

WIELOSTANOWE PODEJŚCIE DO ANALIZY BEZPIECZEŃSTWA SYSTEMÓW

Krzysztof KOŁOWROCKI
Akademia Morska w Gdyni
81-225 Gdynia, Morska 81-87, e-mail: katmatkk@am.gdynia.pl

Streszczenie

Zaproponowane jest wielostanowe podejście do zdefiniowania podstawowych pojęć analizy i diagnozowania bezpieczeństwa systemów. Zdefiniowane są funkcja bezpieczeństwa systemu i funkcja ryzyka systemu. Zdefiniowane są podstawowe struktury wielostanowych systemów elementów z pogarszającymi się stanami bezpieczeństwa. Dla tych systemów wyznaczone są funkcje bezpieczeństwa. Proponowane podejście jest zastosowane do oceny funkcji bezpieczeństwa, funkcji ryzyka oraz innych charakterystyk bezpieczeństwa systemu transportu rurociągowego, kabla energetycznego oraz liny stalowej.

Słowa kluczowe: bezpieczeństwo systemów, systemy wielostanowe, diagnostyka.

MULTI-STATE APPROACH TO SYSTEM SAFETY ANALYSIS

Summary

A multi-state approach to defining basic notions of the system safety analysis and diagnosis is proposed. A system safety function and a system risk function are defined. Basic safety structures of multi-state systems of components with degrading safety states are defined. For these systems the multi-state safety functions are determined. The proposed approach is applied to the evaluation of safety functions, risk functions and other safety characteristics of a piping transportation system, an energetic cable and a steel rope.

Keywords: system safety, multi-state systems, diagnostics.

1. WPROWADZENIE

Z uwagi na bezpieczeństwo oraz efektywność eksploatacji systemów technicznych podczas analizy diagnostycznej wskazanym jest odejście od dwustanowego modelu ich bezpieczeństwa. Przyjęcie założenia, że są one wielostanowymi systemami starzejącymi się z powodu pogarszających się w czasie stanów technicznych ich elementów jest podstawą do bardziej dokładnej analizy i diagnozowania procesu eksploatacji tych systemów. Założenie to pozwala na wyróżnienie progowego stanu krytycznego systemu, którego przekroczenie jest niebezpieczne dla otoczenia lub też nie zapewnia odpowiedniego poziomu efektywności eksploatacji tego systemu. Wtedy podstawową charakterystyką bezpieczeństwa systemu staje się rozkład czasu do przekroczenia stanu progowego zwany funkcją ryzyka systemu. Rozkład ten jest ściśle wyznaczony przez wielostanową funkcję bezpieczeństwa systemu.

Wyznaczanie funkcji bezpieczeństwa oraz funkcji ryzyka dużych systemów na podstawie funkcji bezpieczeństwa ich elementów jest podstawowym zadaniem badawczym. Temu zagadnieniu poświęcona jest praca, z odniesieniem się do podstawowych struktur bezpieczeństwa systemów technicznych.

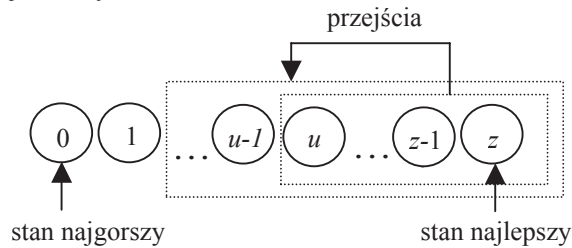
2. POJĘCIA PODSTAWOWE

W celu wprowadzenia wielostanowego podejścia do analizy bezpieczeństwa systemów elementów z pogarszającymi się stanami bezpieczeństwa, podobnie jak w przypadku badania niezawodności tego typu systemów wielostanowych ([1], [2], [3]), przyjmujemy, że:

- E_i , $i = 1, 2, \dots, n$, są elementami systemu,
- wszystkie rozważane elementy oraz system mają zbiór stanów bezpieczeństwa $\{0, 1, \dots, z\}$, $z \geq 1$,
- stany są uporządkowane, 0 jest stanem najgorszym natomiast stan z jest najlepszym,
- $T_i(u)$ są niezależnymi zmiennymi losowymi reprezentującymi czasy przebywania elementów E_i w podzbiórce stanów $\{u, u+1, \dots, z\}$, podczas gdy elementy te w chwili $t = 0$ znajdowały się w stanie z ,
- $T(u)$ jest zmienną losową reprezentującą czas przebywania systemu w podzbiórce stanów $\{u, u+1, \dots, z\}$, podczas gdy w chwili $t = 0$ system ten znajdował w stanie z ,
- stany bezpieczeństwa systemu oraz elementów pogarszają się wraz z upływem czasu t ,
- $E_i(t)$ jest stanem elementu E_i w chwili t , $t \in (-\infty, \infty)$, podczas gdy element ten w chwili $t = 0$ znajdował się w stanie z ,

- $S(t)$ jest stanem systemu w chwili t , $t \in (-\infty, \infty)$, podczas gdy system w chwili $t = 0$ znajdował się w stanie z .

Powyższe założenia oznaczają, że stany bezpieczeństwa elementów i systemu mogą zmieniać się w czasie tylko od lepszych do gorszych. Sposób, w jaki zmieniają się stany bezpieczeństwa elementów i systemu zilustrowany jest na rys. 1.



Rys. 1. Zmiany podzbiorów stanów bezpieczeństwa

Definicja 1. Wektor

$$s_i(t, \cdot) = [s_i(t, 0), s_i(t, 1), \dots, s_i(t, z)]$$

dla $t \in (-\infty, \infty)$, $i = 1, 2, \dots, n$, gdzie

$$s_i(t, u) = P(E_i(t) \geq u \mid E_i(0) = z) = P(T_i(u) > t) \quad (1)$$

dla $t \in (-\infty, \infty)$, $u = 0, 1, \dots, z$, jest prawdopodobieństwem tego, że element E_i w chwili t , $t \in (-\infty, \infty)$, znajduje się w jednym ze stanów podzbioru $\{u, u+1, \dots, z\}$, podczas gdy w chwili $t = 0$ znajdował się w stanie z , nazywamy wielostanową funkcją bezpieczeństwa elementu E_i .

Przy tej definicji oczywista jest następująca własność składowych wielostanowych funkcji bezpieczeństwa elementów

$$s_i(t, 0) \geq s_i(t, 1) \geq \dots \geq s_i(t, z)$$

dla $t \in (-\infty, \infty)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Jeśli

$$p_i(t) = [p_i(t, 0), p_i(t, 1), \dots, p_i(t, z)]$$

dla $t \in (-\infty, \infty)$, $i = 1, 2, \dots, n$,

gdzie

$$p_i(t, u) = P(E_i(t) = u \mid E_i(0) = z)$$

dla $t \in (-\infty, \infty)$, $u = 0, 1, \dots, z$,

jest prawdopodobieństwem tego, że element E_i w chwili t znajduje się w stanie u , podczas gdy w chwili $t = 0$ znajdował się w stanie z , to wobec (1)

$$s_i(t, 0) = 1, s_i(t, z) = p_i(t, z) \quad (2)$$

dla $t \in (-\infty, \infty)$, $i = 1, 2, \dots, n$, oraz

$$p_i(t, u) = s_i(t, u) - s_i(t, u+1) \quad (3)$$

dla $u = 0, 1, \dots, z-1$, $t \in (-\infty, \infty)$, $i = 1, 2, \dots, n$,

a ponadto

$$m_i(u) = \int_0^\infty s_i(t, u) dt \quad (4)$$

dla $u = 1, 2, \dots, z$, $i = 1, 2, \dots, n$,

jest wartością oczekiwaną (średnią) czasu przebywania elementu E_i w podzbiorze stanów $\{u, u+1, \dots, z\}$,

$$\sigma_i(u) = \sqrt{n_i(u) - [m_i(u)]^2} \quad (5)$$

dla $u = 1, 2, \dots, z$, $i = 1, 2, \dots, n$,

gdzie

$$n_i(u) = 2 \int_0^\infty t s_i(t, u) dt \quad (6)$$

dla $u = 1, 2, \dots, z$, $i = 1, 2, \dots, n$,

jest odchyleniem standardowym czasu przebywania elementu E_i w podzbiorze stanów $\{u, u+1, \dots, z\}$ oraz

$$\bar{m}_i(u) = \int_0^\infty p_i(t, u) dt, u = 1, 2, \dots, z, i = 1, 2, \dots, n, \quad (7)$$

jest wartością oczekiwaną czasu przebywania elementu E_i w stanie u , w przypadku gdy całki określone wzorami (4), (6) oraz (7) istnieją. Wtedy, zgodnie z (2), (3), (4) oraz (7), mamy

$$\bar{m}_i(u) = \bar{m}_i(u) - \bar{m}_i(u+1), u = 1, 2, \dots, z-1,$$

$$\bar{m}_i(z) = \bar{m}_i(z), i = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

Definicja 2. Wektor

$$s_n(t, \cdot) = [s_n(t, 0), s_n(t, 1), \dots, s_n(t, z)], t \in (-\infty, \infty),$$

gdzie

$$s_n(t, u) = P(S(t) \geq u \mid S(0) = z) = P(T(u) > t) \quad (9)$$

dla $t \in (-\infty, \infty)$, $u = 0, 1, \dots, z$,

jest prawdopodobieństwem tego, że system w chwili t , $t \in (-\infty, \infty)$, znajduje się w podzbiorze stanów $\{u, u+1, \dots, z\}$, podczas gdy w chwili $t = 0$ znajdował się w stanie z , nazywamy wielostanową funkcją bezpieczeństwa systemu.

Przy tej definicji prawdziwa jest następująca własność składowych wielostanowej funkcji bezpieczeństwa systemu

$$s_n(t, 0) \geq s_n(t, 1) \geq \dots \geq s_n(t, z), t \in (-\infty, \infty).$$

Jeśli

$$p(t) = [p(t,0), p(t,1), \dots, p(t,z)], t \in (-\infty, \infty),$$

gdzie

$$p(t,u) = P(S(t) = u | S(0) = z) \quad (10)$$

dla $t \in (-\infty, \infty), u = 0, 1, \dots, z,$

jest prawdopodobieństwem tego, że system w chwili t znajduje się w stanie u , podczas gdy w chwili $t = 0$ znajdował się w stanie z , to wobec (9) i (10) mamy

$$s_n(t,0) = 1, s_n(t,z) = p(t,z), t \in (-\infty, \infty), \quad (11)$$

oraz

$$p(t,u) = s_n(t,u) - s_n(t,u+1) \quad (12)$$

dla $u = 0, 1, \dots, z-1, t \in (-\infty, \infty).$

Ponadto

$$m(u) = \int_0^{\infty} s_n(t,u) dt, u = 1, 2, \dots, z, \quad (13)$$

jest średnim czasem przebywania systemu w podzbiorze stanów $\{u, u+1, \dots, z\},$

$$\sigma(u) = \sqrt{n(u) - [m(u)]^2}, u = 1, 2, \dots, z, \quad (14)$$

gdzie

$$n(u) = 2 \int_0^{\infty} t s_n(t,u) dt, u = 1, 2, \dots, z, \quad (15)$$

jest odchyleniem standardowym czasu przebywania systemu w podzbiorze stanów $\{u, u+1, \dots, z\}$ oraz

$$\bar{m}(u) = \int_0^{\infty} p(t,u) dt, u = 1, 2, \dots, z, \quad (16)$$

jest średnim czasem przebywania systemu w stanie u , w przypadku gdy całki (13), (15) i (16) istnieją. Wtedy, zgodnie z (11), (12), (13) i (16), mamy

$$\begin{aligned} \bar{m}(u) &= \bar{m}(u) - \bar{m}(u+1), u = 1, 2, \dots, z-1, \\ \bar{m}(z) &= \bar{m}(z). \end{aligned} \quad (17)$$

Definicja 3. Prawdopodobieństwo

$$r(t) = P(S(t) < r | S(0) = z) = P(T(r) \leq t), t \in (-\infty, \infty),$$

tego, że system w chwili t znajduje się w podzbiorze stanów bezpieczeństwa gorszych niż stan krytyczny $r, r \in \{1, \dots, z\},$ podczas gdy w chwili $t = 0$ znajdował

się w stanie z , nazywamy funkcją ryzyka systemu lub krótko ryzykiem.

Przy tej definicji, uwzględniając (9), mamy

$$r(t) = 1 - P(S(t) \geq r | S(0) = z) = 1 - s_n(t,r) \quad (18)$$

dla $t \in (-\infty, \infty).$

Ponadto, jeśli τ jest chwilą, w której ryzyko przekroczy pewien dopuszczalny poziom $\delta, \delta \in <0, 1>,$ to

$$\tau = r^{-1}(\delta), \quad (19)$$

gdzie $r^{-1}(t)$, jeśli istnieje, jest funkcją odwrotną funkcji ryzyka $r(t).$

2. PODSTAWOWE STRUKTURY BEZPIECZEŃSTWA SYSTEMÓW

Definicja 4. System wielostanowy nazywamy systemem szeregowym, jeśli znajduje się w podzbiorze stanów $\{u, u+1, \dots, z\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego elementy znajdują się w tym podzbiorze stanów.

Wniosek 1. Czas $T(u)$ przebywania wielostanowego systemu szeregowego w podzbiorze stanów $\{u, u+1, \dots, z\}$ określony jest wzorem

$$T(u) = \min_{1 \leq i \leq n} \{T_i(u)\}, u = 1, 2, \dots, z.$$

Wniosek 2. Funkcja bezpieczeństwa wielostanowego systemu szeregowego określona jest wzorem

$$\bar{s}_n(t, \cdot) = [1, \bar{s}_n(t,1), \dots, \bar{s}_n(t,z)], \quad (20)$$

gdzie

$$\bar{s}_n(t,u) = \prod_{i=1}^n s_i(t,u), t \in (-\infty, \infty), u = 1, 2, \dots, z. \quad (21)$$

Definicja 5. Wielostanowy system szeregowy nazywamy jednorodnym, jeśli czasy $T_i(u)$ przebywania jego elementów w podzbiorach stanów $\{u, u+1, \dots, z\}$ mają identyczną dystrybuantę

$$F_i(t,u) = F(t,u), u = 1, 2, \dots, z, t \in (-\infty, \infty), i = 1, 2, \dots, n,$$

tzn. jeśli jego elementy E_i mają tę samą funkcję bezpieczeństwa, czyli gdy

$$s_i(t,u) = s(t,u) = 1 - F(t,u), t \in (-\infty, \infty),$$

dla $u = 1, 2, \dots, z, i = 1, 2, \dots, n.$

Wniosek 3. Funkcja bezpieczeństwa jednorodnego wielostanowego systemu szeregowego określona jest wzorem

$$\bar{s}_n(t, \cdot) = [1, \bar{s}_n(t, 1), \dots, \bar{s}_n(t, z)], \quad (22)$$

gdzie

$$\bar{s}_n(t, u) = [s(t, u)]^n \quad (23)$$

dla $t \in (-\infty, \infty)$, $u = 1, 2, \dots, z$.

Wniosek 4. Jeśli elementy jednorodnego wielostanowego systemu szeregowego mają wykładniczą funkcję bezpieczeństwa, tzn., gdy

$$s(t, \cdot) = [1, s(t, 1), \dots, s(t, z)],$$

gdzie

$$s(t, u) = 1 \text{ dla } t < 0,$$

$$s(t, u) = \exp[-\lambda(u)t] \text{ dla } t \geq 0, \lambda(u) > 0$$

$$\text{dla } u = 1, 2, \dots, z,$$

to jego funkcja bezpieczeństwa określona jest wzorem

$$\bar{s}_n(t, \cdot) = [1, \bar{s}_n(t, 1), \dots, \bar{s}_n(t, z)], \quad (24)$$

gdzie

$$\bar{s}_n(t, u) = 1, \quad t < 0,$$

$$\bar{s}_n(t, u) = \exp[-n\lambda(u)t] \text{ dla } t \geq 0, \quad (25)$$

$$\text{dla } u = 1, 2, \dots, z.$$

Definicja 6. System wielostanowy nazywamy systemem równoległym, jeśli znajduje się w podzbiorze stanów $\{u, u+1, \dots, z\}$ wtedy i tylko wtedy gdy co najmniej jeden z jego elementów znajduje się w tym podzbiorze stanów.

Wniosek 5. Czas $T(u)$ przebywania wielostanowego systemu równoległego w podzbiorze stanów $\{u, u+1, \dots, z\}$ określony jest wzorem

$$T(u) = \max_{1 \leq i \leq n} \{T_i(u)\}, \quad u = 1, 2, \dots, z.$$

Wniosek 6. Funkcja bezpieczeństwa wielostanowego systemu równoległego określona jest wzorem

$$s_n(t, \cdot) = [1, s_n(t, 1), \dots, s_n(t, z)], \quad (26)$$

gdzie

$$s_n(t, u) = 1 - \prod_{i=1}^n F_i(t, u), \quad t \in (-\infty, \infty), \quad u = 1, 2, \dots, z. \quad (27)$$

Definicja 7. Wielostanowy system równoległy nazywamy jednorodnym, jeśli czasy $T_i(u)$

przebywania jego elementów w podzbiorach stanów $\{u, u+1, \dots, z\}$ mają identyczną dystrybuantę

$$F_i(t, u) = F(t, u), \quad u = 0, 1, \dots, z, \quad t \in (-\infty, \infty), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

tzn. jeśli jego elementy E_i mają tę samą funkcję bezpieczeństwa, czyli gdy

$$s_i(t, u) = s(t, u) = 1 - F(t, u), \quad t \in (-\infty, \infty),$$

$$\text{dla } u = 0, 1, \dots, z, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Wniosek 7. Funkcja bezpieczeństwa jednorodnego wielostanowego systemu równoległego określona jest wzorem

$$s_n(t, \cdot) = [1, s_n(t, 1), \dots, s_n(t, z)], \quad (28)$$

gdzie

$$s_n(t, u) = 1 - [1 - s(t, u)]^n, \quad t \in (-\infty, \infty), \quad u = 1, 2, \dots, z. \quad (29)$$

Wniosek 8. Jeśli elementy jednorodnego wielostanowego systemu równoległego mają wykładniczą funkcję bezpieczeństwa, tzn., gdy

$$s(t, \cdot) = [1, s(t, 1), \dots, s(t, z)],$$

gdzie

$$s(t, u) = 1 \text{ dla } t < 0,$$

$$s(t, u) = \exp[-\lambda(u)t] \text{ dla } t \geq 0, \quad \lambda(u) > 0$$

$$\text{dla } u = 1, 2, \dots, z,$$

to jego funkcja bezpieczeństwa określona jest wzorem

$$s_n(t, \cdot) = [1, s_n(t, 1), \dots, s_n(t, z)], \quad (30)$$

gdzie

$$s_n(t, u) = 1 \text{ dla } t < 0,$$

$$s_n(t, u) = 1 - [1 - \exp[-\lambda(u)t]]^n \text{ dla } t \geq 0, \quad (31)$$

$$\text{dla } u = 1, 2, \dots, z.$$

Definicja 8. System wielostanowy nazywamy systemem progowym „ m z n ”, jeśli znajduje się w podzbiorze stanów $\{u, u+1, \dots, z\}$ wtedy i tylko wtedy gdy co najmniej m z jego n elementów znajduje się w tym podzbiorze stanów.

Wniosek 9. Czas $T(u)$ przebywania wielostanowego systemu progowego „ m z n ” w podzbiorze stanów $\{u, u+1, \dots, z\}$ określony jest wzorem

$$T(u) = T_{(n-m+1)}(u), \quad m = 1, 2, \dots, n, \quad u = 1, 2, \dots, z,$$

gdzie $T_{(n-m+1)}(u)$ jest m -tą maksymalną statystyką pozycyjną w ciągu zmiennych losowych $T_1(u), T_2(u), \dots, T_n(u)$.

Wniosek 10. Funkcja bezpieczeństwa wielostanowego systemu progowego określona jest wzorem

$$s_n^{(m)}(t, \cdot) = [1, s_n^{(m)}(t, 1), \dots, s_n^{(m)}(t, z)], \quad (32)$$

gdzie

$$s_n^{(m)}(t, u) = 1 - \sum_{\substack{r_1, r_2, \dots, r_n=0 \\ r_1+r_2+\dots+r_n \leq m-1}} [s_i(t, u)]^{r_i} [1 - s_i(t, u)]^{1-r_i} \quad (33)$$

dla $t \in (-\infty, \infty), u = 1, 2, \dots, z,$

lub wzorem

$$s_n^{(m)}(t, \cdot) = [1, s_n^{(m)}(t, 1), \dots, s_n^{(m)}(t, z)], \quad (34)$$

gdzie

$$s_n^{(m)}(t, u) = \sum_{\substack{r_1, r_2, \dots, r_n=0 \\ r_1+r_2+\dots+r_n \leq n-m}} [1 - s_i(t, u)]^{r_i} [s_i(t, u)]^{1-r_i} \quad (35)$$

dla $t \in (-\infty, \infty), u = 1, 2, \dots, z.$

Definicja 11. Wielostanowy system progowy nazywamy jednorodnym, jeśli czasy $T_i(u)$ przebywania jego elementów w podzbiorach stanów $\{u, u+1, \dots, z\}$ mają identyczną dystrybuantę

$$F_i(t, u) = F(t, u), u = 0, 1, \dots, z, t \in (-\infty, \infty), i = 1, 2, \dots, n,$$

tnz. jeśli jego elementy E_i mają tę samą funkcję bezpieczeństwa, czyli gdy

$$s_i(t, u) = s(t, u) = 1 - F(t, u), t \in (-\infty, \infty),$$

dla $u = 0, 1, \dots, z, i = 1, 2, \dots, n.$

Wniosek 8. Funkcja bezpieczeństwa jednorodnego wielostanowego systemu progowego określona jest wzorem

$$s_n^{(m)}(t, \cdot) = [1, s_n^{(m)}(t, 1), \dots, s_n^{(m)}(t, z)], \quad (36)$$

gdzie

$$s_n^{(m)}(t, u) = 1 - \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n}{i} [s(t, u)]^i [1 - s(t, u)]^{n-i} \quad (37)$$

dla $t \in (-\infty, \infty), u = 1, 2, \dots, z,$

lub wzorem

$$s_n^{(m)}(t, \cdot) = [1, s_n^{(m)}(t, 1), \dots, s_n^{(m)}(t, z)], \quad (38)$$

gdzie

$$s_n^{(m)}(t, u) = \sum_{i=0}^{n-m} \binom{n}{i} [1 - s(t, u)]^i [s(t, u)]^{n-i} \quad (39)$$

dla $t \in (-\infty, \infty), u = 1, 2, \dots, z.$

Wniosek 12. Jeśli elementy jednorodnego wielostanowego systemu progowego mają wykładniczą funkcję bezpieczeństwa, tzn., gdy

$$s(t, \cdot) = [1, s(t, 1), \dots, s(t, z)],$$

gdzie

$$s(t, u) = 1 \text{ dla } t < 0,$$

$$s(t, u) = \exp[-\lambda(u)t] \text{ dla } t \geq 0, \lambda(u) > 0$$

$$\text{dla } u = 1, 2, \dots, z,$$

to jego funkcja bezpieczeństwa określona jest wzorem

$$s_n^{(m)}(t, \cdot) = [1, s_n^{(m)}(t, 1), \dots, s_n^{(m)}(t, z)], \quad (40)$$

gdzie

$$s_n^{(m)}(t, u) = 1 \text{ dla } t < 0,$$

$$s_n^{(m)}(t, u) = 1$$

$$- \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n}{i} \exp[-i\lambda(u)t] [1 - \exp[-\lambda(u)t]]^{n-i} \quad (41)$$

dla $t \geq 0, u = 1, 2, \dots, z,$

lub wzorem

$$s_n^{(m)}(t, \cdot) = [1, s_n^{(m)}(t, 1), \dots, s_n^{(m)}(t, z)], \quad (42)$$

gdzie

$$s_n^{(m)}(t, u) = 1 \text{ dla } t < 0,$$

$$s_n^{(m)}(t, u)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-m} \binom{n}{i} [1 - \exp[-\lambda(u)t]]^i \exp[-(n-i)\lambda(u)t] \quad (43)$$

dla $t \geq 0, u = 1, 2, \dots, z.$

Podobnie definiuje i analizuje się inne wielostanowe struktury bezpieczeństwa systemów.

4. ZASTOSOWANIA

Przykład 1. (system transportu rurociągowego)

System rurociągowy jest zbudowany z $n = 80$ pięciostanowych ($z = 4$) segmentów rur.

Segmenty rur występujące w systemie są czterech następujących typów:

20 segmentów posiada wielostanowe wykładnicze funkcje bezpieczeństwa

$$s_i(t, \cdot) = [1, s_i(t, 1), s_i(t, 2), s_i(t, 3), s_i(t, 4)],$$

$$i = 1, 2, \dots, 20,$$

o składowch

$$s_i(t, 1) = \exp[-0.01t], s_i(t, 2) = \exp[-0.0120t],$$

$$s_i(t, 3) = \exp[-0.015t], s_i(t, 4) = \exp[-0.025t],$$

$$i = 1, 2, \dots, 20,$$

20 segmentów posiada wielostanowe wykładnicze funkcje bezpieczeństwa

$$s_i(t, \cdot) = [1, s_i(t, 1), s_i(t, 2), s_i(t, 3), s_i(t, 4)],$$

$$i = 21, 22, \dots, 40,$$

o składowch

$$s_i(t, 1) = \exp[-0.018t], s_i(t, 2) = \exp[-0.019t],$$

$$s_i(t, 3) = \exp[-0.020t], s_i(t, 4) = \exp[-0.023t],$$

$$i = 21, 22, \dots, 40,$$

10 segmentów posiada wielostanowe weibullowskie funkcje bezpieczeństwa

$$s_i(t, \cdot) = [1, s_i(t, 1), s_i(t, 2), s_i(t, 3), s_i(t, 4)],$$

$$i = 41, 42, \dots, 50,$$

o składowch

$$s_i(t, 1) = \exp[-0.0005t^2], s_i(t, 2) = \exp[-0.0006t^2],$$

$$s_i(t, 3) = \exp[-0.0010t^2], s_i(t, 4) = \exp[-0.0015t^2],$$

$$i = 41, 42, \dots, 50,$$

30 segmentów posiada wielostanowe weibullowskie funkcje bezpieczeństwa

$$s_i(t, \cdot) = [1, s_i(t, 1), s_i(t, 2), s_i(t, 3), s_i(t, 4)],$$

$$i = 51, 52, \dots, 80,$$

o składowch

$$s_i(t, 1) = \exp[-0.00061t^3], s_i(t, 2) = \exp[-0.00062t^3],$$

$$s_i(t, 3) = \exp[-0.00064t^3], s_i(t, 4) = \exp[-0.00070t^3],$$

$$i = 51, 52, \dots, 80,$$

Średnie czasy przebywania w podzbiorach stanów, liczone w latach, przykładowo dla segmentów rur typu drugiego, po zastosowaniu wzoru (4), odpowiednio wynoszą:

$$m_2(1) = 1/0.018 = 55.56, m_2(2) = 1/0.019 = 52.63,$$

$$m_2(3) = 1/0.020 = 50.00, m_2(4) = 1/0.023 = 43.48,$$

natomiast ich średnie czasy przebywania w poszczególnych stanach, wobec (8), odpowiednio wynoszą:

$$\bar{m}_2(1) = 2.93, \bar{m}_2(2) = 2.63,$$

$$\bar{m}_2(3) = 6.52, \bar{m}_2(4) = 43.48.$$

Zgodnie z **Definicją 4**, rozważany system jest niejednorodnym wielostanowym systemem szeregowym. Zatem, wobec (20)–(21), otrzymujemy następujący wzór na funkcję bezpieczeństwa tego systemu

$$\bar{s}_{80}(t, \cdot)$$

$$= [1, \bar{s}_{80}(t, 1), \bar{s}_{80}(t, 2), \bar{s}_{80}(t, 3), \bar{s}_{80}(t, 4)],$$

gdzie

$$\bar{s}_{80}(t, 1) = \exp[-0.2t - 0.36t - 0.005t^2 - 0.00183t^3],$$

$$\bar{s}_{80}(t, 2) = \exp[-0.24t - 0.38t - 0.006t^2 - 0.00186t^3],$$

$$\bar{s}_{80}(t, 3) = \exp[-0.3t - 0.4t - 0.01t^2 - 0.00192t^3],$$

$$\bar{s}_{80}(t, 4) = \exp[-0.5t - 0.46t - 0.015t^2 - 0.0021t^3]$$

dla $t \geq 0$.

Oczekiwane średnie czasy przebywania systemu rurociągu w poszczególnych stanach, po zastosowaniu powyższego wyniku, wzoru (13) oraz przybliżonego całkowania, przyjmują następujące wartości:

$$m(1) \cong 1.79, m(2) \cong 1.61,$$

$$m(3) \cong 1.43, m(4) \cong 1.04,$$

a następnie, na podstawie wzoru (17), średnie czasy przebywania systemu w poszczególnych stanach przyjmują wartości:

$$\bar{m}(1) \cong 0.18, \bar{m}(2) \cong 0.18,$$

$$\bar{m}(3) \cong 0.39, \bar{m}(4) \cong 1.04.$$

Jeśli założymy, że krytycznym stanem bezpieczeństwa jest stan $r = 2$, to funkcja ryzyka systemu, na podstawie wzoru (18), przyjmuje postać

$$r(t) = 1 - \exp[-0.24t - 0.38t - 0.006t^2 - 0.00186t^3]$$

$$\text{dla } t \geq 0.$$

Stąd, po zastosowaniu wzoru (19), otrzymujemy, że

chwila przekroczenia przez funkcję ryzyka systemu dozwolonego poziomu, np. $\delta = 0.05$, jest

$$\tau = r^{-1}(\delta) \cong 0.083 \text{ roku.}$$

Przykład 2. (system kabla energetycznego)

Przyjmijmy, że kabel energetyczny zbudowany jest z 36 identycznych drutów i może przewodzić prąd, gdy co najmniej jeden z drutów przewodzi prąd. Założenie to, wobec Definicji 7, oznacza, że jest to jednorodny system równoległy zbudowany z $n = 36$ elementów. Przyjmując dalej, że poszczególne druty są elementami czterostanowymi ($z = 3$) posiadającymi weibullowskie funkcje bezpieczeństwa

$$s_i(t, \cdot) = [1, s_i(t,1), s_i(t,2), s_i(t,3)], \quad i = 1,2,\dots,36,$$

których składowe

$$s_i(t, u) = \exp[-\beta(u)t^{\alpha(u)}] \text{ dla } t \geq 0, u = 1,2,3,$$

mają parametry

$$\alpha(u) = 2, \beta(u) = (7.07)^{2u-8}, u = 1,2,3,$$

po zastosowaniu **Wniosku 5**, otrzymujemy następujący wzór na funkcję bezpieczeństwa kabla

$$[s_{36}(t,0), s_{36}(t,1), s_{36}(t,2), s_{36}(t,3)]$$

$$= [1, 1 - [1 - \exp[-2t^{0.000008}]]^{36},$$

$$1 - [1 - \exp[-2t^{0.0004}]]^{36}, 1 - [1 - \exp[-2t^{0.02}]]^{36}] \text{ dla } t \geq 0.$$

Średnie wartości czasów przebywania kabla energetycznego w podzbiorach stanów, po zastosowaniu wzoru (13) oraz przybliżonego całkowania, przyjmują następujące wartości:

$$m(1) \cong 723, m(2) \cong 102, m(3) \cong 14.5,$$

$$\sigma(1) \cong 120, \sigma(2) \cong 17, \sigma(3) \cong 2.4,$$

podczas, gdy średnie czasy przebywania tego systemu w poszczególnych stanach, na podstawie wzoru (17), przyjmują wartości:

$$\bar{m}(1) \cong 621, \bar{m}(2) \cong 87.5, \bar{m}(3) \cong 14.5.$$

Jeśli krytycznym stanem jest stan $r = 2$, to funkcja ryzyka systemu, na podstawie wzoru (18), przyjmuje postać

$$r(t) = [1 - \exp[-2t^{0.0004}]]^{36} \text{ dla } t \geq 0.$$

Stąd, po zastosowaniu wzoru (19), otrzymujemy, że chwila przekroczenia przez funkcję ryzyka systemu dozwolonego poziomu, np. $\delta = 0.05$, jest

$$\tau = [\log[-\frac{1}{2}\log(1 - \delta^{1/36})]]^{1/0.0004} = 80 \text{ miesięcy.}$$

Wartości funkcji ryzyka systemu kabla energetycznego są dane w Tabelcy 1.

Tabela 1. Wartości funkcji ryzyka systemu kabla energetycznego

| t | $r(t)$ |
|-----|--------|
| 0 | 0.000 |
| 60 | 0.000 |
| 70 | 0.017 |
| 80 | 0.048 |
| 90 | 0.276 |
| 100 | 0.514 |
| 110 | 0.731 |
| 120 | 0.856 |
| 130 | 0.934 |
| 140 | 0.968 |
| 150 | 0.985 |
| 160 | 0.993 |

Przykład 3. (system liny stalowej)

Rozważmy linę stalową składającą się z $n = 36$ czterostanowych ($z = 3$) identycznych splotek mających wielostanowe wykładnicze funkcje bezpieczeństwa

$$s_i(t, \cdot) = [1, s_i(t,1), s_i(t,2), s_i(t,3)], \quad i = 1,2,\dots,36,$$

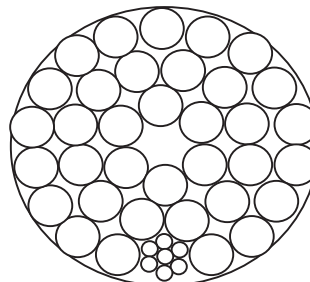
których składowe

$$s_i(t, u) = \exp[-\lambda(u)t] \text{ dla } t \geq 0, u = 1,2,3,$$

charakteryzują się następującymi intensywnościami przejść pomiędzy podzbiorami stanów

$$\lambda(u) = 0.2u/\text{rok}, u = 1,2,3.$$

Przekrój poprzeczny liny stalowej przedstawiony jest na rys. 2.



Rys. 2. Przekrój poprzeczny liny stalowej

Przyjmując, że lina znajduje się w podzbiorze stanów $\{u, u+1, \dots, z\}$, jeśli przynajmniej $m = 10$ spośród jej spletek znajduje się w tym podzbiorze stanów, zgodnie z Definicją 9, wnioskujemy, że jest ona czterostanowym jednorodnym systemem progowym "10 z 36". Wtedy, zgodnie ze wzorami (40)–(41), funkcja bezpieczeństwa liny dana jest wzorem

$$s_{36}^{(10)}(t, \cdot) = [1, s_{36}^{(10)}(t, 1), s_{36}^{(10)}(t, 2), s_{36}^{(10)}(t, 3)],$$

gdzie

$$s_{36}^{(10)}(t, u) = 1 \text{ dla } t < 0, u = 1, 2, 3,$$

oraz

$$s_{36}^{(10)}(t, 1) = 1 - \sum_{i=0}^9 \binom{36}{i} \exp[-i0.2t] [1 - \exp[-0.2t]]^{36-i},$$

$$s_{36}^{(10)}(t, 2) = 1 - \sum_{i=0}^9 \binom{36}{i} \exp[-i0.4t] [1 - \exp[-0.4t]]^{36-i},$$

$$s_{36}^{(10)}(t, 3) = 1 - \sum_{i=0}^9 \binom{36}{i} \exp[-i0.6t] [1 - \exp[-0.6t]]^{36-i}$$

dla $t \geq 0$.

Średnie wartości czasów przebywania liny stalowej w podzbiórach stanów, po zastosowaniu wzoru (13) oraz przybliżonego całkowania, przyjmują następujące wartości:

$$m(1) \cong 6.66, m(2) \cong 3.33, m(3) \cong 2.22,$$

$$\sigma(1) \cong 1.62, \sigma(2) \cong 0.81, \sigma(3) \cong 0.54,$$

podczas, gdy średnie czasy przebywania tego systemu w poszczególnych stanach, na podstawie wzoru (17), przyjmują wartości:

$$\bar{m}(1) \cong 3.33, \bar{m}(2) \cong 1.11, \bar{m}(3) \cong 2.22.$$

Jeśli krytycznym stanem jest stan $r = 2$, to funkcja ryzyka systemu, na podstawie wzoru (18), przyjmuje postać

$$r(t) = \sum_{i=0}^9 \binom{36}{i} \exp[-i0.4t] [1 - \exp[-0.4t]]^{36-i} \text{ dla } t \geq 0.$$

Stąd, po zastosowaniu wzoru (19), otrzymujemy, że chwilą przekroczenia przez funkcję ryzyka systemu dozwolonego poziomu, np. $\delta = 0.05$, jest

$$\tau \cong 2.07 \text{ roku.}$$

Wartości składowych wielostanowej funkcji bezpieczeństwa liny stalowej oraz jej funkcji ryzyka są dane w Tabelicy 2.

Tablica 2. Wartości składowych wielostanowej funkcji bezpieczeństwa oraz funkcji ryzyka liny stalowej

| t | $s_{36}^{(10)}(t, 1)$ | $s_{36}^{(10)}(t, 2)$ | $s_{36}^{(10)}(t, 3)$ | $r(t)$ |
|-----|-----------------------|-----------------------|-----------------------|--------|
| 0.2 | 1.000 | 0.999 | 0.999 | 0.001 |
| 1.4 | 0.999 | 0.996 | 0.945 | 0.004 |
| 1.8 | 0.999 | 0.980 | 0.776 | 0.020 |
| 2.2 | 0.999 | 0.927 | 0.493 | 0.073 |
| 2.6 | 0.997 | 0.815 | 0.231 | 0.185 |
| 3.0 | 0.994 | 0.642 | 0.080 | 0.358 |
| 3.4 | 0.986 | 0.444 | 0.021 | 0.556 |
| 3.8 | 0.971 | 0.267 | 0.004 | 0.733 |
| 4.2 | 0.945 | 0.141 | 0.000 | 0.859 |
| 4.6 | 0.906 | 0.065 | 0.000 | 0.935 |
| 5.0 | 0.849 | 0.027 | 0.000 | 0.973 |
| 5.4 | 0.776 | 0.010 | 0.000 | 0.990 |
| 5.8 | 0.689 | 0.003 | 0.000 | 0.997 |
| 6.2 | 0.593 | 0.001 | 0.000 | 0.999 |
| 7.0 | 0.396 | 0.000 | 0.000 | 1.000 |

LITERATURA

- [1] Kołowrocki, K., *Reliability of Large Systems*, Elsevier: Amsterdam-Boston - Heidelberg - London - New York - Oxford - Paris - San Diego - San Francisco - Singapore - Sydney - Tokyo, 2004.
- [2] Soszynska, J., *Reliability of large series-parallel system in variable operation conditions*. Proc. European Safety and Reliability Conference, ESREL 2005, 27-30 June, 2005, Tri City, Poland.
- [3] *Advances in Safety and Reliability*, Edited by K. Kołowrocki, Volume 2, 1869-1876.
- [4] A. A. Balkema Publishers: Leiden - London - New York - Philadelphia - Singapore, 2005.
- [5] Xue J., Yang K., Dynamic reliability analysis of coherent multi-state systems. *IEEE Transactions on Reliability* 4, 44, 1995, 683–688.

Krzysztof KOŁOWROCKI jest profesorem



zwyczajnym oraz kierownikiem Katedry Matematyki na Wydziale Nawigacyjnym Akademii Morskiej w Gdyni. Jest także wiceprezesem Polskiego Towarzystwa Bezpieczeństwa i Niezawodności. Jego obszarem zainteresowań naukowych jest modelowanie bezpieczeństwa i niezawodności

złożonych systemów i procesów. W tym zakresie opublikował ponad 200 prac naukowych. Więcej danych można znaleźć na jego stronie internetowej <http://www.am.gdynia.pl/~katmatkk/>