IDENTYFIKACJA STANU ZDATNOŚCI SYSTEMU

Jerzy JAŹWIŃSKI, Sławomir KLIMASZEWSKI

Instytut Techniczny Wojsk Lotniczych
01-494 Warszawa, ul. Księcia Bolesława 6
tel./fax: (0 22) 685 163

Streszczenie

Pod pojęciem identyfikacji stanu zdatności systemu rozumiemy relacje $\boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{W}$ (zbiór cech $\boldsymbol{C}$ zawiera się w zbiorze wymagań $\boldsymbol{W}$). Cechy mogą być zdeterminowane – c, zmienne losowe – C, procesy losowe – $C(t)$. Wymagania mogą być zdeterminowane – w, zmienne losowe W, procesy losowe $W(t)$. Zbiór cech i zbiór wymagań wyznaczają dziewięć różnych relacji. W referacie omówiono wszystkie relacje, podając ich modele matematyczne oraz interpretację.

Słowa kluczowe: identyfikacja stanu, cecha, wymaganie, zmienna losowa, proces losowy.

IDENTIFICATION OF THE ABILITY STATE OF THE SYSTEM

Summary

Under the notion of identification of the ability state of the system we understand the relations $\boldsymbol{C} \subset \boldsymbol{W}$ (the set of characteristics $\boldsymbol{C}$ is included in the set of requirements $\boldsymbol{W}$). The characteristics can be determined – c, random variables – C, random processes – $C(t)$. The requirements can be determined – w, random variables W, random processes $W(t)$. The set of characteristics and the set of requirements determine nine different relations. All the relations have been considered in the paper as well as their mathematical models and interpretation have been given.

Keywords: identification of the state, characteristic, requirements, random variable, random process.

1. OGÓLNE PROBLEMY IDENTYFIKACJI

Ludzie w czasie swojej egzystencji muszą podejmować wiele różnorodnych decyzji. Dotyczą one bezpośrednio osoby, która je podejmuje, a odnoszą się do relacji z innymi ludźmi, ze środowiskiem naturalnym, techniką itp., tworząc układy mogące znajdować się w wielu różnych stanach. Podejmowane decyzje mają na celu zachowanie określonych stanów układu lub wprowadzenie zmian tych stanów. Aby dokonać zmiany stanu układu należy go w pierwszej kolejności zidentyfikować. Każdy stan układu wyznaczony jest przez zbiór wymagań $W_i\lfloor w_{i1}, w_{i2}, \dots w_{ij}, \dots, w_{im_i} \rfloor$ odniesiony do zbioru cech układu $C_i\lfloor C_{i1}, \dots, C_{ik}, \dots, C_{in_i} \rfloor$. Układ znajduje się w i-tym stanie jeżeli zbiór cech C_i spełnia wymagania W_i, to znaczy $C_i \subset W_i$; $i = 1,2,\dots, N$.
W praktyce, człowiek podejmujący decyzje nie zna pełnego zbioru cech układu oraz wymagań wyznaczających stany układu.

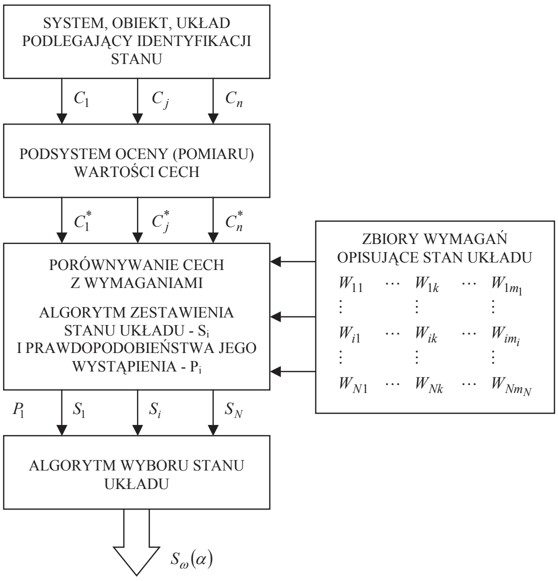
Po dokładnym przyjrzeniu się opisanym przypadkom, można zaobserwować pewną prawidłowość:

- Do podjęcia decyzji o zachowaniu lub zmianie układu, niezbędna jest identyfikacja tego stanu (Umownie można powiedzieć – pomiar stanu.).
- Obserwuje się różnorodne ilościowe i jakościowe cechy układu. Wartości niektórych cech zobrazowane są przy pomocy przyrządów pomiarowych. Niektóre cechy są obserwowane bezpośrednio lub pośrednio przez nasze zmysły.
- Odebraną informację porównuje się z różnorodnymi zestawami wymagań opisujących różne stany układu.
- W wyniku dokonanych porównań wyznacza się stan układu.
- Zebrana informacja o cechach oraz wymaganiach jest niepełna do określenia stanu układu. Stan układu zostaje wyznaczony z określonym błędem. Zazwyczaj wyznacza się podzbiór stanów.

Z przytoczonego algorytmu postępowania wynika, że do pomiaru wyznaczania stanu układu niezbędny jest specyficzny system pomiarowy. Specyfika tego systemu upoważnia do użycia umownego terminu metasystem pomiarowy.

Metasystem pomiarowy składa się z podsystemu oceny ilościowych i jakościowych cech układu, banku zestawu wymagań opisujących stan układu, zestawu algorytmów porównania cech z wymaganiami, zestawu algorytmów podejmowania decyzji przy niepełnej informacji o stanie układu z określonym błędem. Na rys. 1 przedstawiono jeden z możliwych wariantów metasystemu pomiarowego dokonującego identyfikacji stanu sytemu.

Przykładem metasytemu pomiarowego w szczególnym przypadku jest operator technicznego środka transportu (samolotu, samochodu) wyposażony w zmysły oraz określone mierniki pokładowe.



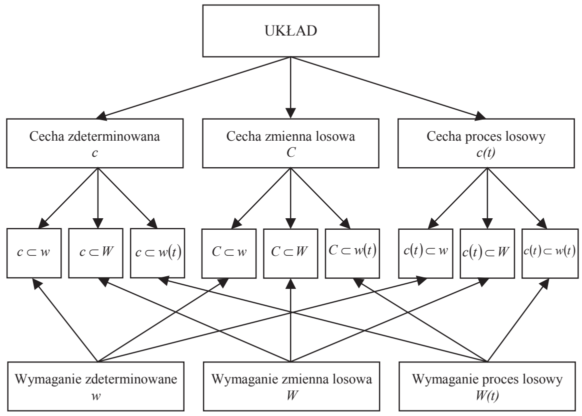
Rys. 1. Przykładowe zobrazowanie metasystemu pomiarowego wyznaczającego stan układu z błędem α

Istotnym problemem MSP jest zbiór cech ilościowych i jakościowych charakteryzujących układ. Cechom ilościowym mogą być przypisane określone wartości, natomiast cechy jakościowe nie mogą w sposób bezpośredni być opisane ilościowo. Przykładem cech jakościowych jest: kształt, kolor, zapach itp. Podział ten nie jest jednak precyzyjny.
W technicznych środkach transportu, dla istotnych cech zamontowane są przyrządy pomiarowe, np. prędkościomierz. Operator z obserwacji technicznego środka transportu odbiera różne sygnały (wibracje, sygnały dźwiękowe, zapachowe itp.), świadczące o niepożądanych procesach i wymagające określonych interwencji.

Są to wartości zdeterminowane, zmienne losowe i procesy losowe. Ogólnie można powiedzieć, że w stanie statycznym układu - cechy charakteryzujące układ mogą być w przybliżeniu traktowane jako wartości zdeterminowane, w stanie dynamicznym układu -cechy te nabierają zazwyczaj charakteru zmiennych losowych lub procesów losowych. Sytuacja się komplikuje jeżeli rozpatrywany jest układ jako reprezentacja pewnego zbioru układów i mierzone cechy są reprezentacją zbiorowości cech układu. W takim przypadku nabierają one charakteru losowego.

Charakter cechy w wielu przypadkach wyznacza wymagania. Wymagania mogą być zdeterminowane lub zmiennymi losowymi i procesami losowymi. Na rys. 2 przedstawiono różne relacje zachodzące pomiędzy cechami i wymaganiami. Każdej rozpatrywanej relacji przynależności $C \subset W$ towarzyszy złożony algorytm jej realizacji. W procesie wykorzystania relacji mogą być popełnione dwa rodzaje błędów:

- Błąd pierwszego typu polega na przyjęciu, że pomierzona cecha C^* nie spełnia wymagań $C^* \not\subset W$, gdy w rzeczywistości cecha ta spełnia wymagania $C \subset W$.
- Miarą błędu pierwszego typu jest prawdopodobieństwo $\alpha = P\left(C^* \not\subset W \middle| C \subset W\right)$.
- Błąd drugiego typu polega na przyjęciu, że pomierzona cechy C^* spełnia wymagania $C^* \subset W$, gdy w rzeczywistości nie spełnia ona wymagań $C \not\subset W$.
- Miarą błędu drugiego typu jest prawdopodobieństwo $\beta = P\left(C^* \subset W \middle| C \not\subset W\right)$.



Rys. 2. Relacja przynależności pomiędzy różnymi rodzajami cech i wymagań

Błędom pierwszego i drugiego typu towarzyszą bezbłędności pierwszego i drugiego typu:

- Bezbłędność pierwszego typu polegająca na właściwym zakwalifikowaniu pomierzonej cechy C^* spełniającej wymagania: $C^* \subset W$, dane jest wzorem:
$$\overline{\alpha} = 1 - \alpha = P\left(C^* \subset W \middle| C \subset W\right).$$
- Bezbłędność drugiego typu polegająca na właściwym zakwalifikowaniu mierzonej cech C^* nie spełniającej wymagań: $C^* \not\subset W$, dane jest wzorem:
$$\overline{\beta} = 1 - \beta = P\left(C^* \not\subset W \middle| C \not\subset W\right).$$

Reasumując można powiedzieć:

1. Identyfikacja stanu: systemu, układu, urządzenia, jest najbardziej rozpowszechnionym działaniem człowieka.
2. Utożsamianie identyfikacji stanu z pomiarem pozwala wykorzystać z jednej strony bogaty dorobek teorii systemów, a z drugiej strony bogaty dorobek teorii pomiarów.

3. Koniecznością odróżnienia identyfikacji stanu od pomiaru jest wprowadzenie terminu metasystem pomiarowy.
4. W odróżnieniu od dobrze zdefiniowanego pojęcia systemu pomiarowego, metasystem pomiarowy nie może być dobrze zdefiniowany. Wynika to z tego, że nie dysponujemy pełnym zbiorem cech i wymagań, opisujących stan systemu oraz posiłkujemy niekompletnymi algorytmami sprawdzenia relacji zgodności cech z wymaganiami. Zazwyczaj nie posiadamy definicji wszystkich możliwych stanów układu, zdefiniowane są tylko istotne stany względnie podzbiory stanów. Z powyżej wymienionych powodów metasystem pomiarowy funkcjonuje na dużym poziomie niepewności.
5. Wydaje się, że koncepcja MSP zasługuje na uwagę. Istotne znaczenie mają prace cząstkowo rozwiązujące określone problemy, np. identyfikacja podzbioru stanów w sensie „zdatny – niezdatny", „funkcjonuje – nie funkcjonuje" itp.

Można rozważyć następujące przykłady relacji pomiędzy cechami i wymaganiami:

1. Wymijanie - oznacza manewr, podczas którego mijają się pojazdy jadące po tej samej drodze, lecz w przeciwnych kierunkach. Wymijanie oznacza również przechodzenie obok użytkowników podążających w przeciwnych kierunkach. Podstawową dyrektywą wymijania jest zachowanie bezpiecznej odległości od wymijanego użytkownika drogi. Ścisłej definicji podać nie można. Problem należy do kategorii techniczno – taktycznej. W pracy [1] podaje się boczny odstęp w czasie wymijania. Nie powinien on być mniejszy od tylu centymetrów ile wynosi szybkość względna pomiędzy wymijającymi się pojazdami, a więc tyle centymetrów ile wynosi suma szybkości obydwóch pojazdów w km/h. Przykładowo jeżeli pojazdy mijają się z prędkością 50 km/k to odległość wymijania nie powinna być mniejsza od 100 cm. W przypadku wymijania jako cechę przyjmuje się prędkość obu pojazdów, którą ze względu na brak informacji o pojeździe wymijanym można potraktować jako zmienną losową. Wymaganie w takiej sytuacji można również potraktować jako zmienną losową.

2. Omijanie - przejeżdżanie jak również przechodzenie obok znajdujących się na drodze pojazdów lub innych nie poruszających się użytkowników drogi lub przedmiotów. O ile wyprzedzanie lub wymijanie dotyczy innych uczestników ruchu, o tyle omijanie może dotyczyć innych znajdujących się na drodze przedmiotów. Omijany przedmiot, pojazd czy pieszy nie może znajdować się w ruchu, gdyż wówczas nastąpiłoby wyprzedzanie lub wymijanie, a nie omijanie. Za moment omijania przyjmuje się chwilę, gdy omijający znajduje się na tej samej wysokości co omijany użytkownik drogi, względnie omijany przedmiot (słup, latarnia, kamień).

W pracy [1] podano przykłady odległości omijania (tabela 1).

Tabela 1. Przykłady odległości omijania

Rzeczywista szybkość w km/h	80	60	40	30
Wielkość bezpiecznego odstępu w metrach	1	0,75	0,6	05

Odległości te powinny być zwiększone przy występowaniu ograniczonego zaufania (omijanie autobusów, pojazdów konnych, osób nietrzeźwych itp.). Problem omijania należy rozpatrywać w kategoriach doświadczenia kierowcy, według algorytmu „hamowanie – zwalnianie – omijanie".
W danym przypadku cechą jest prędkość, która może być traktowana jako wartość zdeterminowana, a wymaganiem jest odległość od przeszkody, oceniana wzrokowo.

2. RELACJE POMIĘDZY CECHAMI I WYMAGANIAMI

2.1. Wymaganie zdeterminowane

Przy wymaganiach zdeterminowanych ($\boldsymbol{W}$) cecha może być również zdeterminowana (*c*), zienną losową (*C*), procesem losowym [*C(t)*]. Jest to najczęściej spotykany przypadek w praktyce. Urządzenia pomiarowe zamontowane na technicznych środkach transportu w wielu przypadkach posiadają na skali zaznaczony przedział. Jeżeli wartość cechy zawiera się w wartości przedziału, to uznaje się, że obiekt jest zdatny względnie obserwowane zjawisko przebiega prawidłowo. W przeciwnym przypadku przyjmuje się, że obiekt jest niezdatny.

Cecha zdeterminowana
Przypadek cechy zdeterminowanej dotyczy w zasadzie wymiarów obiektu, np. długości i szerokości stołu. Bardziej złożona sytuacja występuje przy opisywaniu cech geometrycznych technicznych środków transportowych, np. skrzydła samolotu.

Cecha zmienna losowa
Rozpatrywany jest element (przyrząd, urządzenie), dla którego związek sygnału wyjściowego y i sygnału wejściowego x jest określony zależnością ciągłą, najczęściej zależnością liniową:

$$y = cx \tag{1}$$

Jeżeli na wejściu takiego obiektu podawany jest sygnał o stałej wartości $x = x_1 = const$, to na wyjściu powinien występować również sygnał o wartości stałej, a mianowicie $y_1 = cx_1 = const$. Jednakże w wyniku zewnętrznych zmian obiektu wielkość c nie jest stała w czasie i może być większa lub mniejsza od ustalonej wartości średniej $\overline{C}$. Sygnał wyjściowy również będzie ulegał zmianom

w czasie, wokół pewnej średniej wartości $\overline{y}_1 = \overline{C}\ x_1$. Jak wykazuje doświadczenie, dla większości obiektów odchylenie wielkości y_1 od wartości średniej $\overline{y}_1$ określa się przez rozkład normalny.
Zwykle wymaga się aby obiekt pracował z określoną dokładnością, to jest aby sygnał wyjściowy obiektu nie miał większych odchyleń od zadanej wartości niedopuszczalnej $\pm\Delta$ .Prawdopodobieństwo tego, że wartość sygnału wyjściowego y_1 będzie znajdowała się w granicach dopuszczalnych jeżeli rozkład wartości sygnału wyjściowego przyjmiemy za normalny, wynosi:

$$R = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\overline{y}_i - \Delta}^{\overline{y}_i + \Delta} \exp\left[- \frac{(y_1 - \overline{y}_1)^2}{2\sigma^2} \right] dy \qquad (2)$$

gdzie: σ - odchylenie standardowe wartości y.

Cecha – proces losowy

Oznaczmy proces losowy obciążenia konstrukcji $C(t)$. Zakładamy, że wytrzymałość konstrukcji w jest stała. Warunkiem bezpieczeństwa konstrukcji jest nieprzekroczenie przez proces $U(t) = C(t) - w$ poziomu zerowego. W wielu przypadkach ważny jest czas trwania τ przekroczenia poziomu zerowego.
W ogólnym przypadku bezpieczeństwo konstrukcji można wyznaczyć ze wzoru [6]:

$$R_B(t_0) = R_B(0)\left\{1 - \left[1 - P_p(t_0)\right] P(\tau > \tau_{kr})\right\} \qquad (3)$$

gdzie:

$R_B(t)$ - prawdopodobieństwo nie zniszczenia konstrukcji do chwili t;

$R_B(0)$ - prawdopodobieństwo nie zniszczenia konstrukcji w chwili $t = 0$;

P_p - prawdopodobieństwo nie wystąpienia poziomu zerowego w czasie t;

$P(\tau > \tau_{kr})$ - prawdopodobieństwo przekroczenia poziomu czasu krytycznego;

τ_{kr} - czas trwania przekroczenia poziomu czasu krytycznego, po którym występuje zniszczenie konstrukcji.

Do wyznaczenia bezpieczeństwa konstrukcji niezbędna jest znajomość wartości wchodzących do wzoru (3).

Do wyznaczenia prawdopodobieństwa $P(\tau > \tau_{kr})$ niezbędna jest znajomość gęstości prawdopodobieństwa $f(\tau)$. Wykazuje się, że gęstość prawdopodobieństwa czasu przekroczenia poziomu zerowego jest w przybliżeniu opisana rozkładem Rayleigha o postaci [4]:

$$f(\tau) = \frac{\tau}{\sigma^2} \exp\left[- \frac{\tau^2}{2\sigma^2} \right] \qquad (4)$$

$$P_\tau = P(\tau > \tau_{kr}) = \int_{\tau_{kr}}^{\infty} f(\tau) d\tau = \exp\left[- \frac{\pi\ \tau_{kr}^2}{4\overline{\tau}^2} \right] \qquad (5)$$

gdzie: $\overline{\tau} = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{12}}$.

Jeżeli znana jest średnia liczba przekroczeń poziomu zerowego $\overline{n_0}(t_0)$, to prawdopodobieństwo $P_p(t)$ dane jest wzorem:

$$P_p(t_0) = \exp\left[- \int_0^{t_0} \overline{n}_0(\tau) d\tau \right] \qquad (6)$$

W ogólnym przypadku wyznaczenie prawdopodobieństw P_τ, P_p nastręcza wielu trudności.
W praktyce spotykamy się z procesami deterministycznymi. Są to funkcje o losowych argumentach zależnych od czasu. Procesy te są niestacjonarne. Rozważmy deterministyczny proces liniowy o postaci [5]:

$$\omega(t) = A\,t + B \qquad (7)$$

A i B to niezależne zmienne losowe. W przypadku gdy parametr $A = a$ jest zdeterminowany, a parametr B jest zmienną losową, wówczas proces ma przebieg równomierny. Gdy parametr A jest losowy, a parametr $B = b$ jest zdeterminowany, to proces ma przebieg wachlarzykowaty.

Jeżeli przyjmie się, że parametry A i B mają rozkłady normalne o parametrach $N(m_a, \sigma_a)$, $N(m_b, \sigma_b)$, to proces zużycia również ma rozkład normalny o parametrach $N(m_\omega, \sigma_\omega)$, gdzie:

$$m_\omega = m_a\,t + m_b \qquad (8)$$

$$\sigma_\omega^2 = t^2\,\sigma_a^2 + \sigma_b^2 \qquad (9)$$

Jeżeli h jest dopuszczalnym poziomem zużycia, to:

$$R(t) = P(T > t) = P(AT + B \le h) \qquad (10)$$

Z normalności procesu zużycia $\omega(t)$ wynika [2]:

$$P(T \le t) = 1 - R(t) = \phi\left[\frac{t - \frac{h - m_b}{m_a}}{\sqrt{\frac{\sigma_a^2\ t^2 + \sigma_b^2}{m_a^2}}} \right] \qquad (11)$$

Podstawiając:

$$d = \frac{\sigma_a^2}{m_a^2};\quad e = \frac{\sigma_b^2}{m_a^2};\quad c = \frac{h - m_b}{m_a}, \qquad (12)$$

otrzymuje się:

$$F(t) = \phi\left[\frac{t - c}{\sqrt{d\,t^2 + e}} \right] \qquad (13)$$

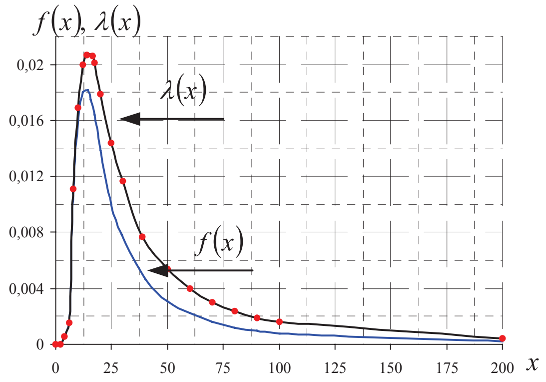
Funkcja gęstości prawdopodobieństwa dana jest wzorem:

$$f(t) = \frac{(e + c\,d\,t)}{\left[e + d\,t^2\right]^{3/2}\sqrt{2\pi}} \exp\left[- \frac{(t - c)^2}{2(d\,t^2 + e)} \right] \qquad (14)$$

a intensywność uszkodzeń:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} \qquad (15)$$

Zobrazowanie funkcji gęstości prawdopodobieństwa $f(t)$ i funkcji intensywności uszkodzeń $\lambda(t)$ przedstawiono na rys. 3.



Rys. 3. Wykres funkcji gęstości prawdopodobieństwa $f(x)$ i funkcji intensywności zdarzeń $\lambda(x)$ dla liniowego procesu deterministycznego o normalnym rozkładzie parametrów $N(m_a = 0{,}01;\ \sigma_a = 0{,}05)$ oraz $N(m_b = 1;\ \sigma_b = 0{,}2)$ i wartości granicznej $h = 2$

2.2. Wymaganie zmienna losowa

W wielu przypadkach wymagania są zmiennymi losowymi. Taka sytuacja występuje wówczas, gdy cechą jest obciążenie, a wymaganiem jest wytrzymałość konstrukcji. Uwzględniając niejednorodność materiału, wytrzymałość jest zmienną losową. W innym przypadku gdy cechą jest czas wykonywania działania, wymaganiem wówczas jest czas dyspozycyjny, który jest zmienną losową na skutek różnorodności sytuacji, która działaniu towarzyszy. W rozpatrywanych przypadkach cecha może być zdeterminowana, może być zmienną losową względnie procesem losowym.

Cecha zdeterminowana

Przykładem takiej sytuacji jest stałe obciążenie działające na konstrukcję o losowej wytrzymałości. Rozważmy parę przykładów porównywania cechy c z wymaganiami W. Miarą realizacji pomiędzy cechą i wymaganiem jest prawdopodobieństwo $P(c < W)$, że wytrzymałość jest większa od obciążenia.

Rozważmy parę przykładów:

1. Wytrzymałość ma rozkład Weibulle'a o postaci:

$$F(w) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{w-\delta}{\Theta-\delta}\right)^{\alpha}\right] \tag{16}$$

Prawdopodobieństwo $F(w) = P(W \le c)$ dla $\alpha = 4$, $\Theta = 2000$, $\delta = 1000$ i $c = 1500$ wynosi: $F(1500) = 0{,}061$ oraz dla $F(1100) = 0{,}000099$ lub, że $R(w) = 1 - F(w) = P(W > c) = 0{,}9999$.

2. Wytrzymałość ma rozkład gamma o postaci:

$$F(w) = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(\lambda w)^k \exp(-\lambda w)}{k!} \tag{17}$$

Dla parametrów $m = 3$, $\lambda = 0{,}005$, $c = 24$, $R(w) = P(W > c) = 0{,}9927$ wytrzymałość konstrukcji jest zmienną losową na skutek niejednorodności technologii wytwarzania.

W innym obszarze, na przykład sterowania obiektem, cechą jest czas wykonania operacji sterującej, w określonych warunkach może być przyjęty jako wartość zdeterminowana. Jako wymaganie może być przyjęty czas dyspozycyjny, w którym działanie sterujące winno być wykonane. Aby zadanie było wykonane, działanie sterujące winno być krótsze od czasu dyspozycyjnego. Przykładowo czas odpalenia rakiety ziemia – powietrze, dla zniszczenia celu powietrznego, można przyjąć za zdeterminowany (cecha układu). Przebywanie celu w strefie rażenia wyznacza czas dyspozycyjny (wymaganie). Relacje pomiędzy tymi wielkościami decydują o wykonaniu zadania.

Cecha zmienna losowa

Relacją pomiędzy cechą C i wymaganiem W jest prawdopodobieństwo $P(W \le C)$ dane wzorem [4]:

$$F = 1 - R = \int_{-\infty}^{\infty} F_w(s) f_c(s) ds = P(W \le C) \tag{18}$$

gdzie: F - prawdopodobieństwo, że cecha C jest większa od wymaganej. Jeżeli cecha C jest obciążeniem, a wymaganie W – wytrzymałością f_C, to F jest miarą zawodności konstrukcji. Jeżeli cecha C ma sens pracy obiektu zabezpieczanego do zapotrzebowania na działanie obiektu zabezpieczającego, a wymaganie jest czasem pracy do uszkodzenia obiektu zabezpieczającego, to prawdopodobieństwo F jest miarą niedyspozycyjności obiektu zabezpieczającego.

Jeżeli cecha C oznacza czas wykonania operacji sterującej, a wymaganie W oznacza czas dyspozycyjny, to prawdopodobieństwo F oznacza nieskuteczność działania. Odpowiednio R oznacza bezpieczeństwo konstrukcji, dyspozycyjność obiektu zabezpieczającego, efektywność działania. Rozważmy parę przykładów wyznaczania prawdopodobieństwa R dla różnych rozkładów $f_c(c)$ i $f_w(w)$:

1. Cecha i wymaganie mają rozkłady normalne:

$$f_c(c) = \frac{1}{\sigma_c\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{c-\mu_c}{\sigma_c}\right)^2\right] \tag{19}$$

$$f_w(w) = \frac{1}{\sigma_w\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{w-\mu_w}{\sigma_w}\right)^2\right] \tag{20}$$

gdzie:

μ_c i σ_c - wartość oczekiwana i odchylenie standardowe cechy C;

μ_w i σ_w - wartość oczekiwana i odchylenie standardowe wymagań.

Wprowadźmy zmienną losową $Y = W - C$. Wiadomym jest, że zmienna losowa Y posiada rozkład normalny z wartością oczekiwaną:

$$\varpi_y = \mu_w - \mu_c \tag{21}$$

i odchyleniem standardowym:

$$\sigma_y = \sqrt{\sigma_w^2 + \sigma_c^2} \tag{22}$$

Wówczas prawdopodobieństwo R dane jest wzorem:

$$R = P(Y > 0) = \int_0^\infty \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y - \mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right] \tag{23}$$

Powyższą zależność można napisać w postaci:

$$R = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\mu_w - \mu_c}{\sqrt{\sigma_w^2 + \sigma_c^2}}}^{\infty} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] dz \tag{24}$$

Dla wyznaczenia wartości R można wykorzystać dane z istniejących tablic rozkładu normalnego.

2. Jeżeli cecha i wymaganie mają rozkłady wykładnicze o parametrach λ_c i λ_w, to:

$$R = \frac{\lambda_c}{\lambda_w + \lambda_c} \tag{25}$$

3. Jeżeli wymaganie ma rozkład normalny $N(\mu_w, \sigma_w)$, a cecha ma rozkład wykładniczy o parametrze λ_c, to:

$$R = 1 - \exp\left(\mu_w \lambda_c + \frac{1}{2}\lambda_c^2\ \sigma_w^2\right) \tag{26}$$

W ogólnym przypadku prawdopodobieństwo R można wyznaczyć graficznie. Wprowadźmy oznaczenia:

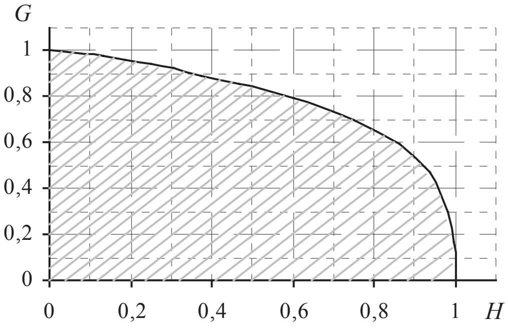
$$G = \int_w^\infty f_w(w) dw = 1 - F_w(w) \tag{27}$$

$$H = \int_0^c f_c(c) dc = F_c(c) \tag{28}$$

Wówczas:

$$R = \int_0^1 G dH \tag{29}$$

Powyższy wzór wskazuje, że prawdopodobieństwo R równe jest polu pod krzywą G i H. Relację ilustruje rys. 4.



Rys. 4. Wykres funkcji $G = f(H)$

Cecha proces losowy

W praktyce często spotykamy się z sytuacją kiedy cecha $C(t)$ jest procesem losowym, a wymaganie jest zmienną losową W. Rozważmy niektóre przykłady:

1. W czasie startu samolotu na konstrukcję oddziałują impulsy obciążenia. Wytrzymałość konstrukcji jest zmienną losową. Konstrukcja ulega uszkodzeniu jeżeli impuls obciążenia przekroczy wytrzymałość konstrukcji.
2. Napięcie zasilania energią elektryczną na samolocie jest procesem losowym. Wynika to z losowej liczby odbiorników włączanych w danym momencie oraz z oddziaływania różnych czynników wymuszających na odbiorniki energii elektrycznej. Wymaganie jest również zmienną losową, uwarunkowaną odpornością izolacji na zwarcia różnych odbiorników energii elektrycznej.
3. Czas wykonywania działania sterującego w wielu przypadkach może być traktowany jako proces losowy. Wynika to między innymi ze stanu psychicznego operatora, jego podatności na stres informacyjny, czasowy oraz zmęczenia.

Miarą relacji „cecha $C(t)$ – wymaganie W" jest prawdopodobieństwo:

$$R = P\big(W - C(t) > 0 \mid t \le T\big) \tag{30}$$

Przyjmując, że wymaganie i cecha są nie skorelowane, znajdujemy [6]:

$$R \approx \exp\left\{-\frac{T}{2\pi}\sqrt{-\left[\frac{d^2\rho_c(\tau)}{d\tau^2}\right]_{\tau=0}} \exp\left[-\frac{(m_w - m_c)^2}{2(\sigma_w^2 + \sigma_c^2)}\right]\right\} \tag{31}$$

gdzie:

$\rho_c(\tau)$ - unormowana funkcja korelacji cechy $C(t)$;
m_w, m_c - wartości oczekiwane wymagań W i cechy $C(t)$;
σ_w^2, σ_c^2 - wariancja wymagań W i cechy $C(t)$.

Wyrażenie powyższe daje dolne oszacowanie prawdopodobieństwa R. Bardziej dokładne oszacowanie uzyskuje się ze wzoru:

$$R = \int_0^\infty f_w(x) \exp\left[-\overline{n}_w T\right] dx \tag{32}$$

gdzie:

$f_w(x)$ - gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej W;
$\overline{n}_w$ - średnia liczba przekroczeń przez obciążenie poziomu W.

2.3. Wymaganie proces losowy

Wymaganie jako proces losowy występuje w wielu różnych sytuacjach. W przypadku gdy jako wymaganie przyjmuje się wytrzymałość konstrukcji, to na skutek zachodzących w konstrukcji procesów starzenia i zużycia, wytrzymałość konstrukcji jest zależna od czasu i winna być traktowana jako proces losowy. W czasie realizacji zadania transportowego wymaganie odnośnie takiej cechy jak prędkość jest procesem losowym, gdyż o prędkości decydują znaki drogowe, zachowanie się innych użytkowników dróg, stan dróg, warunki klimatyczne itp. W rozpatrywanych przypadkach cecha może być zdeterminowana np. stałe obciążenie konstrukcji, zmienną losową, procesem losowym, np. obciążenie jest zależne od czasu.

Cecha zdeterminowana

1. Cecha to stałe obciążenie konstrukcji. Wytrzymałość zależy od temperatury lub starzenia zachodzącego w materiale konstrukcji. Wytrzymałość jest procesem losowym.
2. Profesjonalne działanie wykonywane przez operatora w czasie sterowania obiektem można przyjąć jako zdeterminowane. Czas dyspozycyjny jako wymaganie zależy od czasu (pora dnia, warunki klimatyczne, itp.) i jest procesem losowym.

Rozważmy problem identyfikacji takiego układu. Obiekt spełnia wymagania jeżeli czecha nie przekroczy procesu opisującego wymagania. Obiekt nie spełnia wymagań jeśli cecha c przekroczy poziom procesu opisującego wymagania i przebywa w tym stanie przez czas τ .

Średnia liczba przekroczeń wymaganego poziomu przez cechę $\overline{n}$ i czas przebywania w stanie przekroczenia τ , dane są wzorami [6]:

$$\overline{n} = A \exp\left[-(c - m_w)^2 \middle| K_w(0)\right] \tag{33}$$

$$\tau = \frac{1}{A}\left[1 - \phi\left(\frac{c - m_w}{\sqrt{K_w(0)}}\right)\right] \exp\left[\frac{(c - m_w)^2}{2K_w(0)}\right] \tag{34}$$

$$A = \frac{1}{2\pi}\sqrt{-\left[\frac{1}{K_w(\tau)} \cdot \frac{dK_w(\tau)}{d\tau^2}\right]_{\tau=0}} \tag{35}$$

Parametr A można wyrazić przez gęstość spektralną $S_w(\omega)$:

$$K_w(\tau) = \int_0^\infty S_w(\omega) \cos \omega\tau \, d\omega \tag{36}$$

gdzie: ω - częstość kątowa.

Przy założeniu, że przekroczenie przez cechę poziomu wymagań jest zdarzeniem małoprawdopodobnym, to prawdopodobieństwo przekroczenia przez cechę poziomu wymagań dane jest wzorem:

$$R = \exp\left\{-AT \exp\left[-(c - m_w)^2 \mid 2K_w(0)\right]\right\} \tag{37}$$

lub:

$$R \approx e^{-\overline{n}T} \tag{38}$$

gdzie:
$\overline{n}$ - średnia liczba przekroczeń poziomu cechy C;
$K_w(\tau)$ - funkcja korelacyjna wymagań;
$S_w(\omega)$ - gęstość spektralna;
m_w - wartość oczekiwana wymagań;
C - wartość cechy.

Cecha zmienna losowa

Sytuacja taka występuje gdy np. obciążenie jest zmienną losową, a wymaganie jest procesem losowym. Przyjmując funkcje gęstości cechy $f_c(x)$:

$$n_{sr} = \int_0^\infty f_c(c)\, \overline{n}(c)\, dc \tag{39}$$

$$\tau_{sr} = \int_0^\infty f_c(c)\, \tau(c)\, dc \tag{40}$$

$$R_{sr} = \int f_c(c)\, R(c)\, dc \tag{41}$$

gdzie:
n_{sr} , τ_{sr} , R_{sr} - odpowiednio: $\overline{n}(c)$ - dane wzorem (33), $\tau(c)$ - dane wzorem (34) i $R(c)$ - dane wzorem (37) dla średniej wartości cechy C.

Cecha proces losowy

Rozważmy przypadek ogólny, kiedy cecha i wymaganie są procesami losowymi. Rozważmy proces losowy:

$$U(t) = C(t) - W(t) \tag{42}$$

Rozważa się krótkotrwałe przejścia przez zero funkcji *U(t)*. Krótkotrwałe przekroczenie nie zawsze powoduje uszkodzenie systemu. Dlatego niezbędnym jest uwzględnienie czasu trwania przekroczenia. Zakłada się, że zniszczenie systemu następuje gdy $\tau > \tau_{kr}$ (τ_{kr} - krytyczne). Dla wyznaczenia prawdopodobieństwa $P(\tau > \tau_{kr})$ niezbędna jest znajomość funkcji gęstości prawdopodobieństwa $f(\tau)$. Wykazuje się, że gęstość prawdopodobieństwa czasu trwania przekroczenia w przybliżeniu opisuje się rozkładem Rayleigha w postaci:

$$f(\tau) = \frac{\tau}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\tau^2}{2\pi^2}\right) \tag{43}$$

Parametr σ wyznacza się z zależności:

$$E[\tau] = \overline{\tau} = \sqrt{\frac{\pi}{12}}\ \sigma \tag{44}$$

Wartość $\overline{\tau}$ wyznacza się z doświadczenia. Przy ustalonym τ_{kr} prawdopodobieństwo P_τ dane jest wzorem:

$$P_\tau = P(\tau > \tau_{kr}) = \int_{\tau_{kr}}^{\infty} f(\tau)d\tau = \exp\left[-\frac{\pi\,\tau_{kr}^2}{4T^2}\right] \quad (45)$$

Ogólnie prawdopodobieństwo niezniszczenia obiektu w czasie T dane jest wzorem [6]:

$$P(T) = P(0)\{1 - [1 - P_1(\tau)]P_\tau\} \quad (46)$$

gdzie:

$$P_1(T) = P\{U(t) < 0 \mid t \le T\} \quad (47)$$

Przy stacjonarnym procesie $U(t)$ prawdopodobieństwo $P_1(t)$ dane jest wzorem:

$$P_1 \approx \exp\left\{-\frac{T}{2\pi}\sqrt{-\left(\frac{d^2\rho_U^{(\tau)}}{d\,\tau^2}\right)}\Bigg|_{\tau=0} \exp\left[-\frac{\sigma_U^2}{2\sigma_U^2}\right]\right\} \quad (48)$$

gdzie: σ_U^2 i $\rho_U^{(\tau)}$ - odpowiednio wariancja i unormowana funkcja korelacji procesu losowego $U(t)$, przy czym:

$$\sigma_U^2 = \sigma_C^2 + \sigma_W^2 - 2\sigma_C\,\sigma_W\,\sigma_{UC} \quad (49)$$

$$\rho_W(\tau) = \frac{1}{\sigma_W^2}\left[\sigma_C^2\,\rho_C^{(\tau)} + \sigma_W^2\,\rho_W - 2\sigma_C\,\sigma_W\,\rho_{CW}^{(\tau)}\right] \quad (50)$$

gdzie:

σ_C^2 i σ_W^2 - wariancja cechy C i wymagań W;

$\rho_W^{(\tau)}$ i $\rho_{CW}^{(\tau)}$ - unormowana autokorelacja cechy C i wymagań W i unormowana funkcja korelacyjna procesu $C(t)$ i wymagań $W(t)$.

3. WNIOSKI

W procesie identyfikacji stanu systemu istotną rolę odgrywa metasystem pomiarowy.

Metasystem pomiarowy występuje wówczas gdy nie dysponujemy pełną informacją o zestawie cech, a wiele cech jest oszacowywanych przy pomocy zmysłów operatora. Dokonana identyfikacja jest przybliżona. Częste zagrożenia bezpieczeństwa w transporcie są skutkiem niedokładnej identyfikacji. Problem metasystemu pomiarowego wymaga dalszych badań..

LITERATURA

[1] Dobrzyński A.: „*Bez zielonego listka*". Krajowa Agencja Wydawnicza, 1982.

[2] Gerbach I. B., Kordoński C. B.: „*Modele niezawodności obiektów technicznych*". WNT, Warszawa 1968.

[3] Jaźwiński J. i inni: Sprawozdanie nr 1389/50 z pracy pt.: „*Identyfikacja stanu transportowego w procesie realizacji zadania transportowego*". ITWL, Warszawa 2003.

[4] Kapur L., Lanbercov: „*Nadexnostь i proektirovanie system*". Mir, Moskva 1980.

[5] Prohorenko V. A., Smirnov A. H.: P*rognozirovanie ka`estva sistem*. „Nauka i tehnika", Minsk 1976.

[6] Volkov L. I., Wiwkevi` A. M.: „*Nadexnostь letatelьnyh aparatov*". Vyswa/ Wkola, 1975.

Prof. dr hab. inż. Jerzy JAŹWIŃSKI jest pracownikiem naukowym Zakładu Niezawodności i Bezpieczeństwa Instytutu Technicznego Wojsk Lotniczych w Warszawie. Zajmuje się problematyką niezawodności, bezpieczeństwa i logistyki systemów transportowych, ze szczególnym uwzględnieniem statków powietrznych. Jest autorem kilkuset publikacji, w tym kilkunastu książkowych. Ważniejsze monografie: Jaźwiński Jerzy, Borgoń Jan: „Niezawodność eksploatacyjna i bezpieczeństwo lotów", WKiŁ, Warszawa 1989; Ważyńska-Fiok Krystyna, Jaźwiński Jerzy: „Niezawodność systemów technicznych", PWN, Warszawa 1990; Jaźwiński Jerzy, Ważyńska-Fiok Krystyna: „Bezpieczeństwo systemów", PWN, Warszawa 1993; Grabski Franciszek, Jaźwiński Jerzy: „Metody bayesowskie w niezawodności i diagnostyce", WKiŁ, Warszawa 2001; Jaźwiński Jerzy, Grabski Franciszek: „Niektóre problemy modelowania systemów transportowych", Instytut Technologii Eksploatacji, Radom 2003. Wypromował 15 doktorów.

Dr inż. Sławomir KLIMASZEWSKI jest pracownikiem naukowym Zakładu Niezawodności i Bezpieczeństwa Instytutu Technicznego Wojsk Lotniczych w Warszawie. Zajmuje się problematyką niezawodności, bezpieczeństwa, modelami zużycia techniki lotniczej. Jest autorem ponad stu prac publikowanych i niepublikowanych, które znalazły szerokie zastosowanie w praktyce, między innymi do przedłużania zasobów pracy techniki lotniczej. Jest współautorem monografii: „Symulacyjne metody badania bezpieczeństwa lotów", Wydawnictwo Naukowe ASKON, Warszawa 1998. Był kierownikiem i wykonawcą wielu projektów badawczych przyznawanych przez Komitet Badań Naukowych.