

# APARATURA BADAWCZA I DYDAKTYCZNA

## Sterowanie położeniem odwróconego wahadła w pętli zamkniętej

MACIEJ CIĘŻKOWSKI, FRANCISZEK SIEMIENIAKO

POLITECHNIKA BIAŁOSTOCKA, WYDZIAŁ MECHANICZNY, KATEDRA AUTOMATYKI I ROBOTYKI

**Słowa kluczowe:** odwrócone wahadło, stabilizacja wahadła, sprzężenie zwrotne, pętla zamknięta, LQR

### STRESZCZENIE

Praca zawiera opis stanowiska pomiarowego do badania odwróconego wahadła oraz wyniki doświadczeń, które zostały uzyskane na tym stanowisku. Ze względu na zastosowanie regulatora liniowo-kwadratowego do sterowania układem, artykuł zawiera opis modelu matematycznego wahadła, który jest niezbędny do wyznaczenia parametrów regulacji.

### Closed-loop position control of inverted pendulum

**Keywords:** inverted pendulum, stabilization of pendulum, feedback, closed-loop, LQR

### ABSTRACT

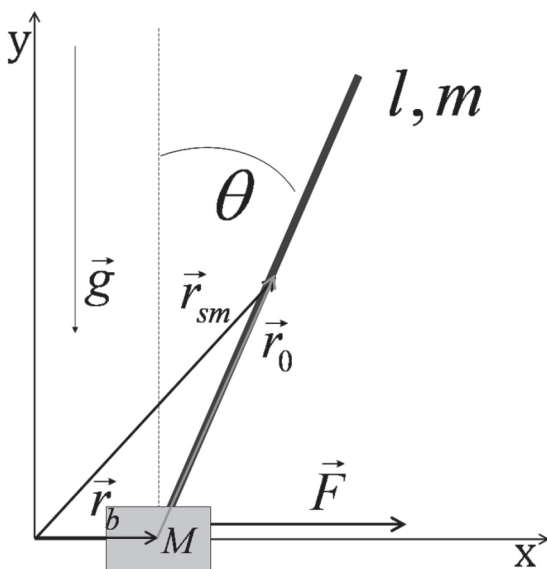
The paper contains a description of the measurement system for studying the inverted pendulum and the experimental results obtained in this system. Due to applied the linear-quadratic regulator, the article describes a mathematical model of the pendulum, which is necessary to determine the control parameters.

## 1. WPROWADZENIE

Bardzo popularnym wahadłem badanym w automatyce jest wahadło odwrócone, czyli wahadło fizyczne, którego środek masy leży nad jego punktem zawieszenia. Jest to przykład nieliniowego układu, który charakteryzuje się wysoką niestabilnością. Ze względu na swoje właściwości jest dobrym obiektem do testowania różnych algorytmów sterowania, zaczynając od klasycznych sterowań np. PID, a kończąc na sterowaniu rozmytym [1] czy też wykorzystującym sieci neuronowe [2]. Poza tym, że może być traktowany jako swoisty papierek lakmusowy w sprawdzaniu poprawności sterowania, ma wiele zastosowań praktycznych: stabilizacja chodu robota, sterowanie lotem rakiety [3], czy popularny ostatnio dwukołowy pojazd „Segway”. Celem pracy jest opisanie zbudowanego stanowiska pomiarowego wahadła i przedstawienie wyników doświadczeń przeprowadzonych na tym stanowisku.

## 2. MODEL MATEMATYCZNY WAHADŁA

Do sterowania wahadłem został wykorzystany regulator linowo-kwadratowy (LQR). Aby wyznaczyć parametry regulatora, konieczna jest znajomość modelu matematycznego układu. Za model wahadła został przyjęty doskonale sztywny, jednorodny pręt, o masie  $m$  i długości  $l$ . Jeden z końców wahadła jest punktem zaczepienia, który jest umocowany na wózku o masie  $M$ . Układ



Rysunek 1 Model fizyczny wahadła  
Figure 1 Physical model of pendulum

jest umieszczony w polu grawitacyjnym o wartości przyspieszenia  $g$ . Przez sterowanie wahadłem rozumie się proces mający na celu utrzymanie wahadła w pozycji odwróconej, podczas gdy układ poddawany jest zaburzeniom. Proces ten polega na przykładaniu do wózka siły  $F$ , której wartości należy wyznaczyć za pomocą wybranego regulatora. Jak wcześniej wspomniano, w tej pracy zostanie wykorzystany regulator LQ.

Na Rysunku 1 przedstawiono model fizyczny układu wózek-wahadło, do którego opisu został użyty formalizm Lagrange'a.

Położenie wózka opisuje wektor:

$$\mathbf{r}_b = (X, 0) \quad (1)$$

Położenie środka masy wahadła względem wózka:

$$\mathbf{r}_0 = \frac{1}{2}l(\sin\theta, \cos\theta) \quad (2)$$

gdzie:  $\theta$  – kąt wychylenia wahadła od osi  $y$ .

Położenie środka masy wahadła względem początku układu współrzędnych:

$$\mathbf{r}_{sm} = \mathbf{r}_b + \mathbf{r}_0 = \left(\frac{1}{2}l\sin\theta + X, \frac{1}{2}l\cos\theta\right) \quad (3)$$

Siła działająca na wózek:

$$\mathbf{F} = (F, 0) \quad (4)$$

Oznaczając energię kinetyczną układu przez  $T$  oraz energię potencjalną przez  $V$  można zapisać Lagranżjan:

$$L = T - V = \frac{1}{6}\dot{\theta}^2 l^2 m + \frac{1}{2}\dot{\theta} l m \dot{X} \cos(\theta) + \frac{m\dot{X}^2}{2} + \frac{M\dot{X}^2}{2} - \frac{1}{2}g l m \cos(\theta) \quad (5)$$

Podstawiając (5) do równania Eulera-Lagrange'a otrzymujemy dwa równania:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= \frac{\partial L}{\partial \theta} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} - \frac{\partial L}{\partial X} &= F \end{aligned} \quad (6)$$

Rozwiązując równania (6) otrzymuje się:

$$\ddot{x} = \frac{8F - 3gm\sin(2\theta) + 4\dot{\theta}^2 l m \sin(\theta)}{-3m\cos(2\theta) + 5m + 8M}$$
$$\ddot{\theta} = \frac{6F\cos(\theta) - 6g\sin(\theta)(m + M) + 3\dot{\theta}^2 l m \sin(\theta)\cos(\theta)}{3lm\cos^2(\theta) - 4l(m + M)} \quad (7)$$

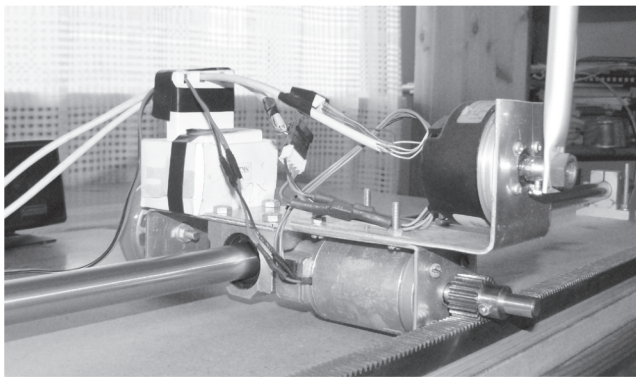
Otrzymane równania ruchu będą wykorzystane do wyznaczenia parametrów regulatora LQ.

### 3. OPIS STANOWISKA

Układ składa się z trzech zasadniczych części: wózka, wahadła oraz urządzeń stanowiących układ sterujący.

#### 3.1 Wózek i wahadło

Na Rysunku 2 przedstawiono zdjęcie wózka.

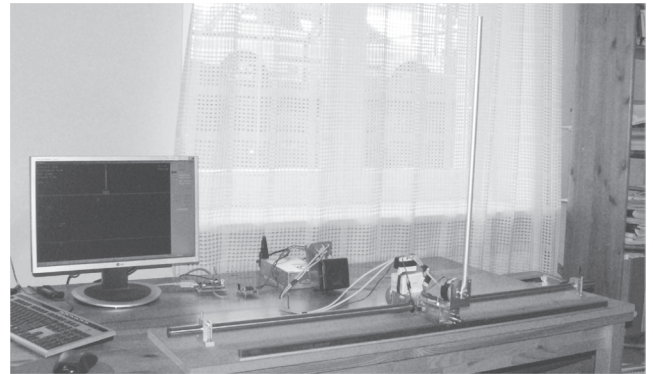


**Rysunek 2** Zdjęcie wózka, na którym umieszczone jest wahadło

**Figure 2** Carriage with pendulum

Podstawowym elementem wózka jest silnik prądu stałego z enkoderem (SHINANO KENSHI DX-050-020E2N01 30V/1600rpm 60W), na którego osi zamocowane jest koło zębate. Za pomocą aluminiowych profili silnik połączony jest z łożyskiem liniowym, które może przesuwać się po stalowym wałku prowadzącym. Koło zębate założone na oś silnika spoczywa na listwie zębatej. Przyłożenie napięcia do silnika spowoduje jego obrót i w konsekwencji wózek przesunie się. Sterowanie wózkiem sprowadza się, zatem do odpowiedniej regulacji napięcia przykładanego do silnika. U góry wózka widać enkoder inkrementalny (SM23-1800-50/5), na którego ośce zamontowane jest wahadło w postaci aluminiowej rurki. Z tyłu wózka zamocowane jest kółko, które doci-

ska koło zębate do listwy zębatej. Jest to zabezpieczenie przed „skakaniem” koła zębatego po listwie zębatej, na przykład podczas gwałtownych hamowań. Masa wózka wynosi 1,1 kg, masa wahadła 0,06 kg, długość wahadła to 0,6 m. Długość listwy zębatej, po której może poruszać się wózek, wynosi 0,972 m. Cały układ przedstawia Rysunek 3.

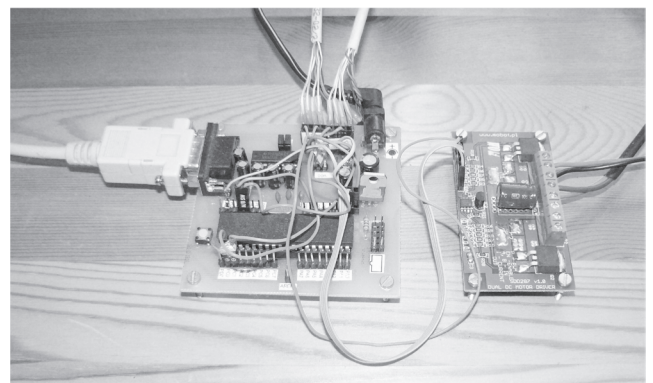


**Rysunek 3** Zdjęcie całego układu pomiarowego  
**Figure 3** Photo of the whole measuring system

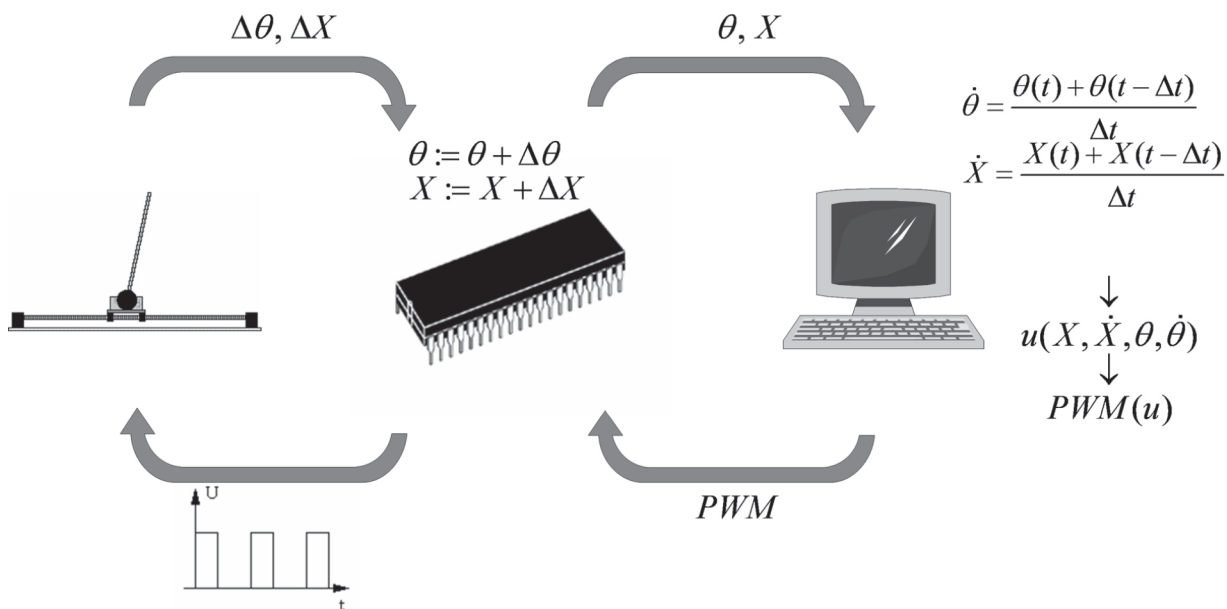
#### 3.2 Aparatura sterująca

Sterowanie w pętli zamkniętej wymaga informacji o aktualnym stanie układu. Wychylenie wahadła oraz położenie wózka mierzone jest za pomocą enkoderów. Enkoder wahadła wysyła impuls co 0,1°, a enkoder silnika co 0,1091 mm. Impulsy z enkoderów rejestrowane są za pomocą mikrokontrolera Atmega16. Sterowanie napięciem i kierunkiem obrotów silnika odbywa się poprzez sterownik VNH3SP30. Na Rysunku 4 widać mikrokontroler wraz ze sterownikiem silnika.

Cały proces zarządzany jest przez komputer PC, który połączony jest z mikrokontrolerem za pomocą standardu RS-232. Na Rysunku 5 pokazano ideę układu sterowania.



**Rysunek 4** Aparatura sterująca  
**Figure 4** Equipment control



**Rysunek 5** Schematyczne przedstawienie procesu sterowania  
**Figure 5** Schematic diagram of the process control

Enkodery wysyłają impulsy do mikrokontrolera. Mikrokontroler uaktualnia położenie  $X$ ,  $\theta$  i na żądanie komputera (50 razy na sekundę) przesyła te informacje. Komputer wyznacza prędkości i na podstawie aktualnego stanu układu wylicza, jakie napięcie ma być przyłożone do silnika. Stosując regulację PWM, program komputerowy wyznacza szerokość impulsu i wysyła tę informację do mikrokontrolera, który przekazuje ją dalej do sterownika silnika.

#### 4. WYZNACZANIE PARAMETRÓW REGULATORA

Aby przyłożyć odpowiednią siłę do wózka należy wyznaczyć jak zależy ona od napięcia sterującego. Wiedząc, że moment siły wytwarzany przez silnik jest proporcjonalny do prądu silnika oraz stosując drugie prawo Kirchhoffa, można założyć postać siły działającej na wózek:

$$F = C_1 u - C_2 \dot{X} \quad (8)$$

gdzie:  $u$  – napięcie przyłożone do silnika,  $\dot{X}$  – prędkość liniowa wózka,  $C_1, C_2$  – nieznanne parametry. Nieznane parametry w równaniu (8) zostały wyznaczone doświadczalnie. Jawna postać równania (8) wygląda następująco:

$$F = 0.625u - 2.812\dot{X} \quad (9)$$

Współczynniki  $C_1, C_2$  uwzględniają parametry silnika oraz tarcie wiskotyczne, działające na wózek

ze strony listwy zębatej.

Znając już postać siły  $F$ , można przejść do wyznaczenia parametrów regulatora.

##### 4.1 Parametry regulatora LQ.

Korzystając z równań (7) i (9) można napisać równanie stanu układu, które ma ogólną postać:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (10)$$

gdzie:  $x = (X, \dot{X}, \theta, \dot{\theta})^T$ ,  $A$  i  $B$  – macierze stanu,  $u$  – napięcie sterujące.

Definiując kwadratowy wskaźnik jakości w postaci:

$$J = \int_0^{\infty} (Q_{11} X^2 + Q_{22} \dot{X}^2 + Q_{33} \theta^2 + Q_{44} \dot{\theta}^2 + Ru^2) dt \quad (11)$$

i przyjmując zgodnie z regułą Brysona[4] :

$$Q_{11} = \frac{1}{0.1^2}, Q_{22} = \frac{1}{1.5^2}, Q_{33} = \frac{1}{0.7^2}, Q_{44} = \frac{1}{2^2}, R = 1$$

możemy wyznaczyć napięcie stabilizujące wahać w pozycji odwróconej:

$$u = -k_1 X - k_2 \dot{X} - k_3 \theta - k_4 \dot{\theta} = 10X + 16.099\dot{X} + 74.049\theta + 14.815\dot{\theta} \quad (12)$$

Równanie to dobrze pracuje dla dużych napięć przykładanych do wózka. Przy małych napięciach (a więc małej sile  $F$ ) pojawił się problem z nieliniowością silnika oraz tarcie statycznym między kołem zębatym a listwą zębatą. Objawiało się to



„myszkowaniem” wózka wokół punktu 0 z amplitudą około 10 cm. Aby to zniwelować (nie udało się tego usunąć całkowicie) do równania (12) dodano człon:  $1.5\exp(-20\dot{X}^2)\text{sgn}(\dot{X})$ , który podnosił wartości napięcia przy małych prędkościach. Ostateczna postać napięcia wykorzystana w sterowaniu:

$$u = 10X + 16.099\dot{X} + 74.049\theta + 14.815\dot{\theta} + 1.5\exp(-20\dot{X}^2)\text{sgn}(\dot{X}) \quad (13)$$

## 5. SWING-UP – PRZEJŚCIE Z POŁOŻENIA DOLNEGO (WISZĄCEGO) DO GÓRNEGO

Regulator LQR wyznaczony w rozdziale 4 może być zastosowany, gdy układ jest nieznacznie zaburzony. Powodem tego jest potrzeba zlinearyzowania równań (7) w punkcie pracy tj.:  $X=0, \dot{X}=0, \theta=0, \dot{\theta}=0$ . Jeżeli układ znajdzie się „daleko” od punktu pracy, parametry regulatora przestają być właściwe. Aby poradzić sobie z tym problemem, sterowanie zostało rozbite na dwie metody: jeżeli  $|\theta| < 0.4\text{rad}$  stosujemy regulator LQ, w przeciwnym wypadku stosujemy algorytm swing-up, który bazuje na różnicy aktualnej energii mechanicznej wahadła i energii gdy wahadło jest w pozycji odwróconej [5].

Różnica energii wahadła wynosi:

$$\Delta E = \left(\frac{1}{6}l^2m\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}lmg\cos(\theta)\right) - \frac{glm}{2} \quad (13)$$

Siła  $F$ , którą należy przyłożyć do wózka wynosi:

$$F = K \Delta E \text{sgn}(\dot{\theta}\cos(\theta)) \quad (14)$$

gdzie:  $K$  – współczynnik proporcjonalności,  $\text{sgn}(\dot{\theta}\cos(\theta))$  – człon do określenia znaku siły. Z równań (9) i (14) można wyznaczyć napięcie sterujące:

$$u = K' \Delta E \text{sgn}(\dot{\theta}\cos(\theta)) + 4.5\dot{X} \quad (14)$$

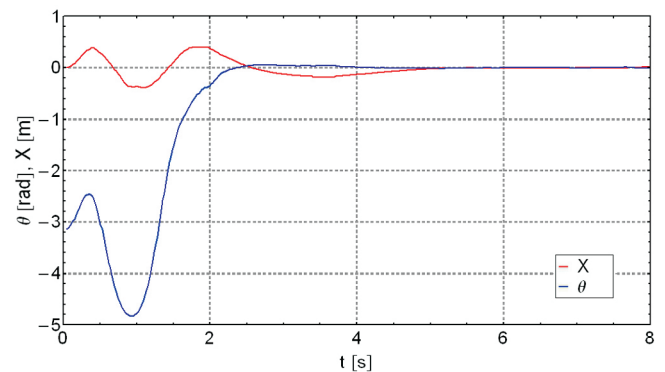
gdzie  $K'=9$  – współczynnik wyznaczony doświadczalnie (metodą kolejnych przybliżeń). Wyznaczone sterowanie (14) zostało użyte w doświadczeniu.

Aby proces sterowania był kompletny, należy zabezpieczyć się przed wyjechaniem wózka za listwę zębatą. Zostało to wykonane w taki sposób, że gdy wózek dojeżdża do granicy listwy, napięcie sterowania przybiera postać  $u = -30\dot{X}$ . Dzięki temu wózek zostanie wyhamowany.

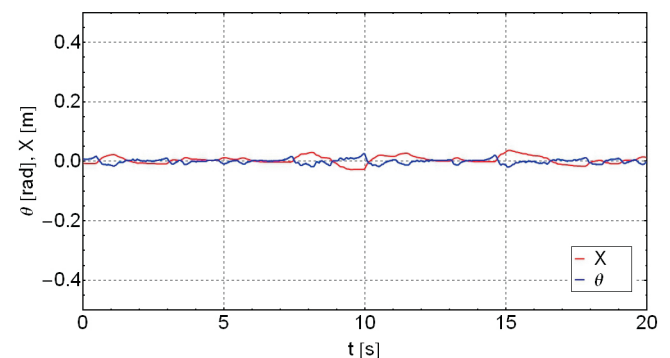
## 6. WYNIKI DOŚWIADCZENIA

Rozdział ten zawiera uzyskane wyniki, przedstawione w postaci wykresów.

### 6.1 Swing-up



**Rysunek 6** Sterowanie swing-up  
**Figure 6** Swing-up control

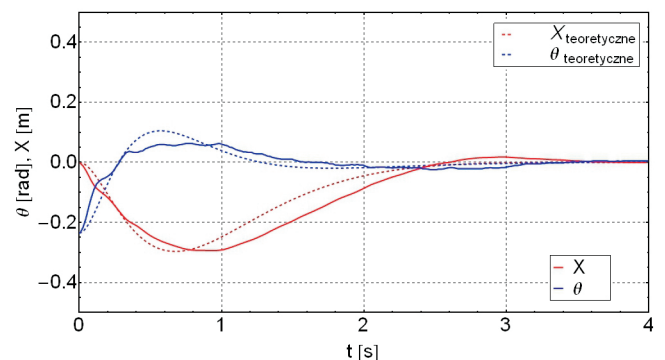


**Rysunek 7** Pozycja wahadła i wózka w stanie ustalonym

**Figure 7** Pendulum and carriage position in the steady state

### 6.2 Stan ustalony

Na rysunku 7 widać „myszkowanie” wózka, którego nie udało się usunąć.



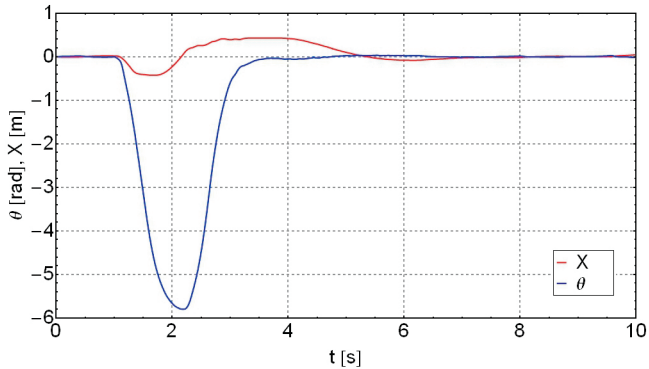
**Rysunek 8** Reakcja na wychylenie wahadła z położenia równowagi

**Figure 8** Response to deflection from the equilibrium position

### 6.3 Małe zaburzenie układu

Zaburzenie układu polegało na wychyleniu waha-  
dła o kąt  $-0,23 \text{ rad}$ .

Rysunek 8 zawiera również symulację numerycz-  
ną układu (przerywane linie). Dane pomiarowe  
jakościowo są zgodne z symulacją. Różnice ilo-  
ściowe występują, lecz ich rozmiar wydaje się być  
zadowalający.



Rysunek 9 Gwałtowne zaburzenie układu

Figure 9 Rapid disturbance of the system

### 6.4 Duże zaburzenie układu

Na Rysunku 9 przedstawiona jest sytuacja, gdy  
wahadło zostało uderzone uzyskując prędkość  
początkową około  $-2 \text{ rad/s}$ . Widać tu zmianę ster-  
owania z LQR na swing-up i ponowną zmianę na  
sterowanie regulatorem LQ

## 7. PODSUMOWANIE

Dane przedstawione w pracy opisują jak zbudow-  
ać stanowisko pomiarowe do badania waha-  
dła i jak teoretycznie modelować taki układ. Dane  
eksperymentalne przedstawione w rozdziale 6  
potwierdzają poprawność działania układu. Nie  
udało się do końca wyeliminować „myszkowania”  
wózka. Szansą na usunięcie tego błędu byłoby za-  
stosowanie silnika z przekładnią, który dawałby  
większy moment siły przy małych obrotach, lecz  
wtedy zmniejszyłyby się prędkości osiągnięte przez  
wózek.

## LITERATURA

- [1] Leong F.H.F., Wong L. K., Tam P.K.S.: Fuzzy model based controller for an inverted pendulum, Electronics Letters, Vol. 32 No. 18, pp. 1683-1685, 1996.
- [2] Rekdalsbakken W: Intelligent Control of an Inverted Pendulum, Intelligent Engineering Systems and Computational Cybernetics, IV, pp. 235-244, 2009.
- [3] Astrom K. J., Murray R. M.: Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers, Princeton Univ Pr 2008.
- [4] Bryson, A. E., Ho, Y. C.: Applied Optimal Control, Blaisdell, Waltham, MA, 1969.
- [5] Astrom K. J., Furuta K.: Swinging up a pendulum by energy control, IFAC 13th World Congress, San Francisco, California, 1996.