

APARATURA

BADAWCZA I DYDAKTYCZNA

Badanie drgań struny

MIŁOSZ GRODZICKI, RADOSŁAW WASIELEWSKI
UNIWERSYTET WROCŁAWSKI, INSTYTUT FIZYKI

Słowa kluczowe: struna, drgania, analiza drgań

STRESZCZENIE

Niniejsza publikacja opisuje prosty zestaw dydaktyczno-pomiarowy zawierający drgającą strunę. Pozwala on na wprowadzenie studenta w świat drgań, ich rejestracji oraz analizy. Ponadto umożliwia pomiar gęstości materiału, z którego wykonana jest drgająca struna. Ideą przewodnią ćwiczenia jest płynne przejście od analizy ruchu drgającego do poznania właściwości fizycznych drgającego materiału (tu w postaci struny). Wykorzystanie współczesnych środków badawczych czynią proces poznawczy intuicyjnym i przyjaznym studentom. Autorzy prezentują stanowisko doświadczalne oraz ilustrują jego działanie wykonanymi pomiarami.

Investigation of string vibration

Keywords: string, vibration, vibration analysis

ABSTRACT

In this paper described is an educational kit containing a vibrating string. The simple model permits the student to enter the world of vibrations, to record and analyze the phenomena. It also allows measurement of the density of the material from which the vibrating string is made. The essence of the exercise is fluent transition from analyzing the oscillating motion to learning the physical properties of a vibrating material (the string) by using contemporary means and in the form intelligible for the student. The authors present the experimental stand and illustrate its performance with standard measurements.

1. WSTĘP

Motywację do wykonania tego zestawu edukacyjnego można zawrzeć w dwóch słowach – wszystko drga. Począwszy od wielkich konstrukcji mostowych, poprzez instrumenty muzyczne, a na drganiach pojedynczych atomów kończąc. Parę powyższych przykładów nie pozwala przedstawić nawet ułamka różnorodności występowania tego zjawiska. Wychodząc z takiego założenia rzeczą naturalną jest jego przybliżenie słuchaczom z wykorzystaniem prostego układu – drgającej struny. Zaletą przygotowanego doświadczenia jest jego prostota i bardzo niski koszt wykonania stanowiska doświadczalnego. Autorzy sądzą, iż studenci wykonujący zadania w ramach I pracowni fizycznej z wykorzystaniem przedstawianego zestawu, będą mieli okazję poszerzyć zasób wiedzy podczas obserwacji drgań poprzecznych struny w zależności od jej długości oraz naprężenia.

2. WPROWADZENIE TEORETYCZNE

Wychylając strunę z położenia równowagi wprowadzamy ją w drgania poprzeczne do kierunku rozchodzących się fal. Jeżeli fala rozchodzi się w kierunku osi x , a wychylenie następuje w kierunku osi y , to ruch pojedynczego elementu struny opiszemy równaniem (1):

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (1)$$

gdzie V jest prędkością rozchodzenia się fali, a jego rozwiązanie ma postać:

$$y = A \cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \delta\right] \quad (2)$$

gdzie A to amplituda fali, λ jej długość, T okres, a δ to przesunięcie fazowe.

Sprawdzając rozwiązanie (2) przez podstawienie do równania (1) otrzymujemy związek między prędkością rozchodzenia się fali, a jej częstotliwością f oraz długością:

$$V = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f \quad (3)$$

Rozpatrzmy przypadek wychylenia struny, gdy oba jej końce są zamocowane na stałe (tak jak w prezentowanym zestawie). Po wzbudzeniu struny odkształcenie będzie rozchodzić się

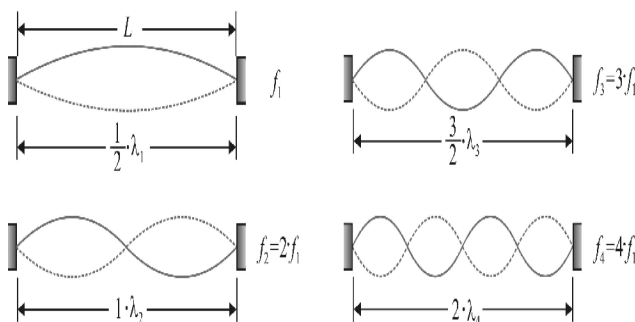
wzdłuż niej w postaci fal y_1 i y_2 o przeciwnych zwrotach (wzdłuż kierunku osi x). Fale po odbiciu od końców struny będą interferować ze sobą, w wyniku czego otrzymamy falę wypadkową $y_i = y_1 + y_2$. Korzystając z zależności (2), bez uwzględnienia przesunięcia w fazie, otrzymamy wzór na falę stojącą:

$$y_i = 2A \cdot \sin\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \cdot \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \quad (4)$$

Stałe zamocowanie struny wymusza wystąpienie co najmniej dwóch punktów (węzłów), w których wychylenie z położenia równowagi jest zawsze równe zero. Zgodnie ze wzorem (4) węzły pojawiają się w miejscach, gdzie $\sin(2\pi \cdot x/\lambda) = 0$. Spełniają go punkty:

$$x_n = n \frac{\lambda}{2} \quad (5)$$

czyli $x_n = 0, \lambda/2, \lambda, 3/2 \cdot \lambda \dots$ Odległość między kolejnymi węzłami wynosi $\lambda/2$. Na strunie o długości L mogą pojawić się fale o różnej długości, tak jak pokazano na Rysunku 1.



Rysunek 1 Fala stojąca na strunie – cztery fale o kolejnych wzrastających częstotliwościach.

Figure 1 Standing waves on a string. The four waves have successively increasing frequencies.

Ruch wybranego fragmentu struny może być wynikiem superpozycji drgań harmonicznnych o różnych częstotliwościach f_n , które są całkowitymi wielokrotnościami częstotliwości podstawowej f_1 (najniższej częstotliwości, z jaką może drgać struna), zgodnie ze wzorem (3) możemy zapisać:

$$f_n = \frac{V}{\lambda_n} \quad (6)$$

Ponieważ szybkość rozchodzenia się fali poprzecznej w strunie dana jest wzorem:

$$V = \sqrt{\frac{F \cdot L}{m}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \quad (7)$$

gdzie: L jest długością struny, F jest siłą rozciągającą strunę, m masą struny, σ jest naprężeniem struny (siłą na jednostkę powierzchni przekroju struny), a ρ jest gęstością materiału, z którego jest wykonana. Możemy zatem zapisać:

$$f_n = \frac{n}{2L} \cdot \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \quad (8)$$

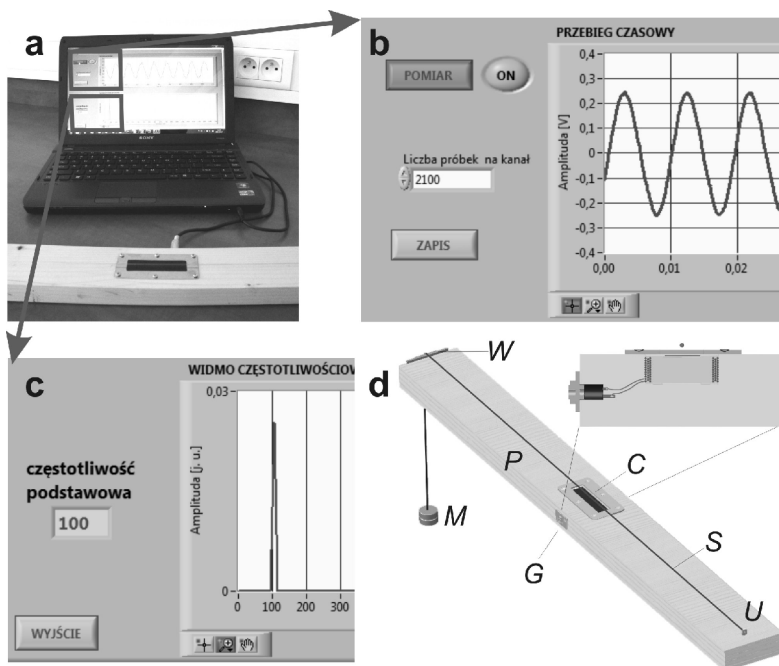
Zgodnie z twierdzeniem J. Fouriera [2] dowolne drganie periodyczne możemy przedstawić jako superpozycję drgań harmonicznnych, które da się opisać szeregiem trygonometrycznym postaci:

$$y = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cdot \cos \frac{2n\pi}{T} \cdot t + B_n \cdot \sin \frac{2n\pi}{T} \cdot t \right) \quad (9)$$

gdzie współczynniki A_n , B_n określone są następującymi wzorami:

$$A_n = \frac{2}{T} A_0 + \int_0^T (y(t) \cdot \cos \frac{2n\pi}{T} \cdot t) dt$$

$$B_n = \frac{2}{T} A_0 + \int_0^T (y(t) \cdot \sin \frac{2n\pi}{T} \cdot t) dt \quad (10)$$



Rysunek 2 (a) Stanowisko pomiarowe – widoczny komputer przenośny z kartą muzyczną oraz część modułu pomiarowego; **(b), (c)** fragmenty interfejsu pomiarowego – przebieg czasowy oraz widmo częstotliwościowe; **(d)** schemat modułu pomiarowego z przekrojem poprzecznym.

Figure 2 (a) Measuring position: a portable computer with a sound card and part of measurement module; **(b), (c)** Fragments of measuring interface: time course and frequency spectrum. **(d)** Diagram of the measuring module with a cross-sectional

Równania (9) i (10) pozwalają na przedstawienie drgania jako sumy przebiegów o wielokrotności częstotliwości podstawowej.

3. CHARAKTERYSTYKA ZESTAWU POMIAROWEGO

W skład stanowiska do badania drgań wchodzi: moduł pomiarowy – struna zamocowana na statywie oraz cewka elektromagnetyczna o indukcyjności 680 mH wraz z rdzeniem magnetycznym, komputer PC z kartą muzyczną z oprogramowaniem pomiarowym napisanym w języku LabView [3, 4]. Zdjęcie stanowiska pomiarowego przedstawione jest na Rysunku 2a.

Schemat modułu pomiarowego znajduje się na Rysunku 2d. Jeden koniec stalowej struny S przytworzony jest do uchwyty U osadzonego w podstawie P . Struna naciągana jest przy użyciu obciążnika o masie M umieszczonego na drugim końcu struny. Zastosowanie dwóch dodatkowych podpórek, umieszczonych pomiędzy struną S a podstawą P (nie przedstawianych na ilustracji), umożliwia zmianę długości części drgającej struny.

Strunę pobudzamy np. przy użyciu kostki gitarowej, do detekcji jej drgań wykorzystano cewkę elektromagnetyczną C znajdującą się na środku elementu P . Detekcja drgań struny oparta jest na zjawisku indukcji elektromagnetycznej, gdzie zmiany pola magnetycznego wywołane drganiem metalowej struny (ferromagnetyka) powodują powstawanie siły elektromotorycznej (SEM). Zmienne napięcie powstające na zaciskach cewki jest bezpośrednio rejestrowane i analizowane przez program komputerowy (nie jest wymagany dodatkowy przedwzmacniacz). Takie rozwiązanie minimalizuje zakłócenia pochodzące od innych źródeł dźwięku – nie są rejestrowane odgłosy z otoczenia, jak miałyby to miejsce w przypadku zastosowania przetwornika akustycznego (mikrofonu). Gniazdo G (mini-jack) umożliwia łatwe podłączenie detektora drgań z kartą muzyczną komputera. Na ekranie komputera (Rys. 2b,c) widzimy przebieg drgań w czasie rzeczywistym, a w wyniku obliczeń numerycznych przeprowadzonych przez pro-

gram (szybkiej transformaty Fouriera [2]), otrzymujemy wartości częstotliwości składowych harmonicznnych oraz ich amplitudy. Program umożliwia zapis oraz zmianę długości rejestrowanego sygnału (zmianę liczby próbek na kanał, Rys. 2b) przy częstotliwości próbkowania sygnału wynoszącej 22 kHz. Dzięki makiecie dydaktycznej łatwo i szybko można dostrzec, że własności drgań zależą od siły rozciągającej strunę, jej długości oraz od miejsca i sposobu pobudzenia.

4. POMIARY

4.1 PROCEDURA POMIAROWA

Opisany powyżej zestaw doświadczalny umożliwia dogłębną analizę drgań metalowej struny.

Program ćwiczenia wykonywanego w ramach I pracowni fizycznej zakłada:

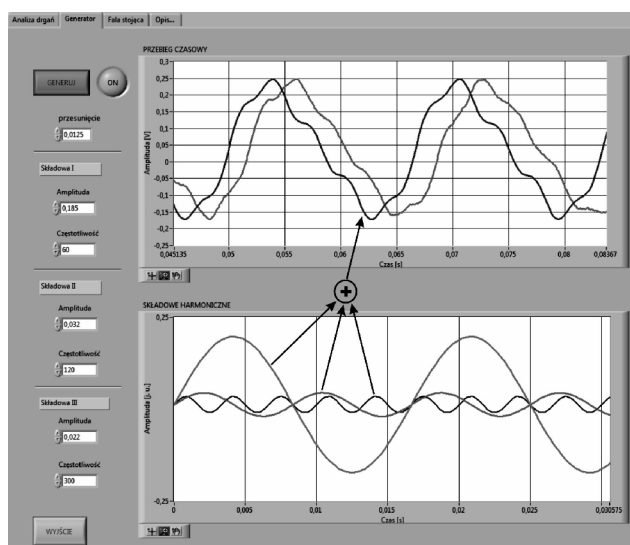
- (a) analizę złożonego drgania struny – wyznaczenie składowych drgań harmonicznnych;
- (b) pomiar częstotliwości podstawowej drgań struny w zależności od jej naprężenia oraz obliczenie gęstości materiału struny;
- (c) badanie zależności częstości drgania podstawowego od długości struny oraz wyznaczenie masy nieznanego odważnika, który napręża strunę.

4.2 REZULTATY POMIARÓW

Analizie poddano strunę stalową o długości 70 cm, średnicy 0,46 mm i gęstości $7700 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Do jej obciążenia zastosowano odważniki o wielokrotności masy 0,5 kg oraz odważnik $M_x=2,5 \text{ kg}$, którego masę wyznacza wykonujący ćwiczenie.

Pierwszym etapem ćwiczenia było zbadanie i przeanalizowanie złożonego drgania struny, wyznaczenie składowych harmonicznnych oraz ich amplitud. Po wzbudzeniu struny przy użyciu kostki gitarowej (najlepiej na jednym z jej końców) na ekranie komputera obserwujemy czasowy przebieg drgania złożonego oraz jego widmo częstotliwościowe (Rys. 2 b,c). Osoba wykonująca ćwiczenie przekonuje się, iż drganie struny można rozłożyć na drgania podstawowe przy użyciu procedur numerycznych zastosowanych w programie do analizy sygnału. Przebieg czasowy drgania, jak i widmo częstotliwościowe widoczne są na panelu pomiarowym.

Osoba wykonująca ćwiczenie z okna WIDMO CZĘSTOTLIWOŚCIOWE (Rys. 2c) odczytuje częstotliwości oraz amplitudy składowych zarejestrowanego sygnału. W zakładce Generator (Rys. 3), która umożliwia symulację i sumowanie przebiegów,



Rysunek 3 Zakładka programu pomiarowego umożliwiająca składanie drgań – w górnym kanale znajduje się zmierzony przebieg drgania oraz sygnał zasymulowany, w dolnym kanale znajdują się składowe symulowanego sygnału.

Figure 3 The bookmark of measurement program that enables one to combine vibrations. The measured vibration run and a simulated signal are shown in the upper channel, and the simulated signal components are in the lower one.

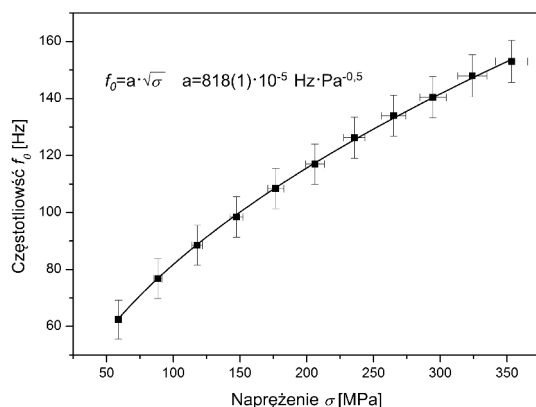
wprowadza odczytane parametry, tak aby optymalnie odtworzyć zarejestrowany sygnał. Przebiegi czasowe generowanych składowych sygnału widoczne są w oknie SKŁADOWE HARMONICZNE, natomiast porównanie sygnału zarejestrowanego oraz wygenerowanego przedstawione są w oknie PRZEBIEG CZASOWY.

W drugim etapie ćwiczenia badany był związek między częstotliwością podstawową drgania a naprężeniem struny o ustalonej długości (70 cm). Przykładowe wyniki przedstawione są na Rys. 4. Dopasowując punkty pomiarowe do zależności (8) otrzymujemy funkcję $f_0 = a \cdot \sigma^{0,5}$.

Współczynnik a umożliwia wyznaczenie gęstości materiału, z którego wykonano strunę – w powyższym przypadku gęstość wyniosła $\rho = 7625(456) \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

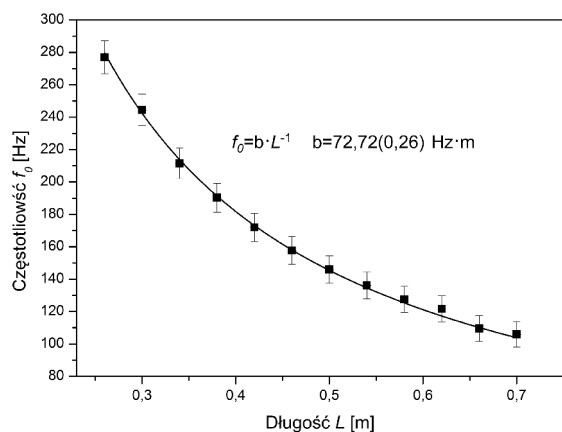
Kolejny etap pomiarów zakłada badanie zależności częstotliwości podstawowej drgania od długości struny, która jest obciążona ciężarkiem o nieznannej masie M_x . Otrzymana relacja jest zgodna z zależnością (8), w wyniku dopasowania punktów pomiarowych otrzymujemy zależność opisaną funkcją $f_0 = b \cdot L^{-1}$ (Rys. 5). Dysponując wielkością współczynnika b , na podstawie relacji (8),

można wyznaczyć nieznaną masę obciążającą strunę. Na podstawie przeprowadzonych obliczeń wyznaczono masę $M_x=2,71(0,32)$ kg.



Rysunek 4 Zależność częstotliwości podstawowej od naprężenia struny – pomiary wykonane z wykorzystaniem prezentowanego zestawu.

Figure 4 Dependence of the fundamental frequency on the string's stress: as measured by using the presented set.



Rysunek 5 Zależność częstotliwości podstawowej od długości struny – wyniki otrzymane z wykorzystaniem prezentowanego zestawu.

Figure 5 Dependence of the fundamental frequency on the string's length: the result obtained by using the presented set.

5. PODSUMOWANIE

Prezentowany zestaw edukacyjny jest łatwy do samodzielnego wykonania, a pomiary są nieczułe na szumy akustyczne otoczenia, dzięki zastosowaniu taniego i ogólnodostępnego przetwornika elektromagnetycznego. Graficzny interfejs programu pomiarowego jest przejrzysty i intuicyjny w obsłudze, co sprawia, że pomiary są wykonywane sprawnie. Otrzymane wyniki pomiarowe są zgodne z relacjami teoretycznymi, pozwalają na zapoznanie się z naturą zjawisk fizycznych towarzyszących drganiom [1,2].

Zmodyfikowany układ pomiarowy może zostać wykorzystany do badania zjawiska dudnień powstających w wyniku interferencji fal dźwiękowych o zbliżonych częstotliwościach - po dodaniu dodatkowej struny. Ponadto analizując czasową zależność amplitudy drgań można wyznaczyć współczynnik tłumienia.

Zdaniem autorów prezentowany zestaw dydaktyczno-pomiarowy pozwala na wiarygodne i powtarzalne wykonywanie pomiarów, a tym samym doskonale nadaje się do realizacji celów stawianych studentom pierwszej pracowni fizycznej.

LITERATURA

- [1] Ginter J. Fizyka fal, Warszawa, Wydawnictwo Naukowe PWN, 1993.
- [2] Szabatin J. Podstawy teorii sygnałów, Warszawa, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności WKŁ, 2008.
- [3] www.ni.com/labview – National Instruments.
- [4] www.labview.pl – polskie źródło wiedzy o środowisku programowania LabVIEW.