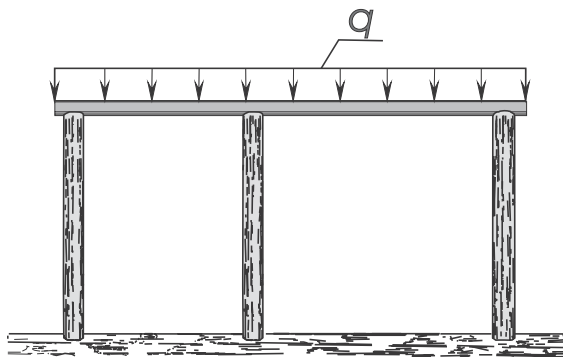


Włodzimierz Hałat*

WPLYW PODATNOŚCI SPRĘŻYSTEJ OBUDOWY NA JEJ NOŚNOŚĆ**

1. Wprowadzenie

Jednym z założeń upraszczających w przeprowadzanych do tej pory obliczeniach wytrzymałościowych obudów prostych wielostojakowych jest powszechne przyjmowanie, że stropnice obudów podpierane są przez stojaki, które modelowane są jako doskonale sztywne podpory, stałe lub przesuwne. Jeżeli popatrzymy na schemat odrzwi obudowy prostej mieszanej (rys. 1) wykonanej ze stalowej stropnicy oraz z drewnianych stojaków, to w tym momencie nasuwa się pytanie, dlaczego drewniane stojaki mają być traktowane w obliczeniach wytrzymałościowych jako podpory doskonale sztywne a stalowa stropnica jako element podatny?



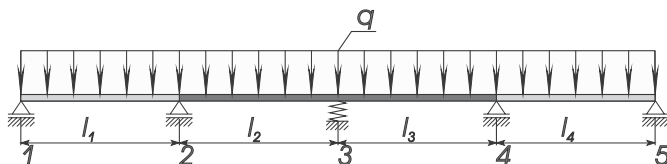
Rys. 1. Schemat odrzwi obudowy prostej — obudowa mieszana

* Katedra Geomechaniki, Budownictwa i Geotechniki, Wydział Górnictwa i Geoinżynierii, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków

** Praca wykonana w ramach badań statutowych AGH nr 11.11.100.197

W przypadku podpór podatnych wartości sił reakcji w poszczególnych stojakach są inne niż w podporach doskonale sztywnych. Wartości w nich uzależnione są od podatności samych stojaków jak również sztywności zginania stropnicy.

Tematycznie z prezentowanym artykułem bardzo blisko związana jest praca prof. H. Czopowskiego [4] (rys. 2). W pracy tej wyprowadzone zostało równanie wiążące ze sobą pięć kolejnych momentów podporowych. Równanie to również zastosuję do rozwiązania omawianego problemu. H. Czopowski jako praktyczny przykład zastosowania równania pięciu momentów rozwiązuje symetryczną belkę dwuprzęsłową, w której skrajne podpory są doskonale sztywne a podpora środkowa jest podporą sprężystą. Wyniki tego rozwiązania są więc pierwowzorem rozwiązań spotykanych w podręcznikach z wytrzymałości materiałów i mechaniki budowli (por. [1–3]). Chcąc rozwiązać postawiony problem H. Czopowski wprowadza do schematu belki dwa dodatkowe fikcyjne skrajne przęsła o rozpiętościach równych zero — rozwiązuje, więc on belkę czteroprzęsłową na pięciu podporach. Pomysłu H. Czopowskiego nie można bezpośrednio zastosować w rozwiązaniach, w których wszystkie podpory są podatne albo, gdy podpory skrajne są podatne a podpora środkowa jest doskonale sztywna.



Rys. 2. Schemat belki wieloprzęsłowej na podporach sprężystych rozwiązany przez H. Czopowskiego

Przedstawione w pracy rozwiązanie jest rozwiązaniem ogólnym, w którym wszystkie podpory są podatne, a każda z nich jest o innym współczynniku podatności. Rozwiązanie otrzymane przez H. Czopowskiego w 1896 r. [4] jest szczególnym przypadkiem rozwiązania przedstawionego w pracy. W rozwiązaniach, przyjęto następujące założenia upraszczające:

- stałą sztywność zginania (EJ) we wszystkich przęsłach stropnicy,
- pominięto nieznaczący wpływ sztywności ścinania.

Chcąc tylko uwypuklić wpływ podatności stojaków przyjęto, podobnie jak czynione to jest w wielu pracach, że obciążenie stropnic jest ciągłe i równomiernie rozłożone. Wpływ zmiany kształtu natężenia obciążenia stropnic na zmieniające się w nich wartości momentów zginających przedstawiono w pracy [5].

Celem artykułu jest nie tylko teoretyczne przybliżenie omawianej metody, ale w miarę możliwości pokazanie łatwego przejścia do praktycznych jego zastosowań. Najprostszym przykładem jest obudowa prosta trójstojakową na podporach podatnych.

2. Rozwiązanie analityczne

Rozwiązanie problemu zostało wykonane za pomocą metody sił pozwalającej na otrzymanie końcowych wyników. Metodę rozwiązania opisano układem równań kanonicznych.

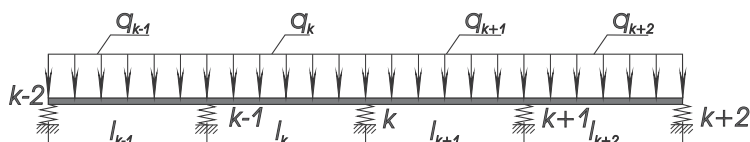
Równania w omawianym przypadku ze względu na swą budowę noszą nazwę równań pięciu momentów. Nie są one opisywane w klasycznych podręcznikach z wytrzymałości materiałów [7]. Otrzymanie poprawnych — sprawdzonych rozwiązań stało się możliwe dzięki zastosowaniu programu algebry komputerowej CAS. Inspiracją do podjęcia tematu i napisania artykułu były pytania postawione autorowi przez prof. S. Gałczyńskiego na Zimowej Szkole Mechaniki Górotworu. Dotyczyły one pominięcia wpływu podatności sprężystej stojaków w przedstawianym rozwiązaniu.

2.1. Metoda sił — równanie pięciu momentów — rys historyczny

Prawdopodobnie pierwszą publikacją odnoszącą się do zagadnienia zginania belek ciągłych na podporach sprężystych jest praca K. Pearsona z 1890 r.¹ W 1896 roku rozwiązanie związane z tym zagadnieniem opublikował również H. Czopowski. Pewne jest jednak jak stwierdza T.M. Huber² „...że obaj wymienieni autorzy doszli niezależnie od siebie do równania pięciu momentów”. W 1927 roku T.M. Huber uwzględniając wpływ energii ścinania³ ponownie wyprowadza równanie pięciu momentów w odniesieniu do belki ciągłej na podporach podatnie sprężystych. Należy tutaj zwrócić uwagę, że H. Czopowski, równanie pięciu momentów wyprowadza uwzględniając wyłącznie energię zginania.

2.2. Metoda sił — równanie pięciu momentów — belki wieloprzęsłowe

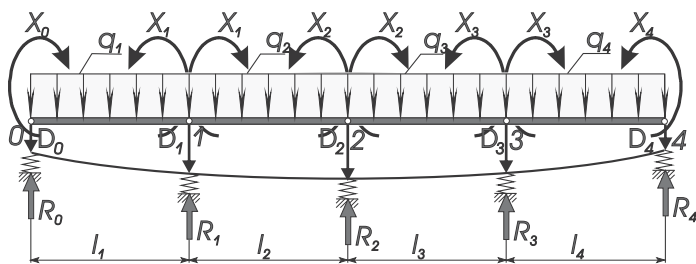
Część dowolnej obudowy prostej wyrobisk korytarzowych zastąpiono schematem belki ciągłej przedstawionej na rysunku 3. W ramach metody sił obudowę wieloprzęsłową statycznie niewyznaczalną zastępujemy schematem statycznie wyznaczalnym nazywanym w mechanice budowli układem podstawowym (rys. 4).



Rys. 3. Schemat belki ciągłej wieloprzęsłowej na podporach sprężystych

Momenty podporowe, jako wartości nadliczbowe w statyce budowli w tzw. równaniach kanonicznych metody sił oznaczane są zazwyczaj jako: $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n^4$. Podpory, stojaki,

- 1 Nie dotarłem do oryginalnej pracy opublikowanej w 1890 roku w Messenger of Mathematics.
- 2 T.M. Huber nie podaje, kto pierwszy „ustawił” równanie pięciu momentów „...nie mając pod ręką daty dawnej pracy prof. H. Czopowskiego...” (por. [9]).
- 3 Wpływ ten jest pomijalny i nie popelnia się przy tym większego błędu gdy $l/h > 8$ gdzie w tym przypadku h oznacza wysokość stropnicy. T.M. Huber w rozwiązywanym przez siebie praktycznym przykładzie wpływ ten pomija (por. [9]).
- 4 Oznaczenia te są odbiegające od powszechnie stosowanych w nauce o wytrzymałości materiałów. Zastosowano je jednak ze względu na tradycje wynikające z literatury mechaniki budowli (por. [1–3]).



Rys. 4. Układ podstawowy dla belki ciągłej wieloprzęsłowej na podporach sprężystych

w których przemieszczenia są liniowo zależne od przekazywanych na nie wartości reakcji nazywane są podporami liniowo podatnymi lub podporami sprężystymi.

Podpory sprężyste oznaczone zostały na schematach statycznych symbolem sprężyny. Zależność pomiędzy przemieszczeniami k -tej podpory a jej wartościami reakcji zapiszemy w postaci:

$$\Delta_k = \lambda_k R_k \quad (1)$$

Przyjęto, że dodatnie przemieszczenie podpór (Δ_k) zwrócone jest ku dołowi, a reakcja (R_k) — działająca na belkę (stropnicę) do góry. Współczynnik (λ_k) jest współczynnikiem podatności stojaków lub stałą podporową o wymiarze: m/N. Korzystając ze znanej relacji z wytrzymałości materiałów między siłą osiową a wydłużeniem (skróceniem) pręta stałą podporową wyrażamy za pomocą zależności:

$$\lambda_k = \frac{h_k}{E_k A_k} \quad (2)$$

gdzie:

- h_k — wysokość stojaka,
- E_k — moduł Younga,
- A_k — pole przekroju poprzecznego.

Teoretycznie współczynnik podatności stojaków w skrajnych przypadkach może przyjmować wartości równe zero lub nieskończoności. Interpretacją fizyczną tych dwóch skrajnych przypadków dla $\lambda_k = 0$ oznacza podporę nie-podatną, czyli podporę doskonale sztywną, która jak widać jest szczególnym przypadkiem podpory sprężystej. W przypadku gdy $\lambda_k = \infty$ otrzymamy wartość reakcji $R_k = 0$ niezależnie od przemieszczenia, a zatem punkt podparcia zachowywać się będzie w tym przypadku jak nie podparty. Równanie kanoniczne metody sił, adaptowane do rozwiązywanego problemu, można zapisać jednym ogólnym równaniem, które odniesione do k -tej podpory stropnicy przybiera postać:

$$X_{k-2} a_{k,k-2} + X_{k-1} a_{k,k-1} + X_k a_{k,k} + X_{k+1} a_{k,k+1} + X_{k+2} a_{k,k+2} = N_{k,p}^* \quad (3)$$

W równaniu (3) iloczyn $X_k \cdot a_{k,k}$ jest wzajemnym obrotem przekrojów podporowych na k -tej podporze pod wpływem pary równych, lecz przeciwnie skierowanych momentów X_k .

Równanie to ze względu na swą budowę wynikającą z powiązania ze sobą pięciu kolejnych momentów podporowych nosi nazwę równania pięciu momentów. Liczba równań pięciu momentów potrzebnych do rozwiązania problemu uzależniona jest krotnością statycznej niewyznaczalności obudowy. W przypadku, gdy podpory są niepodatne, czyli doskonale sztywne równanie pięciu momentów przechodzi w równanie trzech momentów, które jest już opisywane w niektórych podręcznikach do nauki o wytrzymałości materiałów⁵. (por. [7]). Współczynniki przy niewiadomych momentach podporowych w równaniu pięciu momentów (3) wyznaczamy z zależności podanych w pracy [6]:

Wyraz wolny występujący w równaniu pięciu momentów (3) obliczamy z formuły:

$$N_{k,p}^* = N_{k,p} - 6EJ \left\{ [R_{k-1}] \frac{\lambda_{k-1}}{l_k} - [R_k] \lambda_k \left(\frac{1}{l_k} + \frac{1}{l_{k+1}} \right) + [R_{k-1}] \frac{\lambda_{k+1}}{l_{k+1}} \right\} \quad (4)$$

Zbudowana jest ona z dwóch części. Części pierwsza zależna jest od rodzaju obciążenia czynnego, a część druga zależna od reakcji podporowych w układzie podstawowym. Reakcje te oznaczane są nawiasami kwadratowymi i są one równe sumie wartości reakcji dwu wolnopodpartych belek opierających się na danej podporze. Operacje całkowania występujące w pierwszej części formuły (4)⁶ można przeprowadzić poprzez całkowanie bezpośrednie lub oprzeć się na metodzie graficznej Maxwella–Mohra nazywanej niekiedy sposobem Wereszczagina, albo skorzystać z gotowych wzorów zapisanych w tablicach zamieszczonych m.in. w podręcznikach z mechaniki budowli [3]. Przed przystąpieniem, do zazwyczaj żmudnego⁷, rozwiązywania układu równań kanonicznych polecane jest sprawdzenie ich poprzez obliczenie tzw. sum kontrolnych. Sumy te są jedynie zdolne na wykazanie popełnionych błędów, ale nie na ich wskazanie.

W wyniku rozwiązania kanonicznych równań układu metody sił, zbudowanych z równań pięciu momentów, wyznaczamy jako niewiadome wartości momentów podporowych. Mając wyznaczone wartości momentów podporowych wartości reakcji w k -tym stojaku (czytaj: k -tej podporze) obliczamy z zależności:

$$R_k = [R_k] + \frac{X_{k-1}}{l_k} - X_{k-1} \left(\frac{1}{l_k} + \frac{1}{l_{k+1}} \right) + \frac{X_{k+1}}{l_{k+1}} \quad (5)$$

Po obliczeniu na podstawie zależności (5) wartości reakcji we wszystkich stojakach sprawdzamy ogólny warunek równowagi poprzez obliczenie sumy rzutów sił czynnych i biernych na oś pionową.

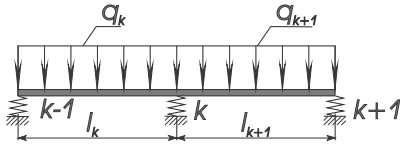
5 Równanie to nazywane bywa również twierdzeniem lub metodą trzech momentów. W podręcznikach ze statyki budowli łączone jest ono z nazwiskiem Bertota lub Clapeyrona bądź podawane niezależnie od nich. Zdania odnoszące praw autorskich do równania trzech momentów są podzielone. Problem praw autorskich próbuje wyjaśnić prof. W. Wierzbiński w specjalnie poświęconemu temu zagadnieniu artykule [11]. Wpływ sił poprzecznych w równaniu trzech momentów uwzględnia T.M. Huber, nie ma go, bowiem w klasycznej postaci tego równania.

6 W wzorach na wyrażenia $N_{k,p}$ całkowania należy przeprowadzać w układzie podstawowym według zależności $N_{k,p} = \int_{s_1}^{s_2} M_k \cdot M_p ds$; gdzie M_k — liniowa funkcja momentów zginających wynikająca z obciążenia nadliczbowego $X_k = 1$, a M_p — oznacza dowolną funkcję momentów zginających pochodzącą od obciążenia czynnego, ds. jest długością elementu.

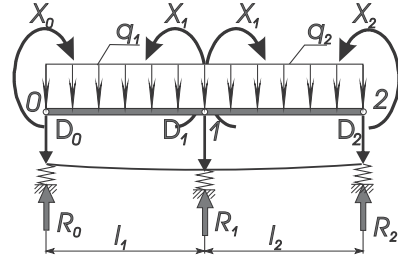
7 Tutaj niezwykle pomocny jest program typu CAS lub inne obliczenia symboliczne.

3. Obudowa trójstojakowa na podporach podatnych

Statyczny schemat obudowy trójstojakowej na podporach podatnych przedstawiono na rysunku 5. Układ podstawowy tej obudowy przedstawia rysunku 6.



Rys. 5. Schemat belki ciągłej dwuprzęsłowej na podporach sprężystych



Rys. 6. Układ podstawowy dla belki ciągłej dwuprzęsłowej na podporach sprężystych

W obudowie tej, jak i każdej innej, momenty podporowe nad skrajnymi podporami są zawsze równe zero. Równanie pięciu momentów dla tej obudowy sprowadza się do postaci:

$$X_1 a_{1,1} = N_{1,p}^* \quad (6)$$

w której współczynnik $a_{1,1}$ wynosi:

$$a_{1,1} = 2(l_1 + l_2) + 6EJ \left\{ \frac{\lambda_0}{l_1^2} + \lambda_1 \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) + \frac{\lambda_2}{l_2^2} \right\} \quad (7)$$

Prawa strona równania kanonicznego metody sił (6) wyrażona jest zależnością:

$$N_{1,p}^* = -\frac{1}{4}q(l_1^3 + l_2^3) - 6EJ \left\{ \left[\frac{q \cdot l_1}{2} \right] \frac{\lambda_0}{l_1} - \left[\frac{q \cdot l_1}{2} + \frac{q \cdot l_2}{2} \right] \lambda_1 \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right) + \left[\frac{q \cdot l_2}{2} \right] \frac{\lambda_2}{l_2} \right\} \quad (8)$$

Rozwiązując równanie kanoniczne (6) względem momentu podporowego X_1 otrzymujemy:

$$X_1 = -\frac{1}{8} \left(\frac{q \cdot l_1 l_2 (l_1^3 + l_2^3) l_1 l_2 + 12EJ \{ (\lambda_0 - 2\lambda_1 + \lambda_2) l_1 l_2 - \lambda_1 (l_1^2 + l_2^2) \}}{(l_1 l_2)^2 (l_1 + l_2) + 3EJ \{ l_2^2 (\lambda_0 + \lambda_1) + l_1^2 (\lambda_1 + \lambda_2) + 2\lambda_1 l_1 l_2 \}} \right) \quad (9)$$

Reakcje w podporach wynoszą odpowiednio:

$$R_0 = \frac{q}{8} \frac{l_1^3 l_2^3 (3l_1 + 4l_2) - l_1 l_2^5 + 12EJ \{ \lambda_1 \{ (l_1^3 l_2^3) + 3(l_1^2 l_2 + l_1 l_2^2) \} + \lambda_2 l_1 (l_1^2 - l_2^2) \}}{(l_1 l_2)^2 (l_1 + l_2) + 3EJ \{ l_2^2 (\lambda_0 + \lambda_1) + l_1^2 (\lambda_1 + \lambda_2) + 2\lambda_1 l_1 l_2 \}} \quad (10)$$

$$R_1 = \frac{q}{8} \frac{(l_1 l_2)^2 \{ 5(l_1^2 + l_2^2) + 8l_1 l_2 \} + l_1 l_2 (l_1^4 + l_2^4) + 12EJ \{ \lambda_0 (l_1^2 l_2 + l_2^3 + 2l_2^3) + \lambda_2 l_1 (l_1^2 - l_2^2) \}}{(l_1 l_2)^2 (l_1 + l_2) + 3EJ \{ l_2^2 (\lambda_0 + \lambda_1) + l_1^2 (\lambda_1 + \lambda_2) + 2\lambda_1 l_1 l_2 \}} \quad (11)$$

$$R_2 = \frac{q}{8} \frac{l_1^2 l_2^3 (4l_1 + 3l_2) - l_1 l_2^5 + 12EJ \{ \lambda_0 (l_2^3 - l_1^2 l_2^2) + \lambda_1 \{ 3(l_1^2 l_2 + l_1 l_2^2) + (l_1^3 + l_2^3) \} \}}{(l_1 l_2)^2 (l_1 + l_2) + 3EJ \{ l_2^2 (\lambda_0 + \lambda_1) + l_1^2 (\lambda_1 + \lambda_2) + 2\lambda_1 l_1 l_2 \}} \quad (12)$$

Jeżeli przyjmiemy, że sztywności podpór są takie same ($\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$) to wyrażenie (9) sprowadzi się do postaci:

$$X_1 = -\frac{1}{8} \frac{q \cdot l_1 l_2 (l_1 l_2 (l_1^3 + l_2^3) - 12EJ \cdot \lambda (l_1^2 + l_2^2))}{(l_1 l_2)^2 (l_1 + l_2) + 6EJ \cdot \lambda (l_1^2 + 2l_1 l_2 + l_2^2)} \quad (13)$$

Przyjmując, że obudowa jest symetryczna ($l_1 = l_2 = l$) otrzymamy:

$$X_1 = -\frac{1}{8} \frac{q \cdot l^2 (l^3 - 12EJ \cdot \lambda)}{l^3 + 9EJ \cdot \lambda} \quad (14)$$

Dla obudowy tej wartości reakcji obliczamy z zależności:

$$R_0 = R_2 = \frac{3}{8} \frac{q \cdot l (l^3 + 16EJ \cdot \lambda)}{l^3 + 9EJ \cdot \lambda} \quad (15)$$

$$R_1 = \frac{1}{4} \frac{q \cdot l (5l^3 + 24EJ \cdot \lambda)}{l^3 + 9EJ \cdot \lambda} \quad (16)$$

Jeżeli natomiast przyjmiemy, że podpory skrajne są doskonale sztywne, czyli że są one niepodatne, co odpowiada wartościom λ to wtedy moment podporowy obliczać należy z zależności:

$$X_1 = -\frac{1}{8} \frac{q \cdot l_1 l_2 \{l_1 l_2 (l_1^3 + l_2^3) - 12EJ \cdot \lambda (l_1 + l_2)^2\}}{(l_1 l_2)^2 (l_1 + l_2) + 3EJ \cdot \lambda (l_1 + l_2)^2} \quad (17)$$

Przy przyjęciu dla tego przypadku, że obudowa jest symetryczna (rozpiętości obu przęseł są równe) to otrzymamy wartość momentu podporowego, która w innej formie została zapisana przez H. Czopowskiego w 1896 r.

$$X_1 = -\frac{1}{8} \frac{q \cdot l^2 (l^3 - 24EJ \cdot \lambda)}{l^3 + 6EJ \cdot \lambda} \quad (18)$$

Przekształcając podane zależności wyznaczymy wartości reakcji podporowych⁸, które w stojakach skrajnych obliczamy z zależności (19), a w stojaku środkowym z (20):

$$R_0 = R_2 = \frac{3}{8} \frac{q \cdot l (l^3 + 16EJ \cdot \lambda)}{l^3 + 6EJ \cdot \lambda} \quad (19)$$

$$R_1 = \frac{5}{4} \frac{q \cdot l^4}{l^3 + 6EJ \cdot \lambda} \quad (20)$$

Gdy w zależnościach (17, 19 i 20) przyjmiemy, że wartości podatności stojaków są równe zeru ($\lambda = 0$) to otrzymamy znane z literatury rozwiązanie E. Winklera (por. [10]) odnoszące się dla obudowy na podporach stałych. Moment podporowy obliczamy z zależności:

8 H. Czopowski nie oblicza wartości reakcji podporowych.

$$X_1 = -\frac{1}{8}q \cdot l^2 \quad (21)$$

reakcje w stojakach wynoszą odpowiednio:

$$R_0 = R_2 = \frac{3}{8}q \cdot l \quad (22)$$

$$R_1 = \frac{5}{4}q \cdot l \quad (23)$$

W przypadku, gdy podatność środkowego stojaka zdążać będzie do nieskończoności to otrzymamy, że wartość momentu podporowego jest równa

$$X_1 = \frac{1}{2}q \cdot l^2 \quad (24)$$

co odpowiada momentowi przęsłowemu w środku rozpiętości belki o szerokości $2l$.

Porównanie zależności (9 i 21) lub (10 i 22) uświadamia nam jak bardzo komplikuje się analityczne rozwiązanie zagadnienia poprzez wprowadzenie podatności sprężystych podpór oraz przyjęcie, że poszczególne przęsła stropnicy są o różnych rozpiętościach. Do podobnego rozwiązania można dojść stosując metody przybliżone o kontrolowanej dokładności i stabilności numerycznej dlatego są one podstawą statyki budowli.

4. Podsumowanie i wnioski

Jedną z zalet ujawniającą się w zastosowanej metodzie układu sił jest to, że z rozwiązania dla obudowy k -stojakowej możemy otrzymać rozwiązanie dla każdej dowolnej obudowy wielostojakowej statycznie niewyznaczalnej o liczbie stojaków mniejszej od k . Rozwiązanie to otrzymamy poprzez przyrównanie odpowiedniego współczynnika podatności podpory do nieskończoności ($\lambda = \infty$) co spowoduje, że odpowiednie podpory znikną.

Przy zastosowaniu równań trzech momentów do obliczeń obudów prostych wielostojakowych nie ma możliwości uwzględnienia podatności sprężystej stojaków tak jak i nie istnieje w metodzie tej możliwość redukcji określonej liczby podpór tak jak to jest możliwe poprzez zastosowanie równań pięciu momentów. Należy przy tym zaznaczyć, że zastosowanie równań pięciu momentów daje zdecydowanie bardziej skomplikowane wyrażenia. Sposób zapisu równań kanonicznych wynikających z twierdzenia o pięciu momentach jest bardzo dogodny do zapisu sekwencyjnego mającego szerokie zastosowanie w programach komputerowych.

Przedstawione praktyczne przykłady pozwoliły na unaocznienie wpływu podatności sprężystej na ostateczne wielkości momentów zginających w stropnicach oraz wartości sił reakcji w stojakach. Należy jednak podkreślić, że wpływ ten będzie inny w przypadku, gdy przyjmiemy inny rozkład obciążeń ciągłych działających na stropnice obudów. Przy przyjęciu, że obciążenie było ciągłe i równomiernie rozłożone wyprowadzone wyrażenia są

wyrażeniami najprostszymi. Symetria układu wraz z symetrią obciążenia doprowadziła do znaczącego uproszczenia obliczeń.

Przedstawiona praca daje świadomość inżynierom projektantom o charakterze współpracy stropnic ze stojakami w ramach tych samych odrzwi obudowy prostej wielostojakowej. Współpraca ta nie była dotąd uwzględniana w przeprowadzanych dotąd obliczeniach wytrzymałościowych.

Sprężyste osiadanie stojaków zmienia nie tylko rozkład momentów zginających w stropnicach wywołanych obciążeniem zewnętrznym, ale powoduje również inny rozkład wartości reakcji w samych stojakach.

Otrzymanie rozwiązań analitycznych możliwe było dzięki zastosowaniu programu typu CAS. Programy tego typu pozwalają na rozwiązywanie problemów, które w przeszłości były nielatwe do rozwiązania.

LITERATURA

- [1] *Bielewicz E. Chudzikiewicz A.*: Statyka budowli, część druga, Układy statycznie niewyznaczalne, Wyd. II, Gdańsk 1968
- [2] *Chudzikiewicz A.*: Statyka budowli, część druga, Wyd. III, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1976
- [3] *Cywiński Z.*: Mechanika budowli w zadaniach, tom II, podstawy układów statycznie niewyznaczalnych, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa–Poznań, 1984
- [4] *Czopowski H.*: Belka wieloprzęsłowa na podporach sprężystych, Przegląd Techniczny nr 11 (s. 292–296) i 12 (s. 317–320) Warszawa 1896
- [5] *Halat W.*: Graficzna metoda wyznaczania wartości reakcji w obudowach prostych, XXII Zimowa Szkoła Mechaniki Górniczej, Instytut Geotechniki i Hydrotechniki Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1999
- [6] *Halat W.*: Zastosowanie CAS do zagadnień związanych z wytrzymałością konstrukcji budowlanych — badania statutowe AGH 11.11.100.197. Kraków 2010
- [7] <http://www.bj.uj.edu.pl/uj/katalog>, <http://katalog.agh.kzb.krakow.pl/> podręczniki do nauki o wytrzymałości materiałów i mechaniki budowli
- [8] *Huber T.M.*: Z teorii belki ciągłej, Czasopismo Techniczne nr 2, 1925, s. 17–19
- [9] *Huber T.M.*: Równanie pięciu momentów, Czasopismo Techniczne nr 2, 1927, s. 17–22
- [10] *Poznański T.*: Statyka budowli z wytrzymałością materiałów, Państwowe Wydawnictwo Szkolnictwa Zawodowego, Warszawa 1962
- [11] *Wierzbicki W.*: W sprawie pochodzenia podstawowego twierdzenia teorii belek ciągłych, Czasopismo Techniczne nr 15, Lwów 1936, s. 253–256