

NIEKTÓRE WŁASNOŚCI ACYKLICZNEJ CZĘŚCI 3-OPTYMALNEJ STRUKTURY OPINIOWANIA DIAGNOSTYCZNEGO

Roman KULESZA

Wojskowa Akademia Techniczna, Wydział Cybernetyki, Instytut Teleinformatyki i Automatyki
ul. Kaliskiego 2, 00-908 Warszawa; fax: 022-683-71-44

Streszczenie

Przedstawiono metodę przeliczania acyklicznej części 3-optimalnej struktury opiniowania diagnostycznego. Wyznaczono szereg przeliczający takie struktury, do rzędu ósmego.

Słowa kluczowe: struktura opiniowania diagnostycznego; przeliczanie; izomorfizm.

SOME PROPERTIES OF THE ACYCLIC COMPONENTS OF THE 3-OPTIMAL STRUCTURES FOR ONE-STEP DIAGNOSIS OF SYSTEM

Summary

The method of enumeration the acyclic components of the 3-optimal structures for one-step diagnosis of system is presented in this paper.

Keywords: structures for one-step diagnosis of system; enumeration; isomorphism.

1. WPROWADZENIE

Wiadomo [4]-[6], że każda składowa spójności, acyklicznej części 3-optimalnej struktury opiniowania diagnostycznego (OD), jest takim acyklicznym (w sensie dróg) digrafem (unigrafem zorientowanym) bez pętli D ($\|E\| \geq 4, E$ -zbiór węzłów digrafu D), że

$$[\forall e \in E : \Gamma^{-1}(e) \neq \emptyset] : \mu^{-}(e) = 3,$$

gdzie $\mu^{-}(e)$ oznacza stopień wejściowy węzła e (np.-liczbę komputerów sieci komputerowej, które testują komputer e).

Węzły zbioru E^{-} ($E^{-} = \{e \in E : \Gamma^{-1}(e) = \emptyset\}$) nazywamy *źródłami*, a węzły zbioru

E^{+} ($E^{+} = \{e \in E : \Gamma(e) = \emptyset\}$) -*ściekami* (struktury D), przy czym, jeżeli 3-optimalna struktura OD, ma część acykliczną, to jej źródła zagnieżdżone są w składowej silnej spójności S , tej struktury oraz $E^{+} \neq \emptyset$ (rys. 1).

Zauważmy, że jeżeli $E^{+} \neq \emptyset$, to $\exists e \in E \setminus E^{-} : \|\{\Gamma^{-1}(e)\} \cap E^{-}\| = 3$ bowiem w przeciwnym razie, digraf D nie byłby digrafem acyklicznym.

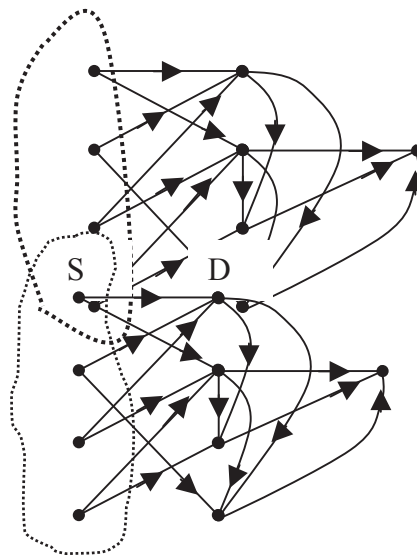
Dalej, będziemy rozpatrywać takie digrafy D , których podgraf $\langle \Gamma(E^{-}) \rangle_D$ jest grafem spójnym.

Wykażemy, że szereg przeliczający struktury D , ma postać:

$$D(x) = x^4 + x^5 + 9x^6 + 80x^7 + 1422x^8 + \dots \quad (1)$$

Zaproponowana w artykule, metoda wyznaczenia zależności (1), polega na indukowaniu

(generowaniu) zbiorów niepodobnych struktur D (określonego rzędu), przez sklejanie węzłów o jednakowych wagach $\nu(e)$ ($\nu(e) = \mu^{-}(e)$, $e \in \Gamma(E^{-})$), digrafów opisanych $C(D)$ i $B(D)$, które są (odpowiednio) podgrafami $\langle E^{-} \cup \Gamma(E^{-}) \rangle_D$ i $\langle E \setminus E^{-} \rangle_D$ o ważonych węzłach, przy czym multizbiór $\{\nu(e) : e \in \Gamma(E^{-})\}$ będzie pełnić rolę kanonicznego reprezentanta klasy podobieństwa struktur D (rys. 2).



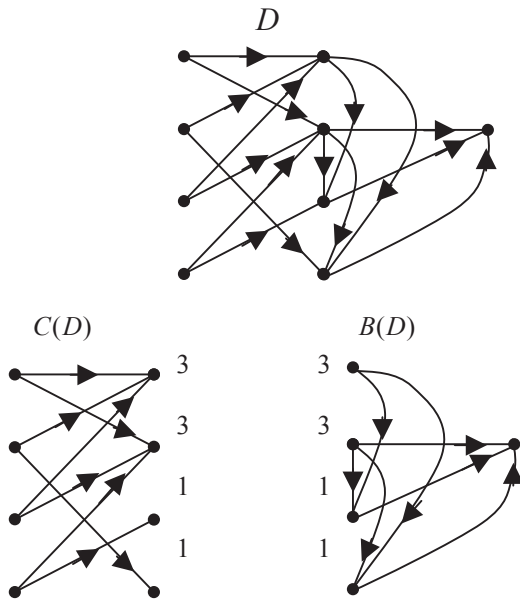
Rys. 1. Przykład acyklicznej części 3-optimalnej struktury OD (digraf D) rzędu dziewiątego o czterech źródłach i jednym ścieku

Kanoniczny reprezentant klasy podobieństwa struktur D , będziemy (również) przedstawiać w postaci wektora:

$$\nu = (\nu_1, \dots, \nu_r), \nu_1 \geq \dots \geq \nu_r, r = \|\Gamma(E^-(D))\|.$$

Niech $C(\alpha, \nu)$ oznacza zbiór grafów prostych (dwupodzielnych digrafów bez pętli) o α ($3 \leq \alpha \leq \nu_1 + \dots + \nu_r$) źródłach i takich r ścieżkach, oznaczonych wagami ze zbioru $\{\nu_1, \dots, \nu_r\}$, że $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_r)$, a $B(k, \nu)$ ($k \geq r$) - zbiór takich, spójnych digrafów acyklicznych rzędu k , również o r węzłach oznaczonych wagami ze zbioru $\{\nu_1, \dots, \nu_r\}$, że podgraf zawierający węzły wazone, jest grafem spójnym oraz stopień wejściowy węzła o wadze ν' ($\nu' \in \{\nu_1, \dots, \nu_r\}$) równa się $3 - \nu'$, a węzłów bez wag-trzy.

Różne sposoby scalenia grafu G' ($G' \in C(\alpha, \nu)$) z grafem G'' ($G'' \in B(k, \nu)$), przez sklejenie ich węzłów wazonych (o jednakowych wagach), indukuje (generuje) zbiór struktur D , rzędu $\alpha + k$, który może zawierać struktury izomorficzne.



Rys. 2. Rozłożenie struktury D na digrafy $C(D)$ i $B(D)$ o wazonych węzłach

Metoda wyznaczenia szeregu przeliczającego, nieetykietowane struktury D , zaproponowana w artykule, polega na oddzielnym przeliczaniu (dla ustalonej wartości ν) struktur G' ($G' \in C(\alpha, \nu)$) i G'' ($G'' \in B(k, \nu)$) oraz wyznaczeniu ich grup węzłowych (zbiorów przekształceń automorficznych), a następnie-na indukowaniu struktur D , przez sklejenie węzłów wazonych, tych struktur oraz redukowaniu (w zbiorze tak wyindukowanych struktur) struktur izomorficznych, w oparciu o poznane

automorfizmy struktur G' i G'' . Jeżeli $k > \|\nu\|$, to struktury zbioru $B(k, \nu)$, uzyskuje się jako nadgrafy struktur zbioru $B(\|\nu\|, \nu)$, utworzone przez dodanie $k - \|\nu\|$ węzłów. Ponieważ $B(k, (3)) = \emptyset$ ($k > 1$) oraz $B(k, (3, 2)) = \emptyset$ ($k > 2$), to operacja taka nie jest zbyt złożona, gdyż (przy wyznaczaniu szeregu przeliczającego struktury D , do rzędu ósmego) wymaga dodania, co najwyżej, dwóch węzłów.

W części drugiej artykułu, przedstawimy metodę wyznaczenia szeregu przeliczającego (zależność 1), polegającą na sklejeniu węzłów o jednakowych wagach, struktur klasy $C(\alpha, \nu)$ i klasy $B(k, \nu)$, a w częściach trzeciej oraz czwartej, odpowiednio-metody wyznaczenia niezbędnych własności tych struktur.

2. METODA WYZNACZENIA SZEREGU PRZELICZAJĄCEGO

Zauważmy, że aby wyznaczyć szereg przeliczający struktury D do rzędu ósmego, wystarczy posłużyć się ich kanonicznymi reprezentantami klas podobieństwa (wektorami ν), do wymiaru piątego.

Oznaczmy:

$$\Phi^r = \{\nu = (3, \dots, \nu_r) : B(r, \nu) \neq \emptyset\};$$

$$\sigma_s(\nu) = \|\{i \in \{1, \dots, r\} : \nu_i = s\}\| \quad (s \in \{1, 2, 3\}).$$

Z własności digrafów zbioru $B(\|\nu\|, \nu)$ wynika, że $\Phi^1 = \{(3)\}$ i $\Phi^2 = \{(3, 2)\}$ oraz zbiór $B(r, \nu)$ ($r \geq 3$) nie jest zbiorem pustym wtedy i tylko wtedy, gdy

$$[\nu_2 \geq 2] \wedge [(\sigma_3(\nu) \geq 2) \Rightarrow (\sigma_1(\nu) \geq \sigma_3(\nu) - 1)].$$

Tak więc:

$$\Phi^1 = \{(3)\}; \Phi^2 = \{(3, 2)\};$$

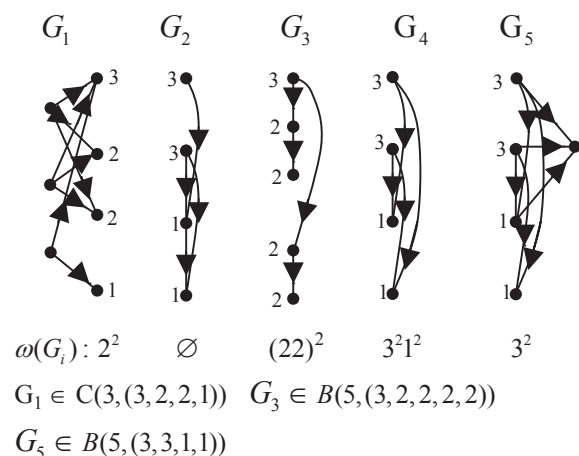
$$\Phi^3 = \{(3, 3, 1), (3, 2, 2), (3, 2, 1)\};$$

$$\Phi^4 = \{(3, 3, 2, 1), (3, 3, 1, 1), (3, 2, 2, 2), (3, 2, 2, 1), (3, 2, 1, 1)\};$$

$$\Phi^5 = \{(3, 3, 3, 1, 1), (3, 3, 2, 2, 1), (3, 3, 2, 1, 1), (3, 3, 1, 1, 1), (3, 2, 2, 2, 2), (3, 2, 2, 2, 1), (3, 2, 2, 1, 1), (3, 2, 1, 1, 1)\}.$$

Zauważmy, że jeżeli $\|\nu\| \leq 5$, to grupy węzłowe grafów zbioru $C(\alpha, \nu)$ oraz zbioru $B(k, \nu)$, można przedstawić w postaci, co najwyżej, dwóch niezależnych albo dwóch sprzężonych, grup węzłów podobnych, o odpowiednich krotnościach.

Niech zapis $\omega(G) = v_{i_1}^{\delta_{i_1}} v_{i_p}^{\delta_{i_p}}$ ($\{v_{i_1}, v_{i_p}\} \subset \{3, 2, 1\}, p \in \{1, 2\}$) oznacza, że digraf G zbioru $C(\alpha, v)$ albo zbioru $B(k, v)$, ma p niezależnych grup węzłów podobnych (odpowiednio) o wadze v_{i_1} i krotności δ_{i_1} oraz o wadze v_{i_p} i krotności δ_{i_p} , zapis $\omega(G) = (v_{i_1} v_{i_2})^2$, że ma dwie sprzężone grupy węzłów podobnych, zawierające po dwa węzły o wadze v_{i_1} oraz o wadze v_{i_2} , a zapis $\omega(G) = \emptyset$, że digraf G nie ma automorfizmu (rys. 3).



Rys. 3. Ilustracja sposobu opisu automorfizmu digrafów o ważonych węzłach

Oznaczmy:

$$\begin{aligned} \Omega^C(\alpha, v) &= \{\omega(G') : G' \in C(\alpha, v)\}; \\ C(\alpha, v, \omega') &= \{G' \in C(\alpha, v) : \omega(G') = \omega'\} \\ &(\omega' \in \Omega^C(\alpha, v)); \\ \Omega^B(k, v) &= \{\omega(G'') : G'' \in B(k, v)\}; \\ B(k, v, \omega'') &= \{G'' \in B(k, v) : \omega(G'') = \omega''\} \\ &(\omega'' \in \Omega^B(k, v)). \end{aligned}$$

Niech $D(\omega', \omega'', v)$ ($\omega' \in \Omega^C(\alpha, v)$, $\omega'' \in \Omega^B(k, v)$, $3 \leq \alpha \leq r \leq k, v \in \Phi^r$) oznacza zbiór niepodobnych struktur D rzędu $\alpha + k$, indukowanych przez wszystkie możliwe sklejania węzłów, o jednakowych wagach, digrafów G' ($G' \in C(\alpha, v)$) i G'' ($G'' \in B(k, v)$), które mają grupy węzłowe, odpowiednio, ω' i ω'' .

Jeżeli potrafimy wyznaczyć wartości $\|D(\omega', \omega'', v)\|$, $\|C(\alpha, v, \omega')\|$ oraz $\|B(k, v, \omega'')\|$, to liczebność zbioru struktur D rzędu m ($m \geq 7$), będziemy mogli określić z zależności

$$\|D(m)\| = \sum_{\alpha=3}^{m-3} \sum_{r=3}^{m-\alpha} \sum_{v \in \Phi^r} \|D(\alpha, m-\alpha, v)\|, \quad (2)$$

gdzie

$$\|D(\alpha, k, v)\| = \sum_{\omega' \in \Omega^C(\alpha, v)} \sum_{\omega'' \in \Omega^B(k, v)} \|D(\omega', \omega'', v)\| \cdot \|C(\alpha, v, \omega')\| \cdot \|B(k, v, \omega'')\|.$$

Zauważmy, że $\|D(4)\| = \|D(5)\| = 1$ oraz

$$\|D(6)\| = \sum_{v \in \Phi^3} \|D(3, 3, v)\| + 1, \quad (3)$$

bowiem $\Phi^2 = \{3, 2\}$ i $\|C(4, (3, 2))\| = 1$.

Jeżeli grupy węzłowe (digrafów G' i G'') można opisać za pomocą licznosci grup węzłów podobnych o określonej wadze, a tak można zrobić poza przypadkiem gdy $\omega(G'') = (22)^2$ ($\delta_i(G)$ - liczba węzłów podobnych o wadze i ($i \in \{1, 2, 3\}$) digrafu

G ($G \in \{G', G''\}$), $\delta(G) = (\delta_1(G), \delta_2(G), \delta_3(G))$), to

$$\|D(\delta(G'), \delta(G''), v)\| = \prod_{i=1}^3 \Theta_i(\delta_i(G'), \delta_i(G''), v) \quad (4)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \Theta_i(\delta_i(G'), \delta_i(G''), v) &= \\ &= \sum_{s=\max\{0, \psi_i(\delta_i(G'), \delta_i(G''), \sigma_i(v))\}}^{\min\{\delta_i(G'), \delta_i(G'')\}} [\sigma_i(v) - \\ &- 2 \cdot \min\{\delta_i(G'), \delta_i(G'')\} - |\delta_i(G') - \delta_i(G'')| + s]!, \end{aligned}$$

bowiem sklejanie s węzłów podobnych (o wadze i) digrafów G' i G'' , powoduje sklejanie

$$\begin{aligned} \sigma_i(v) - 2 \cdot \min\{\delta_i(G'), \delta_i(G'')\} - \\ - |\delta_i(G') - \delta_i(G'')| + s \end{aligned}$$

niepodobnych węzłów o wadze i , przy czym

$$\begin{aligned} \psi_i(\delta_i(G'), \delta_i(G''), \sigma_i(v)) &= 2 \cdot \min\{\delta_i(G'), \delta_i(G'')\} \\ &+ |\delta_i(G') - \delta_i(G'')| - \sigma_i(v). \end{aligned}$$

Tak więc, z zależności (2)-(4), po uwzględnieniu, że

$$\begin{aligned} (\delta_2(G') < 4) &\Rightarrow \\ (\|D(\delta(G'), (22)^2, (3, 2, 2, 2, 2))\| &= 4!); \\ (\delta_2(G') = 4) &\Rightarrow \\ (\|D(\delta(G'), (22)^2, (3, 2, 2, 2, 2))\| &= 1) \end{aligned}$$

oraz korzystając z danych, przedstawionych w tablicach 1-6, uzyskujemy zależność (1).

3. METODA WYZNACZANIA WŁASNOŚCI STRUKTUR KLASY $C(\alpha, \nu)$

Struktura klasy $C(\alpha, \nu)$ jest grafem prostym (dwupodzielny digrafem bez pętli) o ważonych ścieżkach (węzłach bez następników), których waga równa się stopniowi wejściowemu ścieżki.

Opiszemy prostą metodę (podatną do komputerowej realizacji) wyznaczania grup węzłowych $\omega (\omega \in \Omega^C(\alpha, \nu))$ i liczebności zbiorów $C(\alpha, \nu, \omega)$ ($\omega \in \Omega^C(\alpha, \nu), 3 \leq \alpha \leq \nu_1 + \dots + \nu_r,$

$3 \leq r \leq 5, \nu \in \Phi^r$) oraz wyznaczmy te wartości.

Oczywiście, jeżeli $r \leq 2$, to $\Omega^C(\alpha, \nu) = \{\emptyset\}$

i $\|C(\alpha, \nu, \omega)\| = 1$.

Zauważmy, że macierz binarna $M_{(\alpha \times r)}$,

w której $m_{i,1} + \dots + m_{i,r} = \lambda_i$ ($1 \leq i \leq \alpha$)

oraz $m_{1,j} + \dots + m_{\alpha,j} = \nu_j$ ($1 \leq j \leq r$),

gdzie $\lambda \in \{\lambda' \in \Lambda^\alpha(\nu_1 + \dots + \nu_r) : \lambda'_i \leq r\}$

($\Lambda^\alpha(\nu_1 + \dots + \nu_r)$ – zbiór α -dzielnych podziałów liczby naturalnej $\nu_1 + \dots + \nu_r$), jest macierzą przejść grafu prostego, należącego do takiego podzbioru zbioru $C(\alpha, \nu)$, w którym liczby następników poszczególnych źródeł grafu prostego, opisuje wektor $\lambda (\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\alpha))$.

Po zredukowaniu macierzy podobnych (w zbiorach macierzy wyznaczonych dla określonej wartości λ), określamy liczbę i wagę węzłów podobnych grafu, który odpowiada określonej macierzy, przy czym, liczba ta równa się liczbie jednakowych kolumn macierzy, a waga-sumie każdej z tych kolumn.

Wyznaczone w ten sposób, wartości $\Omega^C(\alpha, \nu)$ oraz $\|C(\alpha, \nu, \omega)\|$ podano w tablicach 1, 2 i 3.

Tablica 1. Wartości $\Omega^C(\alpha, \nu)$ i $\|C(\alpha, \nu, \omega)\|$ ($\nu \in \Phi^3$)

ν	α	3		4		5		
	ω	\emptyset	2^2	3^2	\emptyset	2^2	\emptyset	2^2
(3,3,1)				1	2		3	
(3,2,2)		1	1		4	1	3	1
(3,2,1)		2			4		2	

Tablica 2. Wartości $\Omega^C(\alpha, \nu)$ i $\|C(\alpha, \nu, \omega)\|$ ($\nu \in \Phi^4$)

ν	α	3					
	ω	\emptyset	1^2	2^2	2^3	3^2	$3^2 1^2$
(3,3,2,1)						3	
(3,3,1,1)						1	1
(3,2,2,2)				1	1		
(3,2,2,1)		2		2			
(3,2,1,1)		1	1				
ν	α	4					
	ω	\emptyset	1^2	2^2	2^3	3^2	$3^2 1^2$
(3,3,2,1)		7				4	
(3,3,1,1)		7	2			1	3
(3,2,2,2)		3		5	1		
(3,2,2,1)		8		2			
(3,2,1,1)		8	3				

Tablica 3. Wartości $\Omega^C(\alpha, \nu)$ i $\|C(\alpha, \nu, \omega)\|$ ($\nu \in \Phi^5$)

ν	α	3						
	ω	\emptyset	1^2	1^3	2^2	2^3	2^4	3^2
(3,3,3,1,1)								
(3,3,2,2,1)								2
(3,3,2,1,1)								2
(3,3,1,1,1)								1
(3,2,2,2,2)					2	1	1	
(3,2,2,2,1)					4	2		
(3,2,2,1,1)		2	2		2			
(3,2,1,1,1)		1	3	2				
ν	α	3						
	ω	3^3	$2^2 1^2$	$3^2 1^2$	$3^2 1^3$	$3^2 2^2$	$3^3 1^2$	
(3,3,3,1,1)		1					1	
(3,3,2,2,1)						2		
(3,3,2,1,1)				1				
(3,3,1,1,1)				1	1			
(3,2,2,2,2)								
(3,2,2,2,1)								
(3,2,2,1,1)			2					
(3,2,1,1,1)								

4. METODY WYZNACZANIA WŁASNOŚCI STRUKTUR KLASY $B(k, \nu)$

Rozpatrzmy niektóre metody wyznaczania grup węzłowych $\omega (\omega \in \Omega^B(k, \nu))$ i liczebności zbiorów $B(k, \nu, \omega)$ ($\Omega^B(k, \nu), \nu \in \Phi^r, 3 \leq r \leq k \leq 5$) oraz wyznaczmy te wartości.

Oczywiście, jeżeli $r \leq 2$, to $\Omega^B(k, \nu) = \{\emptyset\}$ i $\|B(k, \nu, \omega)\| = 1$.

Niech $M^*(\nu) (\nu \in \Phi^r)$ oznacza taką macierz wymiaru $(r \times r)$, że:

$$m_{i,i} = \nu_i \quad (i \in \{1, \dots, r\}); \quad (i \neq j) \Rightarrow (m_{i,j} \in \{0, 1\});$$

$$m_{1,j} + \dots + m_{r,j} = 3 \quad (j \in \{1, \dots, r\});$$

$$(m_{i,i} = 3) \Rightarrow (m_{i,1} + \dots + m_{i,r} > 3)$$

$$\text{oraz } (m_{i,j} = 1, i \neq j) \Rightarrow (m_{j,i} = 0).$$

Zauważmy, że macierz $M(v)$, utworzona z macierzy $M^*(v)$ przez podstawienie zer na jej głównej przekątnej, jest macierzą przejść digrafu, który należy do zbioru $B(r, v)$.

Tak więc, aby wyznaczyć $\Omega^B(k, v)$ i $\|B(k, v, \omega)\|$, należy wyznaczyć zbiór niepodobnych macierzy $M^*(v)$ i określić ich przekształcenia automorficzne.

Dla przykładu: $\Omega^B(4, (3, 3, 1, 1)) = \{\emptyset, 3^2 1^2\}$; $\|B(4, (3, 3, 1, 1), \emptyset)\| = \|B(4, (3, 3, 1, 1), 3^2 1^2)\| = 1$, bowiem zbiór niepodobnych macierzy $M^*((3, 3, 1, 1))$, zawiera dwie macierze (rys. 4), przy czym, macierz $M_1^*((3, 3, 1, 1))$ ma pusty zbiór przekształceń automorficznych oraz $M_2^*((3, 3, 1, 1))[(1, 2)(3)(4)] = M_2^*((3, 3, 1, 1))[(1)(2)(3, 4)] = M_2^*((3, 3, 1, 1))$.

$$M_1^*((3, 3, 1, 1)) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_2^*((3, 3, 1, 1)) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rys. 4. Ilustracja sposobu wyznaczenia zbioru $\Omega^B(4, (3, 3, 1, 1)) = \{\emptyset, 3^2 1^2\}$

Pokażemy inne sposoby wyznaczania zbiorów $\Omega^B(k, v)$ i liczebności zbiorów $B(k, v, \omega)$ ($\omega \in \Omega^B(k, v)$).

Zauważmy, że jeżeli $v_2 = \dots = v_r = 2$, to zbiór $B(r, v)$ ($r \geq 2$) jest zbiorem takich dendrytów, w których źródło ma wagę równą trzy, natomiast pozostałe węzły-wagę równą dwa, a więc, w tym przypadku, liczebność zbioru $B(r, v)$ jest równa liczbie drzew z korzeniem rzędu r . Ponieważ szereg przeliczający drzewa z korzeniem, ma postać

$$x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 9x^5 + \dots,$$

to łatwo jest wyznaczyć postać graficzną, takich drzew, do rzędu piątego, a z tej postaci (bezpośrednio)-zbiory $\Omega^B(k, v)$ i liczebności zbiorów $B(k, v, \omega)$ ($\omega \in \Omega^B(k, v)$).

Zauważmy, że digraf zbioru $B(r+1, (v_1, \dots, v_r, 1))$ możemy traktować jako nadgraf pewnego digrafu ze zbioru $B(r, (v_1, \dots, v_r))$, a więc, jeżeli digraf:

$$G(G \in B(r, v, \omega), \omega \neq \emptyset, v \in \Phi^r, r \geq 3)$$

ma p ($1 \leq p \leq \min\{3, \lfloor 2^{-1}(r-1) \rfloor\}$) podgrup węzłów podobnych o liczebnościach $\delta_1, \dots, \delta_p$, to indukuje (przez dodanie do niego, jednego węzła)

$$\Delta(r-1-\delta^*) \cdot \binom{r-\delta^*}{2} + p \cdot (r-\delta^*) + p + \Delta(p-1) \cdot \binom{p}{2}$$

niepodobnych digrafów zbioru $B(r+1, (v_1, \dots, v_r, 1))$, bowiem poprzednikami dodanego węzła, może być: para węzłów z poza grupy węzłów podobnych; para węzłów, której jednym z węzłów jest węzeł należący do określonej podgrupy węzłów podobnych, a drugim – węzeł z poza węzłów podobnych; jednorazowo wybrana para węzłów należących do tej samej podgrupy węzłów podobnych albo do różnych podgrup węzłów podobnych (gdzie: $\delta^* = \delta_1 + \dots + \delta_p$; ($a \leq 0$) \Rightarrow ($\Delta(a) = 0$) i ($a > 0$) \Rightarrow ($\Delta(a) = 1$)).

Tak więc, jeżeli $\|B(r, v, \omega)\| = 1$ ($\omega \neq \emptyset$), to

$$\|B(r+1, (v_1, \dots, v_r, 1))\| = \Delta(r-1-\delta^*(\omega)) \cdot \binom{r-\delta^*(\omega)}{2} + \sum_{\omega \in \Omega^B(r, v) \setminus \{\emptyset\}} (\Delta(r-1-\delta^*(\omega)) \cdot \binom{r-\delta^*(\omega)}{2} + p(\omega)) \cdot (r+1-\delta^*(\omega)) + \Delta(p(\omega)-1) \cdot \binom{p(\omega)}{2} \quad (5)$$

Przykład 1.

Wiemy (tablica 5), że $\Omega^B(4, (3, 2, 1, 1)) = \{\emptyset, 1^2\}$ oraz $\|B(4, (3, 2, 1, 1), \emptyset)\| = 2$

i $\|B(4, (3, 2, 1, 1), 1^2)\| = 1$, a więc (z zależności (5)) otrzymujemy, że $\|B(5, (3, 2, 1, 1, 1))\| = 16$. Nie są to, dane wystarczające, bowiem konieczna jest znajomość zbioru $\Omega^B(5, (3, 2, 1, 1, 1))$ i wartości $\|B(5, (3, 2, 1, 1, 1), \omega)\|$ ($\omega \in \Omega^B(5, (3, 2, 1, 1, 1))$).

Zauważmy, że digraf $G'(G' \in B(r, v, \emptyset), v \in \Phi^r, r \geq 3)$ indukuje

$$\binom{r}{2} - \|\{e \in E(G') : (v(e) = 1) \wedge (\Gamma(e) = \emptyset)\}\| \quad (6)$$

niepodobnych digrafów zbioru $B(r+1, (v_1, \dots, v_r, 1), \emptyset)$ oraz

$$\| \{e \in E(G') : (\nu(e) = 1) \wedge (\Gamma(e) = \emptyset)\} \| \quad (6')$$

niepodobnych digrafów zbioru $B(r+1,$

$$(\nu_1, \dots, \nu_r, 1), 1^2),$$

bowiem dla każdego wężła e' ($e' \in \{e \in E(G') : (\nu(e) = 1) \wedge (\Gamma(e) = \emptyset)\}$),

istnieje w zbiorze digrafów indukowanych (przez digraf G'), dokładnie jeden digraf, w którym poprzedniki dodanego wężła (nadgrafu), są wspólne z poprzednikami (w digrafie G') wężła e' .

Dla $r \leq 4$, zależność (6) przyjmuje postać

$$\binom{r}{2} - \Delta(2 - \nu_r), \quad (6'')$$

bowiem $(\nu_r = 2) \Rightarrow (\| \{e \in E(G') : (w(e) = 1) \| = 0)$,

a $(\nu_r = 1) \Rightarrow (\| \{e \in E(G') : (w(e) = 1) \wedge$

$\wedge (\Gamma(e) = \emptyset)\| = 1)$ gdyż, w przypadku, gdy $\sigma_1(\nu) = 2$, to albo $\| \{e \in E(G') : (w(e) = 1) \wedge \wedge (\Gamma(e) = \emptyset)\| = 1$, albo digraf G' nie ma pustej grupy węzłowej.

Postępując analogicznie, otrzymujemy, że digraf $G'' (G'' \in B(4, (3, 2, 1, 1), 1^2))$ indukuje dwa digrafy ze zbioru $B(5, (3, 2, 1, 1, 1), \emptyset)$ oraz po jednym digrafie, ze zbioru $B(5, (3, 2, 1, 1, 1), 1^2)$ oraz ze zbioru $B(5, (3, 2, 1, 1, 1), 1^3)$.

Sumując powyższe wyniki, z wynikami uzyskanymi w przykładzie 1, otrzymujemy zbiór $\Omega^B(5, (3, 2, 1, 1, 1))$ i wartości

$$\| B(5, (3, 2, 1, 1, 1), \omega) \| \quad (\omega \in \Omega^B(5, (3, 2, 1, 1, 1))) \quad (\text{tablica 6}).$$

Przy wyznaczaniu zbiorów $\Omega^B(r+1, (\nu_1, \dots, \nu_r, 1))$ i wartości

$$\| B(r+1, (\nu_r, \dots, \nu_r, 1), \omega) \|$$

$(\omega \in \Omega^B(r+1, (\nu_1, \dots, \nu_r, 1)))$, indukowanych przez digraf $G^* (G^* \in B(r, \nu, \emptyset))$, pomocna jest znajomość postaci graficznej lub macierzowej, digrafu G^* .

Digraf $G' (G' \in B(r+s, \nu), 3 \leq r \leq 4, 1 \leq s \leq 5-r, \nu \in \Phi^r)$ jest takim nadgrafem digrafu $G'' (G'' \in B(r, \nu))$, że $\| E(G') \| = \| E(G'') \| + s$, przy czym, wężły $E(G') \setminus E(G'')$ nie są wężłami ważonymi.

Zauważmy, że dla $s=2$, możliwe są dwa przypadki-gdy poprzedniki obu wężłów zbioru $E(G') \setminus E(G'')$ są wężłami ważonymi oraz, gdy

jeden z wężłów, tego zbioru, ma dokładnie jeden poprzednik, który nie jest wężłem ważonym.

Tak więc, digraf zbioru $B(r, \nu, \emptyset)$ indukuje

$$\prod_{i=1}^s \binom{r}{4-i} + \Delta(s-1) \cdot \binom{r}{3}^2 \quad (7)$$

digrafów zbioru $B(r+s, \nu, \emptyset)$, a digraf zbioru $B(r, \nu, w^\delta) (w \in \{1, 2, 3\}, 2 \leq \delta \leq r-1)$ indukuje:

$$\Delta(r-\delta-1) \cdot \binom{r-\delta}{2} \text{ digrafów zbioru}$$

$$B(r+1, \nu, \emptyset);$$

$$\nabla(\delta-2) \cdot (r-\delta) + \nabla(\delta-3) \text{ digrafów zbioru}$$

$$B(r+1, \nu, w^2);$$

$$\nabla(\delta-3) \text{ digrafów zbioru } B(r+1, \nu, w^3)$$

oraz

$$1 \text{ digraf zbioru } B(r+2, \nu, \emptyset)$$

i

$$2 \text{ digrafy zbioru } B(r+2, \nu, w^2),$$

gdzie $(\nabla(b) = 1) \Leftrightarrow (b = 0)$.

Powyższe zależności, nie obejmują tylko przypadku wyznaczenia, niezbędnego z uwagi na cel niniejszej pracy, liczby i grupy węzłowej digrafów zbioru $B(5, (3, 3, 1, 1))$, indukowanych przez digraf zbioru $B(4, (3, 3, 1, 1), 3^2 1^2)$. Znając postać graficzną tego digrafu (rys. 3) i budując jego nadgrafy (w zbiorze $B(5, (3, 3, 1, 1))$), łatwo stwierdzamy, że indukuje on po jednym digrafie o grupie węzłowej 3^2 oraz 1^2 .

Przykład 2.

Wiemy (tablica 5), że:

$$\Omega^B(4, (3, 2, 2, 2)) = \{\emptyset, 2^2, 2^3\};$$

$$\| B(4, (3, 2, 2, 2), \emptyset) \| = 2;$$

$$\| B(4, (3, 2, 2, 2), 2^2) \| = \| B(4, (3, 2, 2, 2), 2^3) \| = 1,$$

a ponieważ: digraf zbioru $B(4, (3, 2, 2, 2), \emptyset)$

indukuje 4 digrafy zbioru $B(5, (3, 2, 2, 2), \emptyset)$; digraf

zbioru $B(4, (3, 2, 2, 2), 2^2)$ indukuje 1 digraf zbioru

$B(5, (3, 2, 2, 2), \emptyset)$ i 2 digrafy zbioru

$B(5, (3, 2, 2, 2), 2^2)$ oraz digraf zbioru

$B(4, (3, 2, 2, 2), 2^3)$ indukuje po jednym digrafie

zbioru $B(5, (3, 2, 2, 2), 2^2)$ i zbioru

$B(5, (3, 2, 2, 2), 2^2)$, to $\| B(5, (3, 2, 2, 2), \emptyset) \| = 9$,

$$\| B(5, (3, 2, 2, 2), 2^2) \| = 3 \quad \text{oraz}$$

$$\| B(5, (3, 2, 2, 2), 2^3) \| = 1 \quad (\text{tablica 5}).$$

Wartości $\Omega^B(k, \nu)$ i $\| B(k, \nu, \omega) \|$

$(\nu \in \Phi^r, 3 \leq r \leq k \leq 5)$, wyznaczone za pomocą powyższych metod, podano w tablicach 4, 5 i 6.

Tablica 4. Wartości $\Omega^B(k, \nu)$ i $\|B(k, \nu, \omega)\|$
($\nu \in \Phi^3$)

ν	k	3			4			5		
	ω	\emptyset	2^2	3^2	\emptyset	2^2	3^2	\emptyset	2^2	3^2
(3,3,1)				1			1	1		2
(3,2,2)		1	1		1	1		5	2	
(3,2,1)		1			1			4		

Tablica 5. Wartości $\Omega^B(k, \nu)$ i $\|B(k, \nu, \omega)\|$
($\nu \in \Phi^4$)

ν	k	4					
	ω	\emptyset	1^2	2^2	2^3	3^2	$3^2 1^2$
(3,3,2,1)		2				1	
(3,3,1,1)		1					1
(3,2,2,2)		2		1	1		
(3,2,2,1)		4		1			
(3,2,1,1)		2	1				

ν	k	5				
	ω	\emptyset	1^2	2^2	2^3	3^2
(3,3,2,1)		9				2
(3,3,1,1)		4	1			1
(3,2,2,2)		9		3	1	
(3,2,2,1)		17		2		
(3,2,1,1)		9	2			

Tablica 6. Wartości $\Omega^B(k, \nu)$ i $\|B(k, \nu, \omega)\|$
($\nu \in \Phi^5$)

ν	k	5						
	ω	\emptyset	1^2	1^3	2^2	2^3	2^4	3^2
(3,3,3,1,1)		1						1
(3,3,2,2,1)		13			1			1
(3,3,2,1,1)		13						3
(3,3,1,1,1)		5	2	1				
(3,2,2,2,2)		3			3	1	1	
(3,2,2,2,1)		14			4			
(3,2,2,1,1)		25	1		1			
(3,2,1,1,1)		12	3	1				

ν	k	5			
	ω	$(22)^2$	$2^2 1^2$	$3^2 1^2$	$3^2 2^2$
(3,3,3,1,1)					
(3,3,2,2,1)					1
(3,3,2,1,1)					
(3,3,1,1,1)				1	
(3,2,2,2,2)		1			
(3,2,2,2,1)					
(3,2,2,1,1)			1		
(3,2,1,1,1)					

5. PODSUMOWANIE

Znajomość, wyjaśnionych w artykule, własności acyklicznej części 3-optymalnej struktury opiniowania diagnostycznego oraz szeregu przeliczającego (nawet tylko do rzędu ósmego) taką strukturę (zależność 1), mogą być przydatne przy poszukiwaniu metod komputerowego projektowania 3-diagnozowalnych struktur opiniowania diagnostycznego, spełniających określone wymagania techniczne i ekonomiczne.

Wyznaczenie szeregu przeliczającego (rozpatrywanej struktury) tylko do rzędu ósmego, wynika stąd, że grupy węzłowe digrafów, których scalenie (rys. 2) indukuje rozpatrywane struktury, można wyrazić (poza jednym tylko przypadkiem) za pomocą niezależnych grup węzłów podobnych. Nie stanowi to jednak istotnego ograniczenia, w zastosowaniu zaproponowanej w artykule metody, do wyznaczenia współczynników szeregu przeliczającego, większych od rzędu ósmego.

Uzyskane wyniki mogą być również, przydatne w pracach z zakresu teorii grafów – szczególnie dotyczących komputerowych metod określania grup węzłowych digrafów, wykrywania digrafów izomorficznych oraz generowania digrafów określonej klasy.

LITERATURA

- [1] Barsi F., Grandoni F., Maestrini P.: *A Theory of Diagnosability of Digital Systems*, IEEE Trans. on Comput. 6, 1976, pp. 585-593.
- [2] Harary F., Palmer E.: *Graphical Enumeration*, New York and London, Academic Press, 1973.
- [3] Krawczyk H.: *Analiza i synteza samodiagnozowalnych systemów komputerowych*, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, Elektronika nr 64, Gdańsk, 1987.
- [4] Kulesza R.: *Podstawy diagnostyki sieci logicznych i komputerowych*, Instytut Automatyki i Robotyki, Wydział Cybernetyki Wojskowej Akademii Technicznej, Warszawa, 2000, ss. 222
- [5] Kulesza R.: *Struktury samodiagnozowalne w technice cyfrowej*, diag'2003: V Krajowa Konferencja „Diagnostyka Techniczna Urządzeń i Systemów”, 13-17 października 2003, Ustroń, s.165-173.
- [6] Kulesza R.: *Problemy przeliczania optymalnych struktur opiniowania diagnostycznego*, Biuletyn Instytutu Automatyki i Robotyki, Wojskowa Akademia Techniczna, Warszawa, 2004, nr20, s.3-21.
- [7] Preparata F. P., Metze G., Chien R.T.: On the Connection Assignment Problem of Diagnosable Systems, IEEE Trans. Comput. 6, 1967, pp. 848-854.



Roman KULESZA, urodzony w 1932r. Ukończył: WAT (1956-inż., 1960 mgr); 2-letnie Podyplomowe Studium w Instytucie Matematycznym PAN (1965). Uzyskał: stopień dr-a (1966-PWar.); dr-a hab. (1973-

WAT); tytuł profesora (2002-WAT). Pracował w: Wojskowym Instytucie Technicznym Uzbrojenia (1956-1959); Przemysłowym Instytucie Telekomunikacji (1964-1967); Instytucie Matematycznym PAN (1967-1969); Instytucie Maszyn Matematycznych (1971-1978); Międzynarodowym Centrum Rozwoju Techniki Komputerowej w Moskwie (1982-1988); Przemysłowym Instytucie Elektroniki (1989-1998); Wojskowej Akademii Technicznej (1967-1975 i od 1991 do chwili obecnej). Zajmuje się niezawodnością i diagnostyką urządzeń elektronicznych, komputerów oraz sieci komputerowych.