# OPIS WŁASNOŚCI DYNAMICZNYCH ELEMENTARNYCH UKŁADÓW MECHANICZNYCH, TYPOWYCH DLA KONSTRUKCJI NOŚNYCH DUŻYCH MASZYN WIRNIKOWYCH

Tadeusz GERLACH

Instytut Maszyn Przepływowych PAN

ul. Fiszera 14, 80 – 952 Gdańsk, fax: +48 58 341 61 44

Streszczenie

Zwrócono uwagę na nieścisłość opisu przebiegów harmonicznych, występujących w drganiach układów mechanicznych, opisu rozpowszechnionego w literaturze technicznej, a także zastosowanego w publikacji [1]. Nieścisłość ta, zauważona w Monografii: Strukturdynamik, autorstwa profesorów R. Gasch'a i K. Knothe'go, nie doprowadziła do istotnych błędów w obliczeniach, lecz miała charakter nomenklaturowy.

Słowa kluczowe: Drgania, przebiegi harmoniczne, układy mechaniczne.

## DESCRIPTION OF DYNAMICAL PROPERTIES OF ELEMENTARY MECHANICAL SYSTEM, TYPICAL FOR SUPPORT CONSTRUCTION OF LARGE ROTATION MACHINES

Tadeusz GERLACH

Summary

There has been noticed certain impreciseness in the description of harmonic relation which occurs in the vibration of mechanical systems. Such description is often found in the technical literature and had been used in the publication [1]. The above impreciseness has been noticed in monograph "Strukturdynamik" written by prof. R. Gasch and K. Knothe. It does not lead to any significant errors in calculations, but have mainly a terminology character.

W 1998r. opublikowałem wraz z kolegami z Instytutu Maszyn Przepływowych w „Zagadnieniach Eksploatacji Maszyn" artykuł [1], poświęcony doświadczeniom, zebranym w toku prób eksperymentalnego wyznaczenia drganiowej charakterystyki dużego stanowiska badawczego. Charakterystykę tę miały tworzyć przebiegi podatności dynamicznej stanowiska w funkcji częstości drgań wymuszonych. Za podstawę przyjęliśmy formę opisu podatności dynamicznej, czyli „receptancji", stosowaną w monografii „The Mechanics of Vibration", autorstwa R. E. D. Bishop'a i D. C. Johnson'a [2]. Autorzy ci opisują przebiegi o charakterze harmonicznym formułą:

$$f(t) = \alpha e^{i\omega t} \qquad (1)$$

gdzie:

f(t) – przebieg w funkcji czasu – t

$\alpha$ - amplituda oscylacji

e – podstawa logarytmów naturalnych

i – jednostka urojona

$\omega$ - częstość kołowa oscylacji

Formuła [1], rozpowszechniona w technicznej literaturze z tematyki drgań, nie zawsze jest ścisła. Można to wykazać na przykładzie elementarnego układu mechanicznego, opisanego równaniem różniczkowym drugiego rzędu:

$$m\ddot{u} + d\dot{u} + ku = P(t) \qquad (2)$$

m, d, k – współczynniki wymiarowe masy, tłumienia i sztywności,

P(t) – harmoniczna siła wymuszająca drgania (jako periodyczna funkcja czasu)

$u, \dot{u}, \ddot{u}$ – przemieszczenie z położenia równowagi statycznej i jego pochodne względem czasu

Wszystkie współczynniki, występujące z lewej strony równania (2) są dodatnie w przypadku konstrukcji nośnych maszyn wirnikowych (ujemna sztywność „k" powoduje strukturalną niestabilność układu, ujemny współczynnik tłumienia prowadzi do rozrostu drgań swobodnych wywołanych przez jakiekolwiek przypadkowe wzbudzenie).

Sztywność konstrukcji nośnych musi być z reguły wysoka, z jednej strony po to, by ograniczyć przemieszczenia wirnika względem korpusu maszyny, a z drugiej strony po to, by podstawowa częstość drgań układu, wyznaczona przez stosunek sztywności do masy, znajdowała się poza zakresem normalnych prędkości obrotowych wirnika:

$$k = m\omega_r^2 \tag{3}$$

$\omega_r$ – częstość rezonansowa wirnika o masie „m", podpartego w konstrukcji o sztywności „k".

Ogólne rozwiązanie równania postaci (2) składa się, jak wiadomo, z rozwiązania równania jednorodnego (z zerową stroną prawą) i rozwiązania szczególnego równania pełnego. Ta pierwsza część opisuje drgania swobodne układu, zależne od warunków początkowych (lub od przypadkowego wzbudzenia). Ze względu na występowanie tłumienia (d>0) drgania te zanikają z upływem czasu.

Opis matematyczny tych drgań wynika z wyróżnika równania (2), który jest ujemny:

$$\Delta = d^2 - 4mk < 0,$$

a więc równanie posiada dwa sprzężone pierwiastki zespolone, oraz ujemną część rzeczywistą.

Szczególne rozwiązanie równania pełnego można zapisać w formie:

$$u = a\cos(\omega t - \psi),$$

co po dwukrotnym różniczkowaniu i wstawieniu do (2) daje dla

$P(t) = A\cos(\omega t)$

równanie:

$$a\left\{\left(k - m\omega^2\right)\cos(\omega t - \psi) - d\omega\sin(\omega t - \psi)\right\} = A\cos(\omega t) \tag{3}$$

czyli:

$$\cos(\omega t)\, a\left|\left(k - m\omega^2\right)\cos\psi + d\omega\sin\psi\right| + \sin(\omega t)\, a\left|\left(k - m\omega^2\right)\sin\psi + d\omega\sin\psi\right| = A\cos(\omega t)$$

a więc:

$$\psi = \operatorname{arc\,tg}\frac{d\omega}{k - m\omega^2};$$

$$\sin\psi = \frac{d\omega}{\sqrt{\left(k - m\omega^2\right)^2 + d^2\omega^2}};$$

$$\cos\psi = \frac{k - m\omega^2}{\sqrt{\left(k - m\omega^2\right)^2 + d^2\omega^2}}$$

i ostatecznie

$$a\sqrt{\left(k - m\omega^2\right)^2 + d^2\omega^2} = A$$

oraz

$$u(t) = \frac{A}{\sqrt{\left(k - m\omega^2\right)^2 + d^2\omega^2}} \times \cos\left[\omega t - \operatorname{arc\,tg}\frac{d\omega}{k - m\omega^2}\right] \tag{4}$$

Związek (4), opisujący drgania układu, wymuszone przez siłę o przebiegu harmonicznym, jest związkiem opisanym liczbami rzeczywistymi, co stoi w sprzeczności z formułą (1), równoważną zapisowi:

$$f(t) = \alpha[\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)] \tag{1'}$$

Wprowadzenie zapisu w liczbach zespolonych, często dogodne ze względów formalnych, musi uwzględniać związki funkcji trygonometrycznych z funkcjami w zapisie zespolonym, wyrażone wzorami Eulera:

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left[e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right]$$

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2i}\left[e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right]$$

Wykorzystanie wzorów Eulera przekształca związek (4) w formułę:

$$u = \frac{A}{\sqrt{\left(k - m\omega^2\right)^2 + d^2\omega^2}} \times \frac{1}{2}\left[e^{i(\omega t - \psi)} + e^{-i(\omega t - \psi)}\right] \tag{4'}$$

Zapisowi temu odpowiadają na płaszczyźnie zmiennej zespolonej dwa wektory, każdy o długości $\dfrac{A}{2\sqrt{\left(k - m\omega^2\right)^2 + d^2\omega^2}}$ odchylone w danej chwili od osi zmiennej rzeczywistej symetrycznie o kąty: $\omega t - \psi$, wirujące w przeciwnych kierunkach z prędkością kątową $\omega$.

Ich składowe urojone są w każdej chwili równe sobie, lecz przeciwnego znaku, a więc znoszą się wzajemnie. Sumowanie się składowych rzeczywistych daje ten sam efekt, jaki wynika ze związku (4).

Nieścisłość związku (1) polega więc na pominięciu drugiego z członów w wyrażeniu zespolonym dla funkcji cosinus i odpowiadającego mu wektora w płaszczyźnie zmiennej zespolonej. Macierze podatności układu o wielu stopniach swobody nie są zatem macierzami zespolonymi, lecz rzeczywistymi. Nieścisłość ta nie spowodowała jednak istotnych błędów obliczeniowych, ponieważ moduł podatności układu dla danej częstości wymuszenia pozostał taki sam, jak wyznaczony dla przypadku odpowiedzi zespolonej.

Nie uległ też zmianie kąt $\psi$ opóźnienia drgań w stosunku do przebiegu siły. Przy poprawnym zapisie jest to różnica nomenklaturowa, ale istotna dla poprawnego rozumienia zjawiska. Poprawna forma zapisu (1) winna mieć postać:

$$f(t) = \alpha\left[e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right] \qquad (1'')$$

Nieścisłość zapisu typu (1) została dawno zauważona przez mechaników, np. w monografii [3] (str. 57).

**LITERATURA:**


[1]. Gerlach T., Rybczyński J., Makowiecki L.: Doświadczenia w eksperymentalnym wyznaczaniu własności dynamicznych wybranej konstrukcji. Zagadnienia Eksploatacji Maszyn, Z. 3 (115) vol. 33., 1998, str. 527 – 548.

[2]. Bishop R. E. D., Johnson D. C.: The Mechanics of Vibration, Cambridge University Press, 1979.

[3] Gasch R., Knothe K.: Strukturdynamik, B1 (Diskrete Systeme), Springer - Verlag, 1987.



Prof. Tadeusz GERLACH

Prof. emerytowany, mgr inż. mechanik, urodzony w 1921 r. w Warszawie.
Specjalność:

- budowa i eksploatacja maszyn, zwłaszcza maszyn i urządzeń okrętowych,
- trybologiczne aspekty eksploatacji maszyn i ich łożysk ślizgowych,
- problematyka dynamiki maszyn wirnikowych.

Prof. T. Gerlach do początku swojej działalności związany był z Politechniką Gdańską i Instytutem Maszyn Przepływowych PAN w Gdańsku. Jest głównym konstruktorem słynnych w latach 60-tych „Kretów" oraz jednym z pierwszych konstruktorów pierwszej maszyny parowej do węglowca „Sołdek". Specjalizuje się w teorii i badaniach łożysk ślizgowych, tribologii oraz prowadzi prace z zakresu pomocniczych urządzeń okrętowych. Jest wydawcą wielu roczników inżynierów mechaników i inżynierów budownictwa okrętowego.