

APROKSYMACJA SYGNAŁU PRZEJŚCIOWEGO PRĘDKOŚCI OBROTOWEJ Z UŻYCIEM FUNKCJI WZORCA

Waldemar PROCH

Wydział Nauk Technicznych
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

ul. Okrzei 1a, 10-266 Olsztyn, fax /0-89/ 526 58 39, tel /0-89/ 526 63 80

Streszczenie

W pracy podano model matematyczny sygnału przejściowego prędkości obrotowej silnika elektrycznego. Przeprowadzono analizę sygnału wyznaczając parametry procesu przejściowego: czasy opóźnienia i narastania oraz wartości: początkową i ustaloną przebiegu.

Słowa kluczowe: model matematyczny sygnału, sygnał nieokresowy, aproksymacja.

APPROXIMATION OF TRANSIENT SIGNAL OF ROTATIONAL SPEED USING FUNCTION OF STANDARD

Summary

In the paper there was presented the mathematical model of the transient signal of rotational speed of an electric motor. The analysis of the signal was done determining the parameters of the transient process: delay and accretion times, initial and fixed values.

1. WPROWADZENIE

Sygnały przejściowe prędkości obrotowej wału silnika elektrycznego należą do grupy sygnałów nieokresowych. Wykresy czasowe sygnału przejściowego mogą przedstawiać analityczne rozwiązanie równań ruchu, lub częściej zapis wielkości elektrycznej na wyjściu przetwornika prędkości obrotowej. W drugim przypadku matematyczny opis rejestrowanego sygnału możemy otrzymać drogą aproksymacji uporządkowanego w czasie zbioru danych. W prostych przypadkach mogą to być wzory empiryczne, w pozostałych zalecane jest użycie funkcji Legendre'a. Zastosowanie szeregów Fouriera prowadzi do powstania znacznych błędów aproksymacji w punktach granicznych przedziału czasowego, które spowodowane są okresowością szeregów.

2. MODEL MATEMATYCZNY SYGNAŁU

Model matematyczny sygnału przejściowego prędkości obrotowej, który po raz pierwszy przedstawiono w pracy [1,2] powstał na podstawie analizy struktury czasowej sygnału. Współrzędne x_i, t_i punktów ekstremalnych na wykresie czasowym

sygnału (rys.1) pozwoliły wyróżnić szereg wielkości w dziedzinie czasu i wartości sygnału. W dziedzinie czasu są to:

-czas 'makro' t o wartości początkowej t_0 ,

$$\text{-czas rzeczywisty } \tau = t - t_0, 0 \leq \tau = \sum_{i=0}^{n-1} \tau_i \leq T \quad (1)$$

$$\text{-czas 'mikro' } \tau_i = t - t_0, 0 \leq \tau_i \leq T_i, T_i = t_{i+1} - t_0 \quad (2)$$

-zmienna $p = \tau / T$, gdzie $0 \leq p \leq 1$,

$$\text{-zmienna } p_i = \tau_i / T_i, p = \sum_{i=0}^{n-1} k_i p_i \quad (3)$$

-współczynniki wypełnienia $k_i = T_i / T$,

$$\sum_{i=0}^{n-1} k_i = 1 \quad (4)$$

W dziedzinie wartości sygnału wyróżniono:

-mikrofunkcje $x_i(\tau_i) = x(t) - x(t_i)$, dla $t_i \leq t \leq t_{i+1}$,

$x_i(\tau_i) = x_i^+(\tau_i)$, dla $x(t) \geq x(t_i)$, oraz $x_i(\tau_i) = x_i^-(\tau_i)$, dla $x(t) \leq x(t_i)$,

-mikrofunkcje unormowane $h_i = x_i(\tau_i) / x_i(T_i)$, dla $0 \leq h_i \leq 1$,

-funkcje unormowane h^+, h^- ,

$$0 \leq h^+ = \sum_{i=0}^{n-1} h_i r_i^+ \leq 1, \text{ oraz } 0 \leq h^- = \sum_{i=0}^{n-1} h_i r_i^- \leq 1,$$

-współczynniki normy r_i^+, r_i^- ,

$$r_i^+ = x_i^+(T_i) / \sum_{i=0}^{n-1} x_i^+(T_i),$$

$$r_i^- = x_i^-(T_i) / \sum_{i=0}^{n-1} x_i^-(T_i).$$

Mikrofunkcje x_i mają właściwości:

$$x_i(\tau_j) = \begin{cases} 0(\tau_j), & j \neq i, \\ x_i(\tau_i), & j = i \end{cases} \quad (5)$$

Wynika stąd, że w czasie rzeczywistym τ funkcja $x_i(\tau)$ przyjmuje następujące wartości

$$x_i(\tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \tau \leq \sum_{i=0}^{i-1} T_i, \\ x_i(\tau_i), & \sum_{i=0}^{i-1} T_i \leq \tau \leq \sum_{i=0}^i T_i, \\ x_i(T_i), & \tau \geq \sum_{i=0}^i T_i. \end{cases} \quad (6)$$

Wykazano [1], że sygnały sinusoidalne zawierają mikrofunkcje h_i o właściwościach sygnału przejściowego $h_i = 1/2(1 - \cos \pi \tau / T_i)$. Funkcje h^+, h^- pozwalają wyróżnić 4 grupy sygnałów:

- 1-o stałej wartości, jeśli h^+, h^- są nieokreślone,
- 2-rosnące (niemalejące), gdy h^+ określone, h^- nieokreślone,
- 3-malejące (nierosnące), gdy h^+ nieokreślone, h^- określone,
- 4-malejące lub rosnące naprzemian w przedziałach czasu τ_i dla których istnieją h^+, h^- .

Są to sygnały deterministyczne i stochastyczne. Sumy i różnice h^+, h^- wyznaczają funkcje złożone H_1, H_2 o postaci $H_1 = (h^+ + h^-) / 2, H_2 = (h^+ - h^-) / 2$. Funkcja H_1 rośnie (niemaleje) od 0 do 1 w przedziale T , natomiast H_2 posiada lokalne ekstrema wewnątrz przedziału zmienności T ,

przyjmując wartości zerowe na jego końcach. Sygnały przejściowe, dla których istnieją h^+, h^- przyjmują więc postać funkcji czasu:

$$x(t) = x(t_0) + X(T)H_1 + (X^+ - X^-)H_2. \quad (7)$$

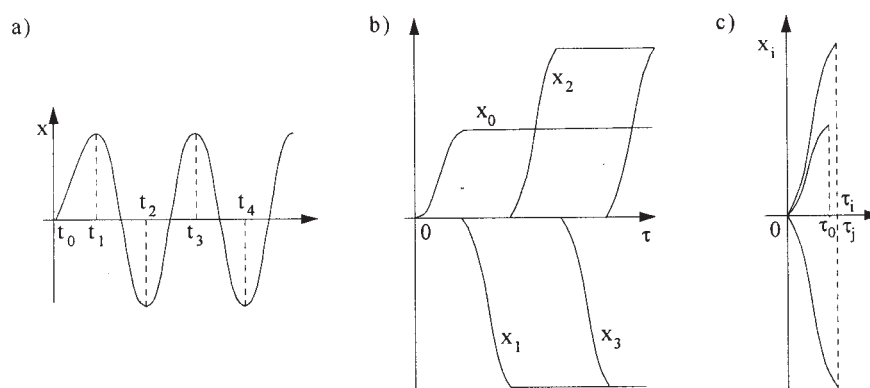
Jest to model matematyczny sygnału należącego do grupy 4gdzie

$$X^+ = \sum_{i=0}^{n-1} x_i^+(T_i), X^- = \sum_{i=0}^{n-1} x_i^-(T_i). \quad (8)$$

Właściwości H_1 ma funkcja $(1 - \cos(\pi \tau / T_i)) / 2$ utworzona z mikrofunkcji h_i -składowych sygnałów okresowych $\sin \alpha t, \cos \alpha t$. Ze względu na częstotliwość występowania obu funkcji w opisie i analizie sygnałów okresowych, funkcję $H_1 = (1 - \cos \pi \tau / T_i) / 2$ należałoby uznać za wzorcową funkcję dla nieokresowego sygnału przejściowego. Właściwości funkcji H_2 ma szereg trygonometryczny Fouriera złożony z sinusów

$$\text{o postaci: } H_2 = \sum_{k=1}^M b_k \sin(k \pi \tau / T).$$

Funkcje szeregu są ortonormalne w przedziale $[0, T]$. Wprowadzenie funkcji H_1 o proponowanej postaci umożliwi obliczenie czasu trwania procesu przejściowego, oraz wartości ustalonej dla wzorca odtworzonego na zbiorze wartości sygnału metodą aproksymacji średniokwadratowej. Funkcja H_2 pozwala analizować powstałą różnicę pomiędzy rzeczywistym sygnałem przejściowym i odtworzonym na nim przebiegiem funkcji wzorca. Funkcje H_1, H_2 mogą być użyte także do analizy innych sygnałów niestacjonarnych.



Rys.1. Wykresy czasowe: a-sygnał w czasie t , b- składowe sygnału w czasie τ , c-składowe sygnału w czasie τ_i

3. APROKSYMACJA SYGNAŁU PRZEJŚCIOWEGO PRĘDKOŚCI OBROTOWEJ

Przedmiotem analizy jest wykres czasowy (rys.2) rozbiegu silnika asynchronicznego zarejestrowany w postaci napięcia na wyjściu prądnicy tachometrycznej sprzężonej z silnikiem. Celem analizy jest aproksymacja krzywej rozbiegu, oraz obliczenie parametrów charakteryzujących proces przejściowy: czas opóźnienia rozruchu, czas narastania i wartość ustaloną procesu przejściowego.

3.1. Wyznaczenie parametrów sygnału

Wartości parametrów zostaną wyznaczone metodą średniokwadratowej aproksymacji sygnału niemalejącymi funkcjami ϕ_i tworzącymi sumę

$$\sum_{i=0}^2 \phi_i(\tau), \text{ gdzie:} \quad (9)$$

$$-\phi_0(\tau) = a_0, 0 \leq \tau_0 \leq T_0, 0 \leq \tau \leq T,$$

$$-\phi_1(\tau) = a_1/2(1 - \cos \pi \tau / T_1), 0 \leq \tau_1 \leq T_1, T_0 \leq \tau \leq T_0 + T_1,$$

$$-\phi_2(\tau) = a_1, T_0 + T_1 \leq \tau \leq T,$$

$$-\phi_3(\tau) = 0, 0 \leq \tau_2 \leq T_2, T_0 + T_1 \leq \tau \leq T, T = T_0 + T_1 + T_2,$$

przy czym T_0 -czas opóźnienia rozruchu,

T_1 -czas narastania do wartości ustalonej,

T_2 -czas trwania stanu ustalonego,

a_0 -stała, wyznaczona na odcinku T_0 ,

a_1 -wartość ustalona.

Dla ułatwienia obliczeń wprowadzamy współczynniki: $k_0 = T_0/T$, $k_1 = T_1/T$. Współczynniki a_i, k_i wyznaczamy minimalizując różnicę

$$\text{średniokwadratową } \int_0^T (x - \sum_{i=0}^2 \phi_i)^2 d\tau = R_c^2 \quad (10).$$

Dla danych w postaci N próbek w równo-oddalonych punktach na odcinku $T = (N-1)T_s$ zapis różnicy przyjmie postać:

$$\sum_{n=0}^{N-1} (x(nT_s) - \sum_{i=0}^2 \phi_i(nT_s))^2 = R_s^2, \text{ gdzie } N \text{ jest}$$

liczbą próbek w przedziale T, T_s jest okresem próbkowania, n jest numerem kolejnej próbki.

Wartości a_0, k_0 dla odcinka opóźnienia wyznaczamy na podstawie zależności:

$$\delta R_c^2 / \delta a_0 = \int_0^{k_0 T} (x - a_0) d\tau = 0 \quad (11)$$

Wyznaczona stąd wartość średnia

$$a_0 = (1/k_0 T) \int_0^{k_0 T} (x) d\tau \text{ staje się funkcją zmiennej}$$

k_0 . Wartość k_0 wybieramy z warunku

$$(\delta R_c^2 / \delta a_0) (\delta a_0 / \delta k_0) = \int_0^{k_0 T} (x - a_0) (\delta a_0 / \delta k_0) d\tau = 0. \quad (12)$$

Wartości zerowe pochodnej $\delta a_0 / \delta k_0$ wyznaczają chwile $k_0 T$ spośród których wybieramy czas opóźnienia T_0 procesu przejściowego.

Wartości a_1, k_1 wyznaczamy z warunków:

$$\delta R_c^2 / \delta a_1 = \sum_{n=n_0}^N (x_1(n) - a_1 C_n) C_n = 0 \quad (13)$$

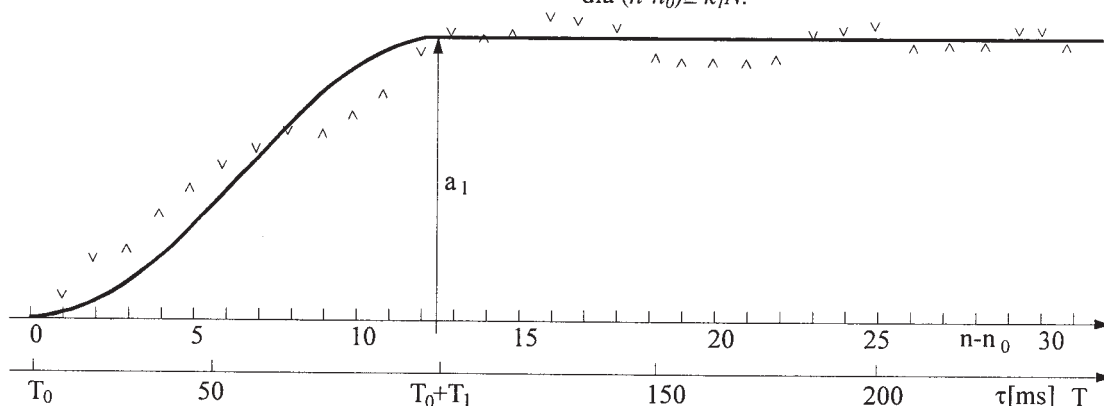
$$\delta R_c^2 / \delta k_1 = \sum_{n=n_0}^N (x_1(n) - a_1 C_n) D_n = 0, \quad (14)$$

gdzie $x_1 = x(n) - a_0, C_n = 1 - \cos(\pi(n-n_0)/k_1 N)$,

przy czym $C_n = 2$ dla $(n-n_0) \geq k_1 N$,

$D_n = (n-n_0) \sin(\pi(n-n_0)/k_1 N)$, przy czym $D_n = 0$

dla $(n-n_0) \geq k_1 N$.



Rys.2. Wykres czasowy rozbiegu silnika elektrycznego

Obliczenia wykonujemy metodą iteracyjną wybierając wartości $k_1^{(j)}$ dla j -ej iteracji, a następnie wyznaczając wartości $a_1^{(j)}$. Z warunku (13) otrzymujemy wartość

$$a_{13}^{(j)} = \left(\sum_{n=n_0}^N ((x_1(n)) C_n) \right) / \sum_{n=n_0}^N C_n^2, \quad (15)$$

a z warunku (14) otrzymamy wartość określoną wzorem (16).

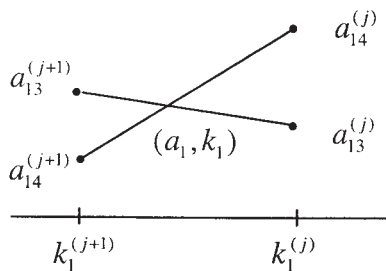
$$a_{14}^{(j)} = \left(\sum_{n=n_0}^N ((x_1(n-n_0))D_n) \right) / \sum_{n=n_0}^N C_n D_n \quad (16)$$

Wybierając $k_l^{(j)}$ dążymy do minimalizacji różnicy $a_{13}^{(j)} - a_{14}^{(j)}$. Jeżeli $a_{14}^{(j)} > a_{13}^{(j)}$ to dla kolejnej $j+1$ iteracji należy wybrać $k_l^{(j+1)} < k_l^{(j)}$. Dla przeciwnego przypadku zmieniamy zwroty nierówności. Zbieżność procesu iteracyjnego można przyspieszyć, jeżeli wybierzemy dostatecznie bliskie wartości $k_l^{(j)}, k_l^{(j+1)}$, tak aby $a_{14}^{(j)} > a_{13}^{(j)}$, oraz $a_{14}^{(j+1)} < a_{13}^{(j+1)}$, a następnie wyznaczamy równanie prostych przechodzących przez pary punktów $a_{13}^{(j)}, a_{13}^{(j+1)}$, oraz $a_{14}^{(j)}, a_{14}^{(j+1)}$. Współrzędne punktu przecięcia prostych wyznaczają wartości a_1, k_l odpowiednio równe:

$$a_1 = \frac{(a_{13}^{(j)} a_{14}^{(j+1)} - a_{14}^{(j)} a_{13}^{(j+1)})}{(a_{13}^{(j)} - a_{14}^{(j)} + a_{14}^{(j+1)} - a_{13}^{(j+1)})}, \quad (17)$$

$$k_l = \frac{(a_1 - a_{13}^{(j)})}{(a_{13}^{(j+1)} - a_{13}^{(j)})} (k_l^{(j+1)} - k_l^{(j)}) + k_l^{(j)}. \quad (18)$$

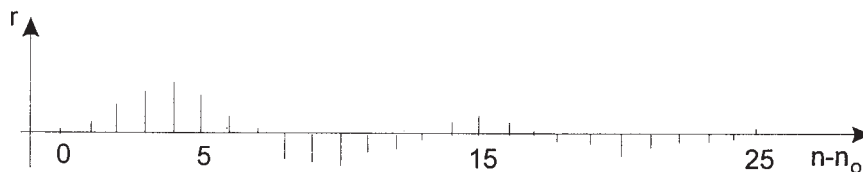
Schemat obliczeń iteracyjnych wyjaśnia rysunek 3. Wartości obliczanych parametrów sygnału oznaczono na rysunku 2.



Rys.3. Schemat iteracyjnego wyznaczania parametrów a_1, k_l

3.2. Aproksymacja różnicy sygnału i funkcji wzorca

Po obliczeniu parametrów sygnału funkcję wzorca odejmujemy od funkcji $x(t)$ opisującej sygnał,



Rys.4. Wykres wartości różnicy $r(n)$

Wartości współczynników b_k obliczonych przy użyciu wzoru (22) aproksymującego różnicę $r(n)$ zamieszczono w tabeli 1.

Średni błąd aproksymacji [3] różnicy $r(n)$ wynosi $M=0,566888437\text{mm}$.

a powstałą różnicę $r(\tau) = x(t) - \sum_{i=0}^2 \phi_i(\tau)$ aproksymujemy przekształconym szeregiem sinusów:

$$r(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\pi(\tau - T_0)/(T - T_0)) \quad (19)$$

o wyrazach ortogonalnych w przedziale $T_0 \leq \tau \leq T$. Współczynniki rozwinięcia b_k obliczamy metodą najmniejszych kwadratów minimalizując wartość wyrażenia:

$$\int_{\tau=T_0}^T (r(\tau) - \sum_{k=1}^M b_k \sin(k\pi \frac{\tau - T_0}{T - T_0}))^2 d\tau = R_{\min}^2 \quad (2)$$

0) stąd

$$b_k = \frac{2}{T - T_0} \int_{\tau=T_0}^T r(\tau) \sin(k\pi \frac{\tau - T_0}{T - T_0}) d\tau \quad (21)$$

Dla dyskretnych wartości $r(\tau - T_0)$ współczynniki obliczamy posługując się wyrażeniem:

$$b_k = \frac{2}{N - n_0} \sum_{n=n_0}^N (r(n) \sin(k\pi \frac{n - n_0}{N - n_0})), \quad (22)$$

gdzie

$$r(n) = \sum_{n=n_0}^N b_k \sin(k\pi \frac{n - n_0}{N - n_0}), \quad (23)$$

jest różnicą pokazaną na rysunku 4.

Tab. I. Wartości współczynników b_k

b_k	Wartość b_k	b_k	Wartość b_k
b_1	-0,467439014	b_2	1,003578088
b_3	1,392942074	b_4	2,115241055
b_5	3,680051256	b_6	2,111890637
b_7	-0,337873765	b_8	-0,29008791
b_9	0,025397977	b_{10}	-0,265896585

4. PODSUMOWANIE

Model matematyczny sygnału przejściowego (7) zawiera funkcje generowane wewnątrz przedziałów czasu mikro τ_i tworzących czas rzeczywisty τ . Poza przedziałami właściwego im czasu funkcje te przyjmują wartości stałe. Przeciwdziała to powstawaniu dodatkowych segmentów, które występują w przebiegu aproksymującym sygnał rzeczywisty z użyciem szeregów trygonometrycznych Fouriera. Prowadzi do zmniejszenia błędów aproksymacji na końcach przedziału czasowego.

Model umożliwia wybór funkcji aproksymujących odpowiednio do potrzeb. W przedstawionej pracy zastosowano mikrofunkcję $(1 - \cos \pi \tau / T_i) / 2$ tworzącą sygnały harmoniczne. Mikrofunkcja ta posłużyła do utworzenia funkcji wzorca, wyznaczającej parametry sygnału przejściowego: czasy opóźnienia i narastania oraz

wartość ustaloną. Funkcja wzorca rozdzieliła sygnał na składową deterministyczną i pozostałą różnicę o cechach niestacjonarnego sygnału losowego, którą w przedziale zmienności aproksymowano przekształconym szeregiem sinusów. W przypadku okresowo ponawianej analizy sygnału przejściowego, otrzymane wartości w dziedzinie czasu i amplitudy stają się źródłem informacji diagnostycznej o stanie technicznym silnika. Określone na podstawie zmian czasowych tych wartości trendy mogą być wykorzystane w prognozowaniu stanu technicznego silników o różnych rozwiązaniach konstrukcyjnych.

5. LITERATURA

1. Proch W.: Analiza czasowa sygnałów przejściowych, WSP, Olsztyn, 1996.
2. Proch W.: Temporal signal structure analysis .Scientific Papers of the Institute of Mining of the Wrocław University of Technology No.86, 1999, S.206-211.
3. Fortuna Z.; Macukow B.; Wąsowski J.: Metody numeryczne, WNT, Warszawa 1998.



Waldemar PROCH urodził się w lutym 1940r. W 1969 r. ukończył studia na Wydziale Elektroniki Politechniki Warszawskiej. Od 1972r. był asystentem na Wydziale Mechanicznym Akademii Rolniczo-Technicznej w Olsztynie. Po ukończeniu w 1980 studiów doktoranckich w Moskwie uzyskał w kraju tytuł doktora nauk technicznych w dziedzinie elektroniki. Od 1993 był adiunktem w Wyższej Szkole Pedagogicznej w Olsztynie. Obecnie jest starszym wykładowcą na Wydziale Nauk Technicznych Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego. W pracy naukowej zajmuje się zagadnieniami analizy sygnałów. Jest autorem dwóch monografii na temat analizy czasowej sygnałów przejściowych oraz ponad 10 artykułów naukowych z tego zakresu.