

## WPLYW INTERPOLACJI NA PROCEDURĘ LINIOWEJ DECYMACJI

Jan ADAMCZYK  
Piotr KRZYWORZEKA  
Witold CIOCH

Katedra Mechaniki i Wibroakustyki  
Akademia Górniczo-Hutnicza  
Al. Mickiewicza 30, 30-065 Kraków  
cioch@agh.edu.pl

### Streszczenie

Postać widmowa nadaje się do analizy sygnałów stacjonarnych. Procedura liniowej decymacji (PLD) sprowadza sygnał przy zmiennej prędkości obrotowej do postaci odpowiadającej stałym obrotom. W opracowaniu przedstawiono opis matematyczny i wyprowadzenie oryginalnej PLD. Zapis algorytmiczny, który zamieszczono umożliwia tworzenia implementacji programowych. Pokazano możliwości stosowania metod interpolacyjnych w PLD. Wyniki w postaci widm amplitudowych przemieszczeń drgań wału na wybiegu dla omawianych metod przedstawiono w zestawieniu graficznym. W opracowaniu podkreślono wpływ wartości współczynnika decymacji na selektywność widmową.

Słowa kluczowe: sygnał niestacjonarny, decymacja.

### Interpolation Influence in Linear Decimation Procedure

#### Summary

Nonstationary signals cannot be analysed using the spectrum analysis methods. A Linear Decimation Procedure transforms signals measured for a changeable rotational speed into signals corresponding to the constant speed. In this article a mathematical description and derivation of the original LDP were presented. An algorithmic notation of the method allows to create program implementations. Also the possibilities of the usage of interpolation methods for PLD were presented. The obtained results, in the form of the amplitude spectrums of the shaft vibration displacement during rotor run-down, for the methods presented in this article were graphically presented. In this article the influence of the decimation ratio on spectral selectivity was emphasised.

Key words: nonstationary signals, decimation

### 1. Analiza sygnałów niestacjonarnych

Zmienne warunki pracy powodują trudności w diagnozowaniu przy użyciu analizy opartej o widmo amplitudowe. Trudności te są związane z tym, że prosta postać widmowa nadaje się do analizy sygnałów stacjonarnych. Diagnozowanie w zmiennych warunkach pracy powoduje rozmywanie się widma czego efektem jest brak selektywności prążków odpowiadających poszczególnym harmonikom częstości obrotowej. Poniżej zademonstrowano oryginalną procedurę decymacji umożliwiającą przedstawienie sygnału niestacjonarnego (zmienna prędkość obrotowa) w postaci stacjonarnej, poprawiając selektywność widmową. Procedura liniowej decymacji (PLD) polega na powtórny przepróbkowaniu sygnału z liniowo zmiennym współczynnikiem decymacji doprowadzając do stałej liczby próbek na cykl. Procedura ta została szerzej przedstawiona w pracach [1][2][3][4][5].

### 2. Procedura liniowej decymacji

Z twierdzenia Kotelnikowa-Shannona wynika kryterium określania okresu próbkowania, a w konsekwencji częstotliwości próbkowania zwanej częstotliwością Nequista.

Dla procedur decymacyjnych wartość częstotliwości próbkowania powinna spełniać:

$$f_s > 2f_{\max} Dc \quad (1)$$

gdzie:

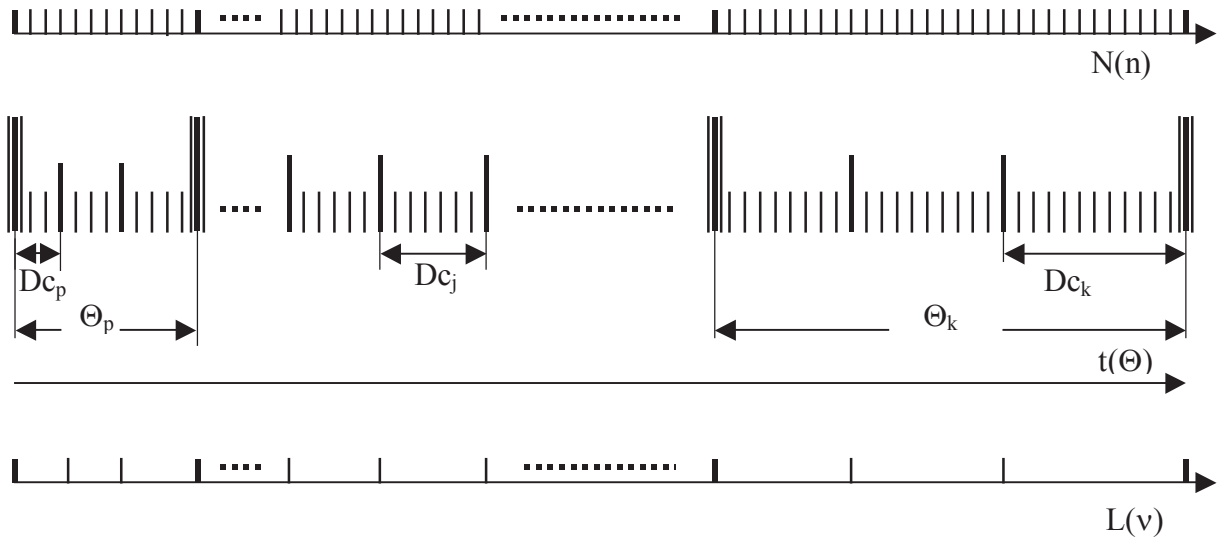
- $f_s$  - częstotliwość próbkowania,
- $f_{\max}$  - górna częstotliwość analizowanego pasma sygnału,
- $Dc$  - wartość współczynnika decymacji.

Pasma sygnału powinno być ograniczone filtracją dolnoprzepustową do częstotliwości poniżej  $f_{\max}$ . Dla tak określonej częstotliwości próbkowania ilość próbek okna obserwacji wyznacza zależność:

$$N = \frac{f_s}{r} \quad (2)$$

Ostatecznie ze względu na poprawność działania FFT ilość próbek okna obserwacji określa wzór (3), gdzie N jest potęgą cyfry 2:

gdzie:  $N = 2^k \geq \frac{f_s}{r}, \quad k \in \mathbb{C} \quad (3)$   
 r- wymagana rozdzielczość widmowa



Rys. 1. Procedura liniowej decymacji

- Θ - czas cyklu
- t(Θ) - czas obserwacji
- N(n) - pierwotny zbiór próbek w oknie obserwacji
- L(v) – wtórny zbiór próbek w oknie obserwacji (po PLD)
- Dc<sub>p</sub> - początkowy współczynnik decymacji
- Dc<sub>k</sub> - końcowy współczynnik decymacji

### 3. Wyznaczenie współczynnika decymacji

Określenie współczynnika decymacji Dc jest kluczowym elementem PLD. Określa on krok z jakim przepróbkowywany jest sygnał. Jest on zgodny z przyrostem lub spadkiem prędkości obrotowej tzn. ze zmianą cyklu.

Zakładając końcowy współczynnik decymacji Dc<sub>k</sub> można wyznaczyć ilość próbek w ostatnim cyklu okna obserwacji po zastosowaniu przepróbkowania. Wybór stałego końcowego współczynnika decymacji umożliwia sprowadzenie sygnału do stacjonarności w oknie obserwacji dla ostatniego cyklu, co jest przy analizie w czasie rzeczywistym dogodnie.

$$L_{\Theta_k} = \frac{N_{\Theta_k}}{Dc_k} \quad (4)$$

gdzie:

L<sub>Θ<sub>k</sub></sub> - ilość próbek ostatniego cyklu okna obserwacji nowo powstałego wektora

N<sub>Θ<sub>k</sub></sub> - ilość próbek ostatniego cyklu okna obserwacji sygnału pierwotnego

Dc<sub>k</sub> - założony końcowy współczynnik decymacji

Ponieważ ilość próbek musi być stała na cykl w nowo powstałym wektorze – przebieg stacjonarny -

$$L_{\Theta_j} = L_{\Theta_k} = L_{\Theta_p} = \text{const} \quad (5)$$

L<sub>Θ<sub>j</sub></sub> – ilość próbek w j-tym cyklu przepróbkowanego wektora

początkowy współczynnik decymacji możemy wyznaczyć z zależności:

$$Dc_p = \frac{N_{\Theta_p}}{L_{\Theta_k}} = Dc_k \frac{N_{\Theta_p}}{N_{\Theta_k}} \quad (6)$$

Zakładając liniową zmianę współczynnika decymacji zgodnie z wykresem 2 wyznaczamy współczynniki decymacji Dc<sub>n</sub> dla n ∈ [0, n<sub>Dk</sub>], gdzie

$n$  odpowiada numerom próbek wektora pierwotnego podlegającym PLD.

$$Dc_n = Dc_p + \Delta Dc_n \quad (7)$$

$$\frac{\Delta Dc_n}{\Delta Dc} = \frac{n}{n_{Dk}} \quad (8)$$

gdzie:

$$n_{Dk} = n_k - Dc_k \quad (9)$$

$n_{Dk}$  – numer próbki umożliwiający zakończenie PLD w zakresie wektora pierwotnego

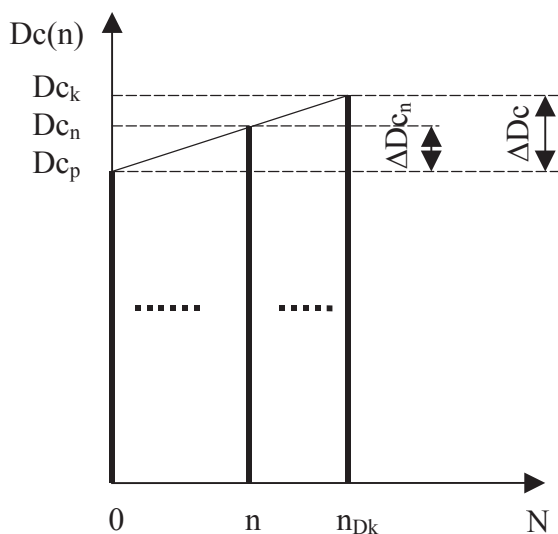
$n_k$  – numer ostatniej próbki okna obserwacji

stąd:

$$\Delta Dc_n = \frac{n}{n_{Dk}} \Delta Dc \quad (10)$$

Wstawiając (6) i (10) do (7) otrzymujemy:

$$Dc_n = Dc_k \frac{N_{\Theta p}}{N_{\Theta k}} + \frac{n}{n_{Dk}} (Dc_k - Dc_p) \quad (11)$$

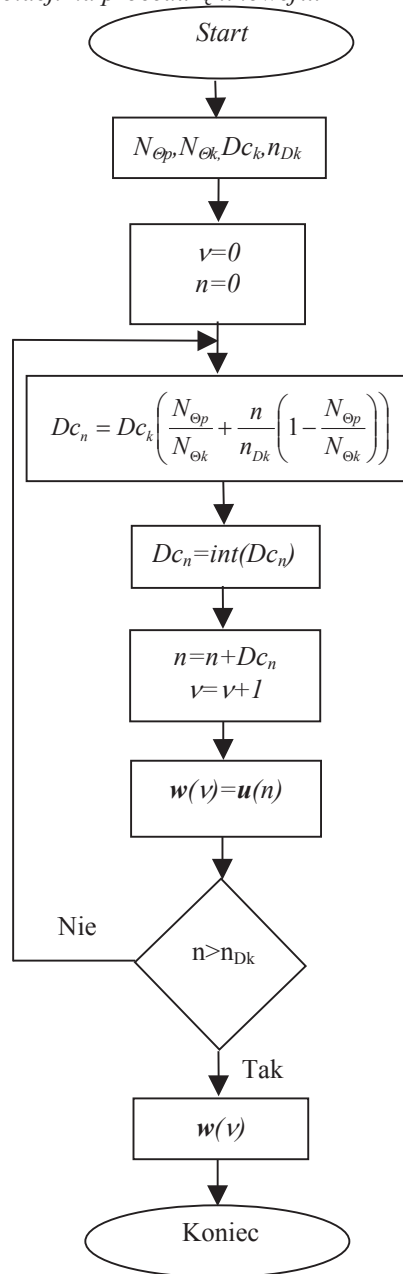


Rys. 2. Wyznaczenie współczynnika decymacji w zależności od numeru próbki wektora pierwotnego

Ostatecznie można procedurę wyznaczania współczynnika decymacji zapisać w postaci:

$$Dc_n = Dc_k \left( \frac{N_{\Theta p}}{N_{\Theta k}} + \frac{n}{n_{Dk}} \left( 1 - \frac{N_{\Theta p}}{N_{\Theta k}} \right) \right) \quad (12)$$

Realizację dynamicznego przepróbkowania sygnału przedstawia algorytm pętli PLD na rys. 3.



Rys. 3. Algorytm PLD  
 $u(n)$  – wektor pierwotny  
 $w(v)$  – wektor wtórny

dla  $n=0$

$$Dc_n = Dc_k \left( \frac{N_{\Theta p}}{N_{\Theta k}} \right) = Dc_p \quad (13)$$

$$w(1) = u(Dc_p) \quad (14)$$

dla  $n=n_{Dk}$

$$Dc_n = Dc_k \left[ \frac{N_{\Theta p}}{N_{\Theta k}} + \frac{N_{\Theta k} - N_{\Theta p}}{N_{\Theta k}} \right] = Dc_k \quad (15)$$

$$w(v_k) = u(n_{Dk} + Dc_k) = u(n_k) \quad (16)$$

gdzie:

$u(n)$  – wektor pierwotny

$w(v)$  – wektor wtórny (przepróbkowany)

Jeśli numer ostatniej próbki poddanej PLD nie jest równy  $n_k$ , procedura umożliwia zakończenie decymacji w zakresie wektora pierwotnego.

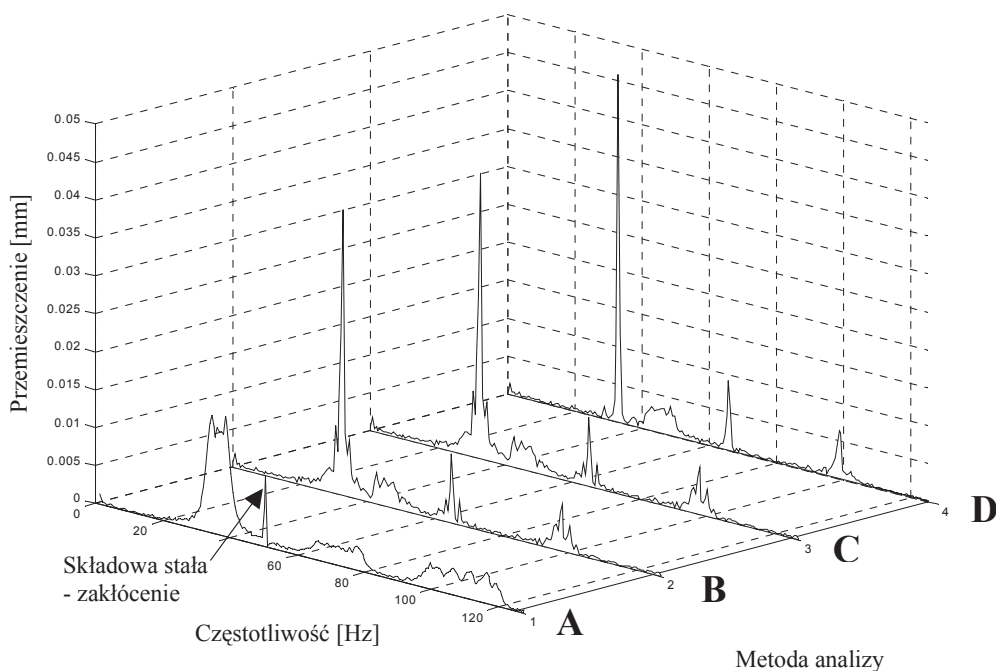
Przyjmowanie przez współczynnik decymacji wartości całkowitych konieczne jest do wyboru kolejnych próbek (numer próbki) z wektora pierwotnego. Zaokrąglanie można zastąpić obliczaniem wartości nowego wektora przez zastosowanie interpolacji. Dla niecałkowitego współczynnika decymacji wartość nowej próbki jest wartością interpolowaną między wybranymi próbkami wektora pierwotnego. Postępowanie takie przybliża metodę do próbkowania zgodnego z chwilową wartością prędkości kątowej. W następnym punkcie (p. 4) przedstawiony zostanie wpływ zastosowania tego typu analizy na rozdzielczość widmową.

#### 4 Metody interpolacyjne w PLD

Na rysunku 4 przedstawiono przykłady zastosowania PLD z wykorzystaniem interpolacji:

- widmo amplitudowe bez PLD;
- widmo amplitudowe z PLD, współczynnik decymacji  $Dc_k=20$ ,  $Dc_n$  – liczba całkowita;
- widmo amplitudowe z PLD, współczynnik decymacji  $Dc_k=20$ , interpolacja sygnału dla  $Dc_n$  będącego liczbą niecałkowitą (dokładność 0.1);
- widmo amplitudowe z PLD, współczynnik decymacji  $Dc_k=40$ ,  $Dc_n$  – liczba całkowita, dwukrotne nadpróbkowanie sygnału (interpolacja).

Widmo amplitudowe drgań przemieszczeń wału na wybiegu



Rys. 4. Widmo amplitudowe drgań przemieszczeń wału na wybiegu dla różnych metod analizy.

A – widmo amplitudowe;

B – widmo amplitudowe z PLD,  $Dc_k=20$ ,  $Dc_n \in C$ ;

C – widmo amplitudowe z PLD,  $Dc_k=20$ ,  $Dc_n \in R$ , dokładność 0,1 - interpolacja sygnału;

D – widmo amplitudowe z PLD,  $Dc_k=40$ ,  $Dc_n \in C$ , dwukrotne nadpróbkowanie sygnału (interpolacja).

Porównując wykresy na rysunku 4 widać, że największa selektywność prążków jest na wykresie D otrzymanym dla współczynnika decymacji końcowej  $Dc_k=40$ . Dla otrzymania tego samego pasma widma (125 Hz) co przy analizie przy

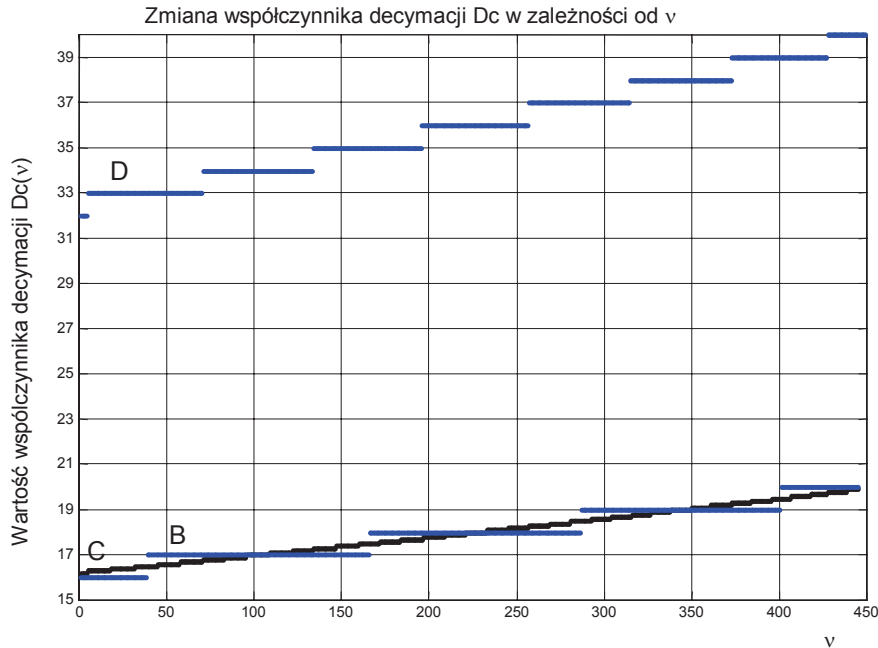
mniejszym współczynnikiem decymacji  $Dc_k=20$  (wykres B i C) należy dokonać dwukrotnego nadpróbkowania sygnału. Jeśli sygnał jest już zarejestrowany można to zrealizować zwiększając sztucznie częstotliwość próbkowania przez

zastosowanie interpolacji. Przy stosowaniu metod interpolacyjnych zalecane jest wcześniejsze przefiltrowanie sygnału filtrem dolnoprzepustowym, co stanowi regułę wszelkich procedur decymacyjnych [6].

Zastosowanie metody interpolacji wartości sygnału dla niecałkowitych współczynników decymacji (wykres C) z dokładnością współczynnika 0.1 nie powoduje widocznej poprawy jakościowej widma

(porównaj z wykresem B).

Na rysunku 5 przedstawiono wartości współczynnika decymacji odpowiadające kolejnym próbkom wektora wtórnego  $Dc_n(v)$



Rys. 5. Wartość współczynnika decymacji w zależności od próbek wektora wtórnego  $v$  dla metod z rys. 4.

### Wnioski

1. Procedura PLD nie wymaga złożonych obliczeń i jest prosta w implementacji on-line.
2. Metod PLD eliminując liniowy trend cyklu zachowuje jego fluktuacje w przedziale transformacji. Zachowuje zatem informacje o ewentualnych modulacjach kąta [4].
3. Procedura nie wymaga dokładnego śledzenia kąta obrotu.
4. Zadowalające rezultaty otrzymuje się już przy  $Dc_k=20$ . Dodatkową poprawę selektywności widma można otrzymać przez zwiększenie wartości współczynnika decymacji.
5. Zwiększenie dokładności odwzorowania przez zastosowanie interpolacji sygnału dla niecałkowitych współczynników decymacji (śledzenie kąta obrotu) nie poprawia w znaczący sposób selektywności widmowej.

### Oznaczenia

PLD - procedura liniowej decymacji,  
 $\mathbf{u}(n)$  - wektor pierwotny sygnału,  
 $\mathbf{w}(v)$  - wektor wtórny sygnału,  
 $N(n)$  - pierwotny zbiór próbek,

$L(v)$  - wtórny zbiór próbek,  
 $n$  - numer próbki wektora pierwotnego,  
 $n_k$  - numer ostatniej próbki wektora pierwotnego (ilość próbek okna obserwacji),  
 $n_{Dk}$  - numer próbki umożliwiający zakończenie PLD w zakresie wektora pierwotnego,  
 $v_k$  - numer ostatniej próbki wektora wtórnego,  
 $Dc_k$  - końcowy współczynnik decymacji,  
 $Dc_p$  - początkowy współczynnik decymacji,  
 $Dc_n$  - współczynnik decymacji odpowiadający  $n$ -tej próbce wektora pierwotnego,  
 $t(\Theta)$  - czas obserwacji,  
 $\Theta$  - czas cyklu,  
 $\Theta_p$  - cykl początkowy okna obserwacji  
 $\Theta_k$  - cykl końcowy okna obserwacji  
 $N_{\Theta p}$  - ilość próbek początkowego cyklu okna obserwacji,  
 $N_{\Theta k}$  - ilość próbek końcowego cyklu okna obserwacji,  
 $L_{\Theta p}$  - ilość próbek początkowego cyklu okna obserwacji wektora wtórnego,  
 $L_{\Theta k}$  - ilość próbek końcowego cyklu okna obserwacji wektora wtórnego,  
 $L_{\Theta j}$  - ilość próbek  $j$ -tego cyklu wektora wtórnego.

**Literatura**

- [1] Adamczyk J., Krzyworzecka P., Łopacz H.: Systemy synchronicznego przetwarzania sygnałów diagnostycznych. Collegium Columbinum, Kraków, 1999.
- [2] Adamczyk J., Krzyworzecka P., Cioch W.: Wykorzystanie decymacji dynamicznej w diagnozowaniu maszyn. Mat XXVIII Sympozjum Diagnostyka Maszyn, Z.N. Pol. Śl. Katowice 2001.
- [3] Adamczyk J., Cioch W., Krzyworzecka P.: Wpływ dynamicznej decymacji sygnału drganiowego na wykrywalność stanu krytycznego maszyn wirnikowych w nieustalonych warunkach pracy. II International Scientifically – Technical Conference EXPLO-DIESEL & GAS TURBINE '01, Gdańsk-Miedzyzdroje-Kopenhaga.
- [4] Krzyworzecka P.: Synchroniczne wspomaganie odwzorowań diagnostycznych. Uczelniane Wydawnictwa Naukowo – Dydaktyczne, Kraków 2001.
- [5] Krzyworzecka P., Cioch W.: Dynamiczna kompensacja wpływu zmian długości cyklu na sygnał drganiowy. Mat XXVII Sympozjum Diagnostyka Maszyn, z. 1, Z.N. Pol. Śl. Katowice 2000.
- [6] Lyons R. G.: Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów, WKŁ, W-wa, 1999.

Pracę zrealizowano w ramach projektu badawczego KBN nr 7 T07B 05318.



Prof. dr hab. inż. Jan Adamczyk jest absolwentem Wydziału Maszyn Górniczych i Hutniczych Akademii Górniczo-Hutniczej 1962 r. Na tym Wydziale w 1971 r. obronił pracę doktorską uzyskując stopień doktora o specjalności mechanika stosowana, a w 1979 r. uzyskał stopień doktora habilitowanego. W 1991 r. otrzymał tytuł profesora nauk technicznych w specjalności: mechanika stosowana, wibroakustyka i inżynieria dźwięku, diagnostyka techniczna. Jest autorem około 140 publikacji w tym 9 podręczników i monografii. Zajmuje się diagnostyką maszyn i urządzeń za pomocą analizy sygnałów wibroakustycznych, dynamiką maszyn oraz modelowaniem dynamicznym układów mechanicznych ze względu na drgania układów liniowych i nieliniowych. Wiele prac poświęcił ograniczaniu emisji energii wibroakustycznej, zabezpieczeniom akustycznym i antywibracyjnym, oraz nagłaśnianiu pomieszczeń.



Dr inż. Piotr Krzyworzecka studiował na Wydziale Elektryfikacji Górnictwa i Hutnictwa AGH uzyskując w roku 1964 dyplom magistra inżyniera elektryka o specjalności automatyka, a w roku 1972 doktorat z zakresu diagnostyki technicznej. Pracuje na tejże uczelni do dziś, początkowo w Katedrze Maszyn i Pomiarów Elektrycznych, potem (od 1987) w Katedrze Mechaniki i Wibroakustyki. Jest autorem ok. 60 publikacji, głównie o tematyce diagnostycznej, rzeczoznawcą SEP w zakresie elektroakustyki, sekretarzem Polskiej Sekcji Audio Engineering Society, a także członkiem PTDT od momentu jego powstania.



Mgr inż. Witold Cioch jest absolwentem Wydziału Budowy Maszyn i Lotnictwa Politechniki Rzeszowskiej 1996 r., gdzie otrzymał dyplom magistra inżyniera mechanika o specjalności napędy lotnicze i Wydziału Inżynierii Mechanicznej i Robotyki Akademii Górniczo-Hutniczej 1998 r., gdzie uzyskał dyplom magistra inżyniera o specjalności wibroakustyka. Obecnie jest doktorantem w Katedrze Mechaniki i Wibroakustyki AGH. Autor 20 publikacji z tematyki diagnostyki technicznej i szeroko rozumianej wibroakustyki. Zajmuje się zagadnieniami cyfrowego przetwarzania sygnałów diagnostycznych, sieciami neuronowymi i analizą języka eksploatacyjnego.