

## MODELOWANIE DRGAŃ WĘZŁA ŁOŻYSKOWEGO

Janina KOWALAK

Politechnika Poznańska, Instytut Mechaniki Stosowanej  
Zakład Dynamiki i Wibroakustyki Systemów  
ul. Piotrowo 3, 60-965 Poznań, tel. (061) 665 23 02, fax. (061) 665 23 07  
e-mail : [Janina.Kowalak@put.poznan.pl](mailto:Janina.Kowalak@put.poznan.pl)

### 1. Wprowadzenie.

Jednym z problemów badawczych referowanych na seminariach prowadzonych przez prof. Czesława Cempla był problem pt. Opracowanie metod i koncepcji układów pomiarowych do oceny stanu dynamicznego łożysk.

Z problemem tym zwróciło się do prof. Czesława Cempla w końcu lat 70-tych ówczesne Zjednoczenie Przemysłu Łożyskowego, któremu odbiorcy zarzucali złą jakość wykonania łożysk. Zarzut postawiony przez odbiorców wynikał z braku odpowiednich metod i układów pomiarowych, które producentom łożysk pozwoliłyby na klasyfikację łożysk (w ramach danego typu) w zależności od jakości ich wykonania tzn. pozwoliłyby na wybór z partii wykonanych łożysk grupy łożysk, która byłaby prawie jednakowa ze względu na ich wykonanie.

Wynikiem realizacji kierowanego przez prof. Czesława Cempla wspomnianego tematu było:

- 1) Uściślenie przez przemysł łożyskowy norm, które określały kryteria podziału łożysk (danego typu) na klasy co pozwoliło odbiorcom otrzymywać łożyska, w ramach danego typu, prawie takie same ze względu na ich wykonanie.
- 2) Poszerzenie przez zespół realizujący temat wiadomości z dziedziny łożysk tocznych, które zostały przekazane:
  - Uczestnikom IV Szkoły Diagnostyki Maszyn (Diagnostyka łożysk tocznych) organizowanej przez Polską Akademię Nauk, Instytut Podstawowych Problemów Techniki, Zespół Diagnostyki Maszyn Komitetu Budowy Maszyn [1].
  - Służbom dozoru technicznego Kopalni Węgla Brunatnego okręgu Konin, Elektrowni i Elektrociepłowni Okręgu Zachodniego
  - Słuchaczom Studiów Podyplomowych z „Drganowej Diagnostyki Maszyn”

Opracowanie metod umożliwiających dostarczenie odbiorcom otrzymanych takich samych łożysk z uwagi na ich jakość wykonania pozwoliło na prowadzenie dalszych badań laboratoryjnych i eksploatacyjnych.

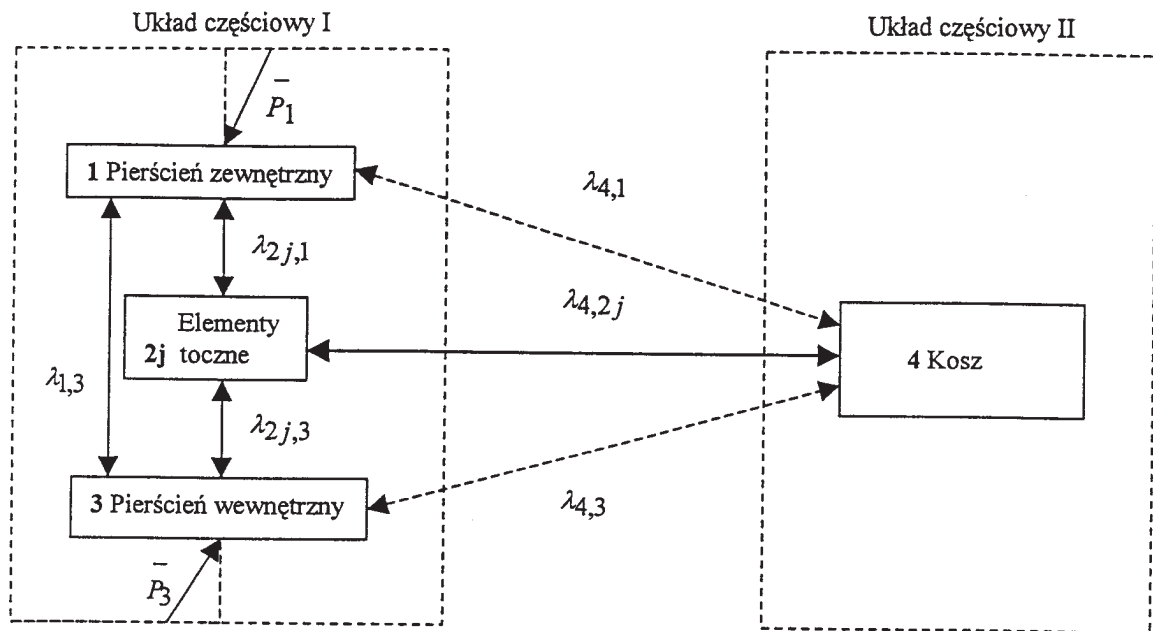
Z badań tych wynikało, że łożyska tej samej klasy pracujące niemalże w tych samych warunkach eksploatacyjnych wykazują różną trwałość. Tak więc należy przypuszczać, że na czas bezawaryjnej pracy węzła łożyskowego wpływają elementy współpracujące z łożyskiem co w dalszych badaniach należy uwzględnić. Prowadzenie tego typu badań w warunkach laboratoryjnych i eksploatacyjnych jest jednak bardzo kosztowne i czasochłonne. Z tej też przyczyny badania tego typu zastępuje się dzisiaj badaniami symulacyjnymi. Badania symulacyjne przeprowadza się na modelach matematycznych. Stąd też niezbędne jest przeprowadzenie wnikliwej analizy, a następnie budowy modelu fizycznego węzła łożyskowego na podstawie, którego zostanie zbudowany model matematyczny.

### 2. Model fizyczny.

Węzeł łożyskowy jest prostym zespołem konstrukcyjnym składającym się z gniazda łożyskowego, łożyska (pierścieni zewnętrzny i wewnętrzny, elementy toczne, kosz) i końcówki wału.

W węźle łożyskowym stosuje się różnego typu łożyska. Jednakże różnice konstrukcyjne między typami łożysk ujawniają się we wzajemnym oddziaływaniu elementów łożyska, przy czym przez pojęcie „oddziaływanie” należy rozumieć wpływ parametrów określających stan jednego elementu na parametry określające stan elementów pozostałych. Model fizyczny węzła łożyskowego składa się z  $5+j$  brył (gdzie  $j$  – liczba elementów tocznych) powiązanych między sobą wewnętrznymi oddziaływaniami  $\lambda_{ji}$  (rys.1).

Liniami ciągłymi zaznaczone zostały na rysunku 1 oddziaływania wewnętrzne, które występują w łożyskach otwartych, natomiast liniami przerywanymi zaznaczono dodatkowe oddziaływania, które występują w łożyskach zakrytych. Te dodatkowe oddziaływania występują w przypadku łożysk zakrytych i są przenoszone poprzez czynnik smarujący wypełniający łożyska, natomiast wzajemne oddziaływania pierścieni są przenoszone poprzez elementy zamykające łożysko.



Rys. 1. Schemat oddziaływań węzła łożyskowego

W pierwszym przybliżeniu uwzględnimy tylko te oddziaływania, które są realizowane na drodze bezpośredniego kontaktu elementów. Poza tym w przypadku łożysk małych i średnich gabarytów postuluje się słabe sprzężenie pomiędzy koszem, a elementami tocznymi i do dalszej analizy przyjmuje się układ częściowy I.

Przy odpowiednim zamocowaniu łożyska w gnieździe łożyskowym pierścień zewnętrzny wykonuje jedynie poprzeczny ruch postępowy (ruch w płaszczyźnie łożyska).

Przy takim założeniu rozpatrzmy ruch wszystkich elementów łożyska jako ruch złożony, w którym wspomniany ruch pierścienia zewnętrznego jest ruchem unoszenia.

### 3. Model matematyczny

Równania ruchu względnego wszystkich elementów łożyska wyprowadzimy we współrzędnych ruchomych. W tym ujęciu unoszenie jest niejako skutkiem ruchu względnego. Model matematyczny węzła łożyskowego przy następujących założeniach:

- materiały, z których wykonane są poszczególne elementy węzła łożyskowego są jednorodnie i liniowo sprężyste.
- oddziaływania elementów węzła łożyskowego mają pomijalny wpływ na wartość momentu bezwładności
- błędy geometryczne wykonania elementów węzła łożyskowego są na tyle małe, że nie wpływają na główne centralne momenty bez-

władności, a główne osie bezwładności obu pierścieni pokrywają się.

W celu wyprowadzenia równań ruchu łożyska z każdym elementem łożyska wiążemy nieruchomy względem niego układ kartezjański i nadajemy poszczególnym elementom dowolne przemieszczenie i obroty. Osie układów związanych z elementami łożyska stanowią ich główne, centralne osie bezwładności.

Tak więc położenie każdego elementu łożyska względem innego opisane będzie sześcioma współrzędnymi. Ogólne równania ruchu łożyska można wyznaczyć z równań Lagrange'a:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{r}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial r_i} + \frac{\partial V}{\partial r_i} = Q_i - R_i + B_i \quad (1)$$

gdzie:  $T$  i  $V$  oznaczają odpowiednio energię kinetyczną i potencjalną układu. Natomiast  $Q_i = Q_i(t)$  jest uogólnioną siłą zewnętrzną odpowiadającą uogólnionej współrzędnej  $r_i$ , skierowaną zgodnie z dodatnim zwrotem tej współrzędnej;  $R_i = R_i(t)$  jest uogólnioną siłą oporu odpowiadającą uogólnionej współrzędnej  $r_i$ ;  $B_i$  są siłami bezwładności w ruchu unoszenia odpowiadającymi uogólnionej współrzędnej  $r_i$ .

Kontakt między kulkami, a pierścieniami przyjmujemy jako połączenie Kelvina – Voigta, gdzie  $c_{1j}$  i  $c_{2j}$  są współczynnikami tłumienia, a  $k_{1j}$  i  $k_{2j}$  są współczynnikami sztywności [1].

W wyniku otrzymamy układ  $12+6j$  ( $j$  – liczba elementów tocznych) równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu nieliniowych, opisujących przestrzenny ruch łożyska.

Ze względu na różnorodność przyczyn wpływających na charakter oddziaływań postać energii potencjalnej będzie bardzo złożona, co w konsekwencji prowadzi do równań nieliniowych zależnych.

Dalsza analiza będzie prowadzona przy założeniach:

- ruch poszczególnych elementów odbywa się w płaszczyźnie łożyska,
- pierścień zewnętrzny nie wykonuje obrotów,
- na element toczny działa wyłącznie wymuszenie kinematyczne postaci:

$$z(t) = A \cos \dot{q}_{2j} t \quad (2)$$

- masa elementu tocznego jest pomijalna w stosunku do masy pierścienia,
- ruchy obrotowe elementów tocznych (współrzędne  $\dot{q}_{2j}$ ) i pierścienia wewnętrznego (współrzędne  $\dot{q}_3$ ) odbywają się dookoła osi prostopadłej do płaszczyzny łożyska
- pierścień wewnętrzny oprócz jednoczesnego ruchu obrotowego wykonuje przemieszczenie, które opisano [2]:

$$f(t) = B \cos \dot{q}_3 t + C \cos 2\dot{q}_3 t. \quad (3)$$

Przy powyższych założeniach wyprowadzono równanie opisujące drgania promieniowe pierścienia zewnętrznego postaci:

$$\begin{aligned} \ddot{p}_1 + \frac{c_{2j}}{M} \dot{p}_1 + \left( \frac{k_{2j}}{M} - \dot{q}_3 \right)^2 p_1 + \frac{k_{2j}}{M} (A \cdot \cos \dot{q}_{2j} t + \\ + B \cdot \cos \dot{q}_3 t + C \cdot \cos 2\dot{q}_3 t) + \\ + \frac{c_{2j}}{M} (A \cdot \dot{q}_{2j} \sin \dot{q}_{2j} t + B \cdot \dot{q}_3 \sin \dot{q}_3 t + \end{aligned}$$

$$+ C \cdot \dot{q}_3 \cdot \sin 2 \cdot \dot{q}_3 t) \quad (4)$$

gdzie  $p_1$  - promień pierścienia zewnętrznego

Dla drgań ustalonych rozwiązanie powyższego równania będzie postaci:

$$\begin{aligned} p_3 = L_1 \cos \dot{q}_{2j} t + L_2 \sin \dot{q}_{2j} t + L_3 \cos \dot{q}_3 t \\ + L_4 \cos \dot{q}_3 t + L_5 \cos 2\dot{q}_3 t + L_6 \sin 2\dot{q}_3 t \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie:

$$L_1 = \frac{\frac{k_{2j}}{M} \left[ \frac{k_{2j}}{M} - \dot{q}_3 - \dot{q}_{2j} \right] + \frac{c_{2j}}{M} \dot{q}_{2j}}{\left[ \frac{k_{2j}}{M} - \dot{q}_3 - \dot{q}_{2j} \right]^2 + \frac{c_{2j}}{M} \dot{q}_{2j}} A$$

$$L_2 = \frac{\frac{c_{2j}}{M} \dot{q}_{2j} \left( \frac{\dot{q}_3}{q_3} + \dot{q}_{2j} \right)}{\left( \frac{k_{2j}}{M} - \dot{q}_3 - \dot{q}_{2j} \right)^2 + \frac{c_{2j}}{M} \dot{q}_{2j}} A$$

$$L_3 = \frac{\frac{k_{2j}}{M} \left( \frac{k_{2j}}{M} - 2\dot{q}_3 \right) + \frac{c_{2j}}{M} \dot{q}_3}{\left( \frac{k_{2j}}{M} - 2\dot{q}_3 \right)^2 + \frac{c_{2j}}{M} \dot{q}_3} B$$

$$L_4 = \frac{2 \frac{c_{2j}}{M} \dot{q}_3^3}{\left( \frac{k_{2j}}{M} - 2\dot{q}_3 \right)^2 + \frac{c_{2j}}{M} \dot{q}_3} B$$

$$L_5 = \frac{\frac{k_{2j}}{M} \left( \frac{k_{2j}}{M} - 5 \cdot \dot{q}_3^2 \right) + \frac{c_{2j}}{M} \cdot 2 \cdot \dot{q}_3^2}{\left( \frac{k_{2j}}{M} - 5 \cdot \dot{q}_3^2 \right)^2 + \frac{c_{2j}}{M} \cdot 2 \cdot \dot{q}_3^2} \cdot C$$

$$L_6 = \frac{10 \cdot \frac{c_{2j}}{M} \dot{q}_3^3}{\left( \frac{k_{2j}}{M} - 5 \cdot \dot{q}_3^2 \right)^2 + \frac{c_{2j}}{M} \cdot 2 \cdot \dot{q}_3^2} \cdot C$$

#### 4. Podsumowanie

Przedstawiony w pracy model matematyczny jest ogólnym modelem węzła łożyskowego. Wykorzystanie go do badań symulacyjnych będzie możliwe po przeprowadzeniu identyfikacji jego parametrów, co będzie dalszym etapem pracy.

#### 5. Literatura

1. Zbigniew Osiński: Tłumienie drgań mechanicznych, PWN, Warszawa 1979
2. Janina Kowalak: Vibration of impaired shafts , VIBRATIONS IN PHYSICAL SYSTEMS XVIIIth SYMPOSIUM, Poznań-Błażejewko, Maj 27-30,1998