe są modelowane z zastosowaniem MES, a następnie jest rozwiązywane zagadnienie własne każdej z tych części. Wykorzystywane jest przekształcenie do współrzędnych quasi-normalnych, złożonych ze współrzędnych fizycznych części dyskretnych i normalnych części ciągłych. Otrzymany układ równań można znacznie uprościć pomijając część równań odpowiadających wyższym częstościom. Sposób ten jest użyteczny, jeśli części ciągłe są liniowe, a nieliniowości występują wyłącznie w częściach dyskretnych, ułatwia to opis właściwości np. podpór łożyskowych, luzów międzyzębnych, itp. Ważnym zastosowaniem tej metody była analiza dynamiki przekładni zębatych. W modelu dyskretno-ciągłym przedstawionym w rozprawie doktorskiej [6] wały maszynowe traktowane są jako ciągłe, a jako dyskretne – zazębienie i podpory w łożyskach. Przyjęto bardzo rozbudowany nieliniowy i zmienny w czasie opis właściwości uzębień, uwzględniając: odchyłki wykonawcze, luzy międzyzębne, ugięcia zębów pod obciążeniem i nieprawidłowe wejście w przypór. Wykorzystano w tej pracy model dynamiczny zazębienia opracowany przez L. Müllera [7]. Zbadano wpływ różnych parametrów, takich jak: sztywność giętna i skrętna wałów, sztywność łożysk na przeciążenia dynamiczne w przekładni. Opisano także zależności w przypadku jednoczesnego występowania drgań parametrycznych i wymuszonych [8]. Wyznaczono podstawowe częstości generowane podczas pracy przekładni. Stwierdzono, że w przekładni z małymi kołami zębatymi (np. w przypadku zębnika nacinanego na wałku) masa wału jest znacznie większa od masy koła i wówczas do oceny przeciążeń dynamicznych konieczne jest zastosowanie modelu dyskretno - ciągłego z rozłożoną masą wału. Zbadano także reduktor wielostopniowy, w którym decydujące znaczenie ma sprzężenie pomiędzy stopniami przekładni. W obu wymienionych powyżej przypadkach wyniki oceny przeciążeń dynamicznych znacznie odbiegają od uzyskanych z analizy modelu przekładni izolowanej (przyjmowanego w obowiązujących ustaleniach normalizacyjnych dotyczących obliczania przekładni zębatych – w normie ISO 6336). Sposób wyboru odpowiedniego modelu do obliczeń wytrzymałościowych przekładni zębatych zaproponowano w pracy [9]. Zbadano także specyficzne dla przekładni zębatej zjawisko ratlingu (grzechotania) – zwiększonego poziomu drgań w przekładni pracującej bez obciążenia. W pracy [8] do zbadania tego zjawiska wykorzystano zmodyfikowany model L. Müllera umożliwiający zazębienie po obu stronach zęba. Metodę wykorzystano do oceny błędu dynamicznego w przekładni pracującej pod obciążeniem z uwzględnieniem różnego stopnia zużycia zębów przekładni [11]. Dalszym zastosowaniem było wykorzystanie tej pracy do diagnostyki przekładni zębatych [12], gdzie wyniki obliczeń porównywano z doświadczalnymi. Szereg innych przykładów drgań parametrycznych w układach dyskretno - ciągłych przedstawiono w pracach: [3], [13], [14], [15]. W pracy [11] zbadano warunki występowania rezonansów parametrycznych w układach dyskretno - ciągłych poddanych stałemu obciążeniu. Wyznaczono warunki graniczne (maksymalne współczynniki tłumienia) występowania niestatecznych rezonansów parametrycznych, w szczególności rezonansów kombinowanych (częstość wzbudzenia parametrycznego odpowiadająca wielokrotnościom sumy lub różnicy częstości własnych układu). Zbadano charakter dodatkowej rodziny drgań parametrycznych występującej jedynie w układach z obciążeniem, stwierdzając, że drgania tego rodzaju występują także w układach z dużym tłumieniem. Zbadano także nieliniowy układ z luzem i wzbudzeniem parametrycznym. W pracy [12] zbadano możliwość występowania w układach ze wzbudzeniem parametrycznym szczególnych zjawisk takich jak: bifurkacja i ruch chaotyczny. Stwierdzono, że zjawiska te mogą występować w przypadku bardzo małych wartości tłumienia lub dużych prędkości wzbudzenia parametrycznego (nie mają więc praktycznego znaczenia). Zbadano również tłumienie krytyczne eliminujące niestateczny rezonans parametryczny oraz przykład drgań parametrycznych wywołanych zmiennym momentem bezwładności (drgania turbiny wiatrowej).

4. Modelowanie ruchu mechanizmów z członami podatnymi

Dzięki zastosowaniu w jednym systemie sztywnych i odkształcalnych elementów skończonych – powstał uniwersalny program umożliwiający ocenę wpływu podatności członów na dokładność i porównanie z ruchem mechanizmu nieodkształcalnego. Zbadano także inne problemy: drgania parametryczne wywołane zmiennym momentem bezwładności, wpływ tłumienia występującego w mechanizmie oraz sposób sterowania.

Metodę Elementów Skończonych zastosowano także do modelowania dynamiki mechanizmów z odkształcalnymi członami [16], [17], [18] co umożliwiło ocenę wpływu drgań parametrycznych na obniżenie dokładności kinematycznej mechanizmu.

5. Modelowanie tłumienia

W analizie struktur warstwowych stosowanych do tłumienia drgań: kompozytach przekładkowych i zbudowanych z warstw o różnej orientacji włókien opis tłumienia w postaci (3) jest niewystarczający. W pracy [20] zaproponowano nowy opis, w którym przyjęto, że w każdej stałej sprężystej elementu ortotropowego (w układzie trójwymiarowym jest to 9 niezależnych stałych) odpowiada niezależny współczynnik tłumienia. Z wykorzystaniem funkcji kształtu elementów skończonych macierz tłumienia tworzy się analogicznie jak macierz sztywności. Opracowany sposób opisu wykorzystano do analizy różnych przypadków drgań w układach parametrycznych i nieliniowych z tłumieniem w strukturze kompozytowej. W pracy [21] omówiono sposób modelowania właściwości tłumiących w strukturze przekładkowej (dwie warstwy metalowe z warstwą tworzywa tłumiącego drgania w środku), wykorzystywanej do wibroizolacji. W pracy [22] przedstawiono metodę wyboru rodzaju elementu skończonego do modelowania elementów kompozytowych. W obliczeniach wykorzystano system MES – ADINA.

Ciekawym i trudnym w analizie jest zjawisko tłumienia drgań wywołane mikropoślizgami sprężystymi w połączeniach nieruchomych nazywane tarciem konstrukcyjnym [25]. Zastosowanie MES [26] umożliwiło analizę bez przyjmowania szeregu założeń upraszczających, takich jak jednowymiarowy stan naprężeń. Pętle histerezy będące miarą rozpraszania energii zostały wyznaczone znacznie dokładniej [26]. Wyznaczono zakresy wymiarów połączeń, przy których konieczne jest stosowanie MES. W analizie zagadnienia kontaktowego wykorzystano metodę macierzy wrażliwości.

6. Podsumowanie

Metoda Elementów Skończonych jest bardzo użyteczna w analizie problemów dynamiki maszyn. Podstawowe zadanie liniowe – wyznaczanie częstości i postaci drgań można rozwiązać praktycznie dla każdego, dowolnie dużego obiektu. Trudności występują w analizie zagadnień nieliniowych. Pomocą może być tu sposób modelowania układów dyskretno-ciągłych. Wyniki obliczeń problemów omówionych powyżej są bardzo obszerne w stosunku do ograniczonej objętości pracy. W związku z powyższym zostaną przedstawione podczas seminarium.

7. Literatura

1. Bathe K. J., Wilson E. L.: Numerical methods in finite element analysis, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1982.
2. Kruszewski J. i inni: Metoda elementów skończonych w dynamice konstrukcji, Arkady, Warszawa 1984.
3. [3] Osiński J.: Drgania parametryczne tłumionych układów dyskretno-ciągłych, Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, s. Mechanika, z. 129, Warszawa 1989.
4. [4] Osiński J.: Obliczenia wytrzymałościowe elementów maszyn z zastosowaniem metody elementów skończonych, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1997.
5. [5] Zbrowski A.: Modelowanie elementów pomiarowych z uwzględnieniem lepkosprężystości z użyciem MES, Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, Warszawa 2000.
6. [6] Krupa A., – Współzależność drgań parametrycznych i wymuszonych w układzie z przekładnią zębatą, Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, Warszawa 1995.
7. [7] Müller L.: Przekładnie zębate – projektowanie, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1979.
8. [8] Krupa A., Osiński J.: Zależność między drganiami parametrycznymi i wymuszonymi w dyskretno-ciągłym układzie dynamicznym, Prace Instytutu Podstaw Budowy Maszyn Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1996, z. 17, s. 19-29.
9. [9] Osiński J.: Wybór modelu dynamicznego dla analizy obciążeń w przekładni zębatej, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, Warszawa 1991, 3-4, 29, s. 621-633.
10. [10] Krupa A., Osiński J.: Dynamic Overload Level and Rattling Phenomenon Investigation in

a System with Gears, Machine Dynamics Problems, Warszawa 1997, vol. 18, pp. 57-70.
11. Freundlich J., Krupa A., Osiński J.: Evaluation of dynamical errors in gearboxes, Challenges to civil and mechanical engineering in 2000 and beyond, Wrocław 1997.
12. Krupa A., Osiński J., Tomaszewski J.: Dynamical Properties of a Gear with Damaged (Worn-Out) Teeth, XIII Polish Conference on Computer Methods in Mechanics, Poznań 1997, vol. 2, pp. 677-682.
13. Dyk J., Krupa A., Osiński J.: Dynamics of Complex Systems with Gears, EUROMECH – 2nd European Nonlinear Oscillations Conference, Praga 1996, vol. 3, pp. 71-74.
14. Osiński J.: Modelling and Analysis of Vibration of Discrete-Continuous Systems with Parametric Excitation under Constant Load, Machine Dynamics Problems, Warszawa ? pp. 221-246.
15. Osiński J.: Parametric Vibration of Nonlinear Systems, Nonlinear Vibration Problems, Warszawa 1993, No. 25, pp. 335-350.
16. Hać M.: Dynamic analysis of flexible mechanisms by finite element method – monograph issue, Machine Dynamics Problems, Warszawa 1996, vol. 14.
17. Hać M., Osiński J.: Finite Element Formulation of Rigid Body Motion in Dynamic Analysis of Mechanisms, Computers & Structures, 1995, vol. 57, No. 2, pp. 213-217.
18. Hać M., Osiński J.: Nonlinearitiy in the Finite Element Analysis of Flexible Mechanisms, EUROMECH – 2nd European Nonlinear Oscillations Conference, Praga 1996, vol. 2, pp. 71-74.
19. Hać M., Osiński J.: Analiza dokładności ruchu mechanizmów z członami podatnymi z zastosowaniem MES, V Konferencja „Układy dynamiczne – teoria i zastosowania", Łódź 1999, s. 211-214.
20. Freundlich J.: „Modelowanie tłumienia struktur warstwowych z zastosowaniem MES", Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, Warszawa 1995.
21. Freundlich J., Osiński J.: Modelling of damping in vibration of a machine base made of laminated elements, Machine Dynamics Problems, Warszawa 1994, vol. 9, pp. 33-42.
22. Freundlich J., Osiński J.: Investigation of Finite Elements Usability to Modelling of Layered Structures Dynamics, Machine Dynamics Problems, Warszawa 1999, vol. 23, No. 4, pp. 7-24.
23. Praca zbiorowa pod redakcją Osińskiego Z.: Tłumienie drgań, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1997, Damping of Vibrations. A.A. Balkema, Rotterdam/Brookfield, 1998.
24. Sztwiertnia A.: Modelowanie nieliniowych zagadnień kontaktowych w budowie maszyn, Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, Warszawa 1995.
25. Osiński J., Sztwiertnia A.: On the design of interferenced and clamped joints under general state of stress. Mechanika Teoretyczna i Stosowana, Warszawa 1995, 4, 33, pp. 825-842.
26. Osiński J., Sztwiertnia A.: Modelling of nonlinear contact problems by means of sensitivity matrix method, Machine Dynamics Problems, Warszawa 1994, vol. 9, pp. 71 – 82.