Zeszyty Naukowe

Instytutu Gospodarki Surowcami Mineralnymi i Energią Polskiej Akademii Nauk

nr 79, rok 2010

Mariusz KRZAK*

Konkurencja i kooperacja na lokalnym rynku surowcowym w dwuosobowych modelach teorii gier – zarys zagadnienia

Streszczenie: Rynki surowcowe, pomimo wielu wspólnych cech z rynkami innych dóbr, są rynkami specyficznymi. Ich funkcjonowanie odbiega zazwyczaj od prawideł wolnego rynku. Jest to spowodowane zarówno czynnikami geologiczno-złożowymi, jak i koniunkturą. Zmiany podaży surowca są na ogół znacznie wcześniej sygnalizowane (wieloletni cykl inwestycyjny od rozpoznania złoża do udostępnienia górniczego), rozwijają się one powolnie i nieelastycznie. Największy wpływ na wahania rynku mają czynniki niemierzalne matematycznie (wojny, kryzysy gospodarcze – zwłaszcza u dużych producentów, strajki). O obrazie rynku surowcowego decydują ponadto działania spekulacyjne, polityka rynkowa poszczególnych państw w skali globalnej, samorządowa w skali lokalnej, jak i sam charakter rynku funkcjonującego w ramach monopolu lub oligopolu. Uczestnicy rynku surowcowego mogą działać jako pojedyncze, niezależne podmioty, bądź wchodzić w skład większych, wzajemnie powiązanych zależnościami układów.

W artykule przedstawiono uproszczony modelu rynku surowcowego obejmujący tylko dwa podmioty – duopol. Na hipotetycznym przykładzie lokalnego rynku piasków budowlanych, obsługiwanego przez dwa zakłady górnicze – piaskownie, podjęto próbę modelowania zachowań obu przedsiębiorców. Ukazano możliwe strategie działania, wynikające zarówno z możliwości współpracy zakładów, jak i jej zaniechania. Scharakteryzowano zachowania użytkowników złóż w sytuacji przepływu informacji dotyczącej kosztów produkcji oraz jej braku. Zilustrowano możliwe postępowanie podmiotów górniczych w sytuacji wielokrotnego powtarzania gry. Rozwiązania oparto na klasycznych modelach Cournota oraz Stackelberga w przypadku konkurencji oraz koncepcji arbitrażu Nasha w kontekście współpracy zakładów.

Słowa kluczowe: konkurencja, kooperacja, rynek surowcowy, teoria gier

Competition and cooperation on the local mineral market in the two person game theory models – outline of issue

Abstract: Mineral markets, despite many common features with other goods markets, are specific. Their functioning usually deviates from the rules of free market. It is caused by geological factors as well as economic trends. In general, changes of supply of raw materials are indicated earlier (long-term investment cycle from deposit

* Dr inż., Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków.

reconnaissance to the mining development). These markets develop slowly and are inflexible. Mathematically immeasurable factors have the biggest impact on market fluctuations, e.g.: wars, economic crises – especially among large producers, strikes. Moreover, speculative activities and operations, market policy of individual countries on a global scale, local government at the local level, as well as character of a functioning market as a monopoly, oligopoly or competitive market. Mineral market participants can act as single, independent operators, or incorporated into larger systems of interconnected relationships.
The paper presents a simplified mineral market model covering only two players – duopoly. On the hypothetical example of local construction sand market, supported by two mining plants, an attempt of both entrepreneurs behavior modelling has been taken. Possible strategies of activity coming from cooperation prospect or its omission, were presented. Behavior of construction sand producers in the situation of information flow concerning to production costs and the lack thereof, were characterized. Possible conduction of mining operators in case of multiple repeated games was illustrated. Solutions in the case of competition are based on classical models of Cournot and Stackelberg, and the Nash bargaining solution concept, were adopted in the context of cooperation among firms.

Key words: competition, cooperation, mineral market, game theory

Wprowadzenie

Konkurencja, uznawana za fundament wolnego rynku, jest procesem wzajemnego współzawodniczenia podmiotów rynkowych. Celem tej rywalizacji jest realizacja własnych interesów wyrażająca się dążeniem do przedstawienia najkorzystniejszej oferty pewnego dobra. Przyjmując, że podmiot gospodarczy pragnie ją maksymalizować, zmuszony jest do zaoferowania dobra lepszego niż konkurenci. Konkurencja to nie tylko współzawodniczenie na tym samym rynku danego dobra, lecz także z dalszymi (istniejącymi lub potencjalnymi) uczestnikami rynku, tj.: producentami dóbr substytucyjnych, dostawcami, odbiorcami, przewoźnikami i innymi podmiotami tworzącymi otoczenie konkurencyjne. W zależności od struktury rynku, na którym zachodzi proces konkurencji, wyróżniane są różne modele konkurencji: doskonała, monopolistyczna, oligopol oraz monopol. Najkrócej ujmując: konkurencja doskonała to taka, w której wszystkie przedsiębiorstwa i konsumenci uznają, że ich działania nie wpływają na wysokość ceny rynkowej. Struktura rynku obejmuje wtedy wielu nabywców i wielu sprzedawców. Niedoskonałość konkurencji polega na tak dużym udziale jednego producenta czy sprzedawcy w podaży, że jej zwiększenie może wywołać obniżkę ceny, a zmniejszenie – podwyższenie ceny. Inaczej mówiąc cechą niedoskonałej konkurencji jest spadająca krzywa popytu na produkcję pojedynczego wytwórcy, co daje mu możliwość wyznaczenia ceny. Im mniejsza ilość producentów danego dobra, tym większa możliwość pojawienia się takiego stanu rzeczy. W krańcowym przypadku na rynku funkcjonuje jeden tylko producent – monopolista.

Rynki surowcowe charakteryzują się w większości przypadków takimi samymi cechami, jak rynki innych towarów. Przeważają tu rynki konkurencyjne, choć nieobce są rynki o charakterze oligopolu, niekiedy monopolu. Jeżeli rynek ma charakter konkurencyjny, opiera się przede wszystkim na relacjach podaży i popytu. Rynki surowcowe można rozpatrywać z punktu widzenia rożnych jego cech. Z uwagi na zasięg geograficzny wyróżnia się rynki: lokalne, regionalne, krajowe, zagraniczne, międzynarodowe lub światowe. O takiej klasyfikacji decyduje odległość miejsc wydobycia i przetworzenia kopaliny do miejsc jej konsumpcji. W ujęciu branżowym natomiast wyróżnia się rynki poszczególnych surowców np.: węgla, miedzi, srebra, kruszyw itp. Często powyższe kryteria łączy się i mówi o rynkach poszczególnych towarów określając geograficzny zasięg wymiany np.: lokalny rynek kruszyw drogowych, europejski rynek węgla czy światowy rynek złota.

Zastosowania teorii gier w aspekcie rynków surowcowych nie są obfite. Najczęściej tłem analiz bywa kwestia przetargów na dzierżawę praw do zasobów złóż (Pelto 1971; Hendricks, Porter 1994; Porter 1995), bądź zagadnienie podziału dóbr surowcowych (Thomas 2003). Kooperacji w ramach *joint venture* dotyczy artykuł Boyce'a (1997). Interesujące propozycje wdrożenia arbitrażu Nasha do podziału zysku w układzie kopalnia węgla brunatnego/elektrownia zademonstrowane są w materiałach Jurdziaka (2007a, 2007b).

1. Podstawy teorii gier

Choć określenie teoria gier – wywodzące się od gier towarzyskich – może mylić, to obecnie jest to szeroki zakres analitycznych narzędzi, pomocny w zrozumieniu zjawisk obserwowanych przy podejmowaniu decyzji. Teoria gier jest działem matematyki, który w ujęciu formalnym analizuje sytuacje dotyczące konfliktu bądź współpracy pomiędzy wieloma podmiotami. Bada tym samym sposobności optymalnego zachowania, gdzie konsekwencje działań (sukcesów bądź porażek) uczestników gry (graczy) zależą od wzajemnych decyzji (ruchów). Zdarza się często, zwłaszcza w przypadku konfliktu, że gracze ukrywają swoje postępowanie, niekiedy decydent nie ma pełnej znajomości o przebiegu danego procesu. Oba fakty powodują nieokreśloność (niepewność) w podejmowaniu decyzji. Suma niezależnie podjętych działań graczy generuje nowy stan uznawany za wynik gry. Wynikowi temu odpowiada określona wartość liczbowa – wypłata, która stanowi miarę stopnia osiągnięcia celu każdego z graczy (Drabik 2005). Dwa podstawowe założenia, wyróżniające teorię gier spośród innych narzędzi decyzyjnych, dotyczą zachowań decydentów, którzy (Osborne, Rubinstein 1998):

- definiują możliwy do osiągnięcia cel (postępują racjonalne),
- korzystają ze swojej wiedzy (informacji) oraz/lub uwzględniają oczekiwane zachowania pozostałych graczy (postępują strategicznie).

Zasadniczy termin teorii gier to gra. Na grę z kolei składają się: gracze, ruchy (posunięcia), wypłaty i informacja tworząc zbiorowo reguły gry. Grą jest zatem sytuacja, gdzie (Straffin 2004; Watson 2005; Binmore 2007):

- występuje co najmniej dwóch graczy,
- każdy gracz ma do wyboru pewną liczbę możliwych ruchów, określających sposób prowadzenia przez niego gry,
- gracze posiadają jakąś informację (choć zdarza się, że nie posiadają żadnej) oraz wiedzą, kiedy podejmują decyzje,
- wynik gry jest determinowany przez kombinacje strategii wybieranych przez graczy,
- każdemu możliwemu wynikowi gry odpowiadają pewne wypłaty (wyrażone najczęściej liczbowo).

Każdy z uczestników gry (postępując racjonalnie) dąży do maksymalizacji swojej funkcji wypłat i realizacji określonego celu. Służy temu pewna strategia postępowania wybrana spośród możliwych posunięć. Istotnym jest, że realizacja celu zależy nie tylko od podjętych przez danego gracza decyzji, lecz od wszystkich posunięć pozostałych graczy. W tym miejscu rodzić się może konflikt pomiędzy graczami, jak również pytanie o możliwość kooperacji. Każdy z graczy zmuszony jest rozstrzygnąć, jak postępować w tej grze, koniecznie z uwzględnieniem prawdopodobnych decyzji i sposobów postępowania pozostałych graczy. Gdyby funkcjonowała kompletna teoria racjonalnego rozgrywania gier, pozwalałaby ona na wskazanie najwłaściwszego sposobu postępowania w każdej sytuacji konfliktu i kooperacji. Póki co taka ogólna teoria nie jest możliwa.

Ze względu na sposób opisu wyróżniane są gry w postaci normalnej (strategicznej, macierzowej), ekstensywnej (rozwiniętej, wielochodowej), funkcji charakterystycznej lub diagramów przepływów dla gier wieloosobowych. Dwie pierwsze są najpowszechniej stosowane, a postać normalna gry jest najlepiej znaną i rozpoznawalną formą prezentacji. Gra w postaci strategicznej jest zwięzłą reprezentacją gry, w której gracze podejmują decyzje (wybierają strategie) równocześnie. Wynikłe stąd wypłaty przedstawiane są w macierzach wypłat (tabelach zysków) (1), których komórki odpowiadają każdej kombinacji strategii (profilowi strategii).

		gracz 2	
		β_1	β_2
gracz 1	α_1	2	–3
	α_2	0	2
	α_3	–5	8

(1)

Przedstawiona macierz (1) opisuje wypłaty gracza 1 w pewnej dwuosobowej grze o sumie zerowej. Przestrzeń strategii gracza 1 obejmuje $S_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, gracza 2 natomiast $S_2 = (\beta_1, \beta_2)$. Profil strategii graczy, jako wynik iloczynu kartezjańskiego wynosi:

$$S = S_1 \cdot S_2 = \{(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_1, \beta_2), (\alpha_2, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), (\alpha_3, \beta_1), (\alpha_3, \beta_2)\} \tag{2}$$

Poszczególnym parom profili odpowiadają w macierzy wypłaty (zyski), jakie otrzyma gracz 1. Z punktu widzenia gracza 2 macierz obrazuje jego straty. Oznacza to, że przy przykładowym wyborze strategii α_3 przez gracza 1 i jednoczesnym wyborze strategii β_2 przez gracza 2, wypłata gracza 1 wynosić będzie 8 jednostek, podczas gdy gracz 2 tę samą ilość jednostek straci.

W dalszej części artykułu zastosowano różnorodne typy gier dwuosobowych w modelowaniu duopolu na lokalnym rynku surowcowym, bazując na hipotetycznym przykładzie pewnej doliny rzecznej, w której w obrębie tarasu zalewowego udokumentowano dwa sąsiadujące złoża piasków budowlanych z przeznaczeniem do produkcji cegły silikatowej. Złoża są użytkowane przez dwa różne podmioty górnicze, które oferują w sprzedaży identyczny jakościowo surowiec po tej samej cenie. Jednocześnie i niezależnie od siebie włodarze piaskowni ustalają kwartalny tonaż produkcji (q_1 w zakładzie 1 i q_2 w zakładzie 2). Wielkości produkcji q_1, $q_2 \geq 0$, gdzie 0 oznacza zaniechanie wydobycia, wyrażone są w tysiącach ton. Całkowita podaż piasku budowlanego oferowana przez oba podmioty wynosi zatem $q_1 + q_2$. Poczyniono dodatkowe założenie, że całość oferowanego piasku zostaje sprzedana, a cena, którą nabywcy zechcą zapłacić, zależy od tonażu (podaży) wydobytej kopaliny. Cenę 1 Mg surowca określa równanie: $p = 25 - 1\frac{1}{5}(q_1 + q_2)$, a koszt operacyjny (wydobycie oraz przeróbka) pozyskania 1 Mg surowca wynosi 15 zł w obu zakładach.

2. Gry o sumie niezerowej – warunki konkurencji

Warunki duopolu, w których przedsiębiorstwa reagują na zmiany wielkości produkcji u konkurentów, objaśniane są najczęściej modelami Cournota oraz Stackelberga. Model Cournota zaproponowany w I połowie XIX wieku przez francuskiego ekonomistę A. Cournota to najbardziej popularny model konkurencji niedoskonałej. Opisywał on zależność pomiędzy dwoma podmiotami rynku. Zgodnie z założeniami modelu każde z przedsiębiorstw duopolu wybiera poziom swojej produkcji dążąc do maksymalizacji zysku i przyjmując wielkość produkcji konkurenta za daną. *De facto* rzeczywista wielkość produkcji drugiego z podmiotów nie jest znana, w analizie przyjmowane są teoretycznie możliwe wielkości produkcji konkurenta i dla każdej z nich wyznaczana jest odpowiedź. Zakłada się również, że produkowane przez oba podmioty dobra są identyczne i mają jednakową cenę. Równowaga, którą zaproponował w modelu Cournot, jest wersją równowagi Nasha pewnej gry.

Poszukiwanie równowagi tak zdefiniowanej gry rynkowej wymaga przy prezentacji w postaci normalnej określenia zbiorów strategii i funkcji wypłat. Każdy z użytkowników złoża dowolnie określa wielkość własnej produkcji, $S_1 = [0, \infty)$ oraz $S_2 = [0, \infty)$. Wypłatami w grze są zyski operacyjne (produkcja razy cena jednostkowa pomniejszona o koszty). Wynoszą one:

— dla piaskowni 1: $\pi_1(q_1, q_2) = \left(25 - 1\frac{1}{5}(q_1 + q_2)\right) \cdot q_1 - 15q_1,$

— dla piaskowni 2: $\pi_2(q_1, q_2) = \left(25 - 1\frac{1}{5}(q_1 + q_2)\right) \cdot q_2 - 15q_2.$

Para liczb (q_1, q_2) wyrażająca wielkość produkcji obu zakładów jest w równowadze Cournota wtedy, gdy pochodne:

$$\begin{gathered} \frac{\partial \pi_1}{\partial q_1}(q_1, q_2) = 0 \\ \text{i} \\ \frac{\partial \pi_2}{\partial q_2}(q_1, q_2) = 0 \end{gathered} \tag{3}$$

Stosowne pochodne muszą oczywiście istnieć. Równowaga Cournota opisuje sytuację, w której każdy z zakładów maksymalizuje swój zysk przy ustalonym poziomie wydobycia drugiego z zakładów. W języku teorii gier równowaga Cournota jest równowagą Nasha w grze dwuosobowej, w której graczami są dowolne firmy, a ich strategie to potencjalne poziomy produkcji, podczas gdy wypłaty reprezentują zyski (Malawski i in. 2004). Jako że poszukiwany jest profil strategii będący w równowadze Nasha należy rozważyć funkcję najlepszej odpowiedzi każdego z zakładów jako funkcję wielkości produkcji drugiego z zakładów (Watson 2005). Wypłaty dla zakładów reprezentują parabole o ramionach skierowanych w dół. Pochodne cząstkowe wynoszą:

$$25 - 2\frac{2}{5}q_1 - 1\frac{1}{5}q_2 - 15 = 0$$

i

$$25-2\frac{2}{5}q_2-1\frac{1}{5}q_1-15=0$$

Rozwiązując układ równań: $q_1 = q_2 = 2\frac{7}{9}$. W równowadze oba zakłady wydobywają jednakowe ilości kopaliny, co jest zrozumiałe przy identycznej funkcji kosztów. Przy różnych kosztach udziały zakładów w rynku byłyby zróżnicowane. Dla obliczonych wielkości produkcji zakłady osiągną zyski wynoszące $\pi_1(2\frac{7}{9}, 2\frac{7}{9}) = \pi_2(2\frac{7}{9}, 2\frac{7}{9}) = 9\frac{7}{27}$ zł/Mg, co daje w sumie $18\frac{14}{27}$ zł. Wyznaczona z punktu widzenia przedsiębiorców górniczych równowaga jest nieefektywna. Okazuje się, że zakłady mogą wypracować wyższy zysk realizując wydobycie o nieco niższym tonażu wynoszącym $2\frac{1}{12}$ Mg. Sumaryczny zysk wynosi wtedy $20\frac{5}{6}$ zł. Zatem przy wydobyciu wynikającym z równowagi na rynku występuje – z punktu widzenia zakładów górniczych – nadprodukcja piasku budowlanego. Nadprodukcja ta wynika z faktu, iż żadne z przedsiębiorstw górniczych nie uwzględnia rzeczywistych zysków drugiego. Produkcyjność krańcowa (przyrost produkcji w następstwie angażowania kolejnej jednostki zmiennego czynnika produkcji) powoduje zmianę wielkości sprzedaży zakładu i jednocześnie obniża cenę rynkową. Odnosząc cenę do wzrastającego krańcowego kosztu produkcji, zakłady dążą do zrównoważenia przeciwstawnych efektów i maksymalizacji własnych zysków. Własne koszty i korzyści zakładu przy wzrastającej produkcji różnią się od łącznych kosztów i korzyści. Przyrost produkcji u jednego z przedsiębiorców, szczególnie niekorzystnie wpływa na wypłaty drugiego, obniżając cenę surowca. Jako że efekt cenowy działania każdego z przedsiębiorstw górniczych z osobna jest mniejszy niż skumulowany efekt cenowy duopolu, zakłady górnicze czują się umotywowane do łącznej produkcji surowca w ilości przewyższającej poziom odpowiadający łącznemu optimum (Watson 2005).

Model Cournota, przypisywany do duopolu, bywa stosowany także do analiz rynków działających w charakterze oligopolu. Równowagi poszukiwane są tu podobnie. Okazuje się, że przy większej ilości podmiotów, wyznaczone przez równowagi Nasha poziomy produkcji, a co za tym idzie także ceny, zbliżają się do tych określonych w modelu konkurencji doskonałej (Malawski i in. 2004).

W modelu Cournota gracze podejmowali decyzje jednocześnie, a ich role były symetryczne; żaden z graczy nie dominował. Istnieje pewna klasa gier, wywodzących się z krytyki modelu Cournota, tzw. gry Stackelberga (Osborne, Rubinstein 1994), w których jeden z graczy ma możliwość narzucenia własnego rozwiązania drugiemu (role graczy asymetryczne). Gra Stackelberga to obok modelu Cournota i Bertranda jeden z najważniejszych modeli duopolu dla konkurencji niedoskonałej (Rasmusen 2007). Każde z przedsiębiorstw w duopolu wybiera poziom swojej produkcji dążąc do maksymalizacji zysku. Gracz dominujący (ang. *leader*) jako pierwszy wykonuje swój ruch, podczas gdy gracz wyczekujący (ang. *follower*) na ruch lidera dostosowuje swoje posunięcia do poprzednika. Gracz jako drugi podejmujący decyzje będzie dążyć do maksymalizacji wypłaty, która zależy od wyboru gracza dominującego. Gracz dominujący oczekuje, że konkurent postąpi w ten sposób właśnie, a więc może przewidzieć ruch następcy. Lider dysponuje znacznie mocniejszą i lepszą pozycją. Opisany sposób wyboru strategii przez graczy doprowadza do tzw. równowagi Stackelberga lub inaczej równowagi Nasha gry Stackelberga. Gra taka, w przeciwieństwie do gry Cournota, jest grą z pełną informacją. Analogicznym założeniem – jak w modelu Cournota – jest to, że wytwarzane przez wszystkie podmioty dobra są identyczne i mają jednakową cenę.

Dla liniowego popytu i stałych kosztów krańcowych model duopolu Stackelberga można przedstawić następująco: $p(Q) = a - b(Q)$, gdzie Q to łączna produkcja piasku przez oba zakłady górnicze. Cena jednostkowa piasku jest zatem funkcją całkowitej ilości piasku na rynku. Koszty operacyjne wydobycia i przeróbki kopaliny przy wielkości q_i (i = 1, 2) można wyrazić jako $c(q_i) = f + dq_i$. W formule popytu i kosztów zmienne a, b, f i d to pewne nieujemne stałe, przy czym $a > d$, $b > 0$. W analizowanym przykładzie obu piaskowni wynoszą one $a = 25$, $b = 1\frac{1}{5}$, $f = 0$, $d = 15$. W grze Stackelberga decyzje graczy podejmowane są niejednocześnie i zależnie. Lider odgrywa wiodącą rolę i jako pierwszy decyduje się ustalić pewien poziom wydobycia. W odniesieniu do decyzji lidera, gracz wyczekujący przyjmuje wielkość q_1 jako znaną. Zakład górniczy 2 będzie dążyć do takiego poziomu produkcji $q_2(q_1)$ zależnej od q_1 tak, by maksymalizować swój zysk:

$$\pi_2(q_1, q_2(q_1)) = (a - b(q_1 + q_2(q_1)) \cdot q_2(q_1)) - dq_2(q_1) \qquad (4)$$

Z kolei zakład górniczy 1, przeczuwając takie postępowanie zakładu 2, wybiera takie q_1, by maksymalizować:

$$\pi_1(q_1, q_2(q_1)) = (a - b(q_1 + q_2(q_1)) \cdot q_1) - dq_1 \qquad (5)$$

Równowaga Nasha tej gry może być znaleziona z wykorzystaniem algorytmu indukcji wstecznej. Gra jest dwuetapowa, w pierwszym zakład górniczy wybiera poziom wydobycia q_1, w drugim zakład górniczy 2, znając wybór poprzednika, decyduje się eksploatować w ilości $q_2(q_1)$. Dla gry istnieje tylko jedna równowaga.

Różniczkując funkcję zysku zakładu 2 i przyrównując ją do zera uzyskiwane jest:

- $\dfrac{\partial \pi_2}{\partial q_2(q_1)}(q_1, q_2(q_1)) = a - bq_1 - 2bq_2(q_1) - d = 0$

stąd:

$$q_2(q_1) = \frac{a - bq_1 - d}{2b} \qquad (6)$$

Przy takim poziomie produkcji cena równowagi wynosi $p = \dfrac{a - bq_1 + d}{2}$ i jak widać jest zależna od q_1.

Aktualnie, podstawiając do funkcji zysku zakładu górniczego 1 produkcję zakładu górniczego 2, różniczkując ją i porównując do 0 otrzymywane jest:

- $\dfrac{\partial \pi_1}{\partial q_1}(q_1, q_2(q_1)) = \dfrac{a}{2} - \dfrac{d}{2} - bq_1 = 0$

stąd:

$$q_1 = \frac{a-d}{2b}$$
$$\text{i} \tag{7}$$
$$q_2(q_1) = \frac{a-d}{4b}$$

Wypłaty graczy wynoszą w konsekwencji:

$$\pi_1(q_1, q_2(q_1)) = \left(\frac{a - bq_1 + d}{2}\right) \cdot q_1 - dq_1 = \frac{(a-d)^2}{8b}$$
$$\pi_2(q_1, q_2(q_1)) = \left(\frac{a - bq_1 + d}{2}\right) \cdot q_2(q_1) - dq_2(q_1) = \frac{(a-d)^2}{16b} \tag{8}$$

Wprowadzając stosowne stałe, wielkości produkcji oraz zysków obu zakładów górniczych wynoszą:

$q_1 = \frac{25-15}{2 \cdot 1\frac{1}{5}} = 4\frac{1}{6}$,

- $q_2 = 2\frac{1}{12}$,

$\pi_1\left(4\frac{1}{6}, 2\frac{1}{12}\right) = 10\frac{5}{12}$,

$\pi_2\left(4\frac{1}{6}, 2\frac{1}{12}\right) = 5\frac{5}{24}$

Pozycja wyczekującej kopalni jest zdecydowanie gorsza, zdobędzie o połowę mniejsze zyski niż zakład górniczy podejmujący decyzje jako pierwszy. Liderowanie jednego z graczy może być wynikiem przewyższającego potencjału produkcyjnego, jak i wynikać może z przedsiębiorczości, reklamy czy większej zdolności do przejawiania inicjatywy (Malawski 2004).

3. Gry o sumie niezerowej – warunki kooperacji

Rozwinięciem gier niezerowych niekooperacyjnych są gry niezerowe kooperacyjne. Gry kooperacyjne mają szerokie zastosowania w makroekonomicznej skali funkcjonowania przedsiębiorstw. W grach tego typu gracze mogą porozumiewać się ze sobą i formułować koalicje. W przypadku gier dwuosobowych nie jest to być może zagadnienie zbyt szerokie i ciekawe, z racji niewielkich możliwości tworzenia koalicji. Poszukiwanie rozwiązań gier kooperacyjnych napotyka jednakże na dość zasadnicze problemy. Dla uzmysłowienia rodzaju komplikacji rozważono następującą grę z macierzą wypłat (9).

		gracz 2	
		β_1	β_2
gracz 1	α_1	2, 6	10,5
	α_2	4,8	0,0

(9)

Jakie rozwiązanie gry jest (byłoby) sprawiedliwe? Gra posiada równowagę Nasha, a wyznacza ją profil (α_2, β_1). Gra mogłaby zakończyć się w tym rozwiązaniu, jednakże możliwość kooperacji graczy rozszerza ich pole manewru. Narzuca się sugestia, że jako rozwiązanie należy przyjąć takie wypłaty, które są sumarycznie największe i podzielić je między graczy. Para strategii (α_1, β_2) mogłaby być takim rozwiązaniem, gracze wygrywają łącznie 15 jednostek i dzielą je po równo między siebie. Przy zastosowaniu równowagi Nasha sumaryczna wypłata wynosi tylko 12 jednostek. Rozwiązanie takie jest próbą rozwiązania o charakterze egalitarnym, zrównującym prawa graczy (Straffin 2004). Pomimo pozornej sprawiedliwości obarczone ono jest niekiedy istotnymi wadami. Pierwsza trudność wynika z tego, że jednostki użyteczności są czasem wyrażone abstrakcyjnymi kategoriami użyteczności, np. satysfakcją. Suma użyteczności dla graczy jest trudna do racjonalnej interpretacji, także ich transfer czy podział jest niekiedy niemożliwy do realizacji. W przypadku, gdy wypłatami są jednostki pieniężne, wzmiankowana trudność zostaje oddalona. Drugą znaczącą wadą rozwiązania egalitarnego jest ignorancja asymetrii strategicznej pozycji obu graczy. Gracz 2 ma tu zdecydowanie mocniejszą pozycję, jego strategia β_1 dominuje strategię β_2. Wybierze on raczej strategię pierwszą, podczas gdy gracz 1 strategię α_1. Gracz 2 może nie być skłonny do kooperacji, uważając – zresztą słusznie – że nie powinno się lekceważyć jego uprzywilejowanej pozycji (tym samym ignorować realia gry). Możliwym jest arbitraż, lecz jaki? W grach niezerowych mogą być także stosowane rozmaite ruchy strategiczne w postaci gróźb, szantażu lub obietnic. Rozwiązania gier kooperacyjnych o sumie niezerowej powinny spełniać dwa podstawowe postulaty sugerowane już przez Neumanna i Morgensterna (1944):

- optymalności w sensie Pareto: nie może istnieć zatem żaden inny wynik, który byłby lepszy dla obu graczy lub lepszy dla jednego, a nie gorszy dla drugiego,
- wypłaty graczy nie będą niższe niż ich poziomy bezpieczeństwa, żaden z graczy nie może zostać zmuszony do zawiązania kooperacji, gdyby powodowało to obniżenie jego wypłat w stosunku do gry rozgrywanej niekooperacyjnie.

Poziom bezpieczeństwa gry dla dowolnego gracza jest minimalną wielkością wypłaty, którą może sobie zapewnić. Rozwiązywanie gry kooperacyjnej z wykorzystaniem poziomów bezpieczeństwa wynikających z wartości gry (rozwiązanie Nasha) nazywane jest schematem arbitrażowym (Nash 1951).

Powracając do gry duopolu dwóch producentów piasku zmieniono ich funkcję kosztów. Koszty piaskowni 1 oceniono na 10 zł/Mg, podczas gdy koszty piaskowni 2 pozostawiono bez zmian. Założono, w uproszczeniu, że niezależnie od wolumenu produkcji koszt ten nie ulega wahaniom. Cenę tony surowca nadal określa równanie: p = $25 - 1\frac{1}{5}(q_1 + q_2)$. Ponownie, każdy z użytkowników złoża dowolnie określa wielkość własnej produkcji, S_1 = = $[0, \infty)$ oraz $S_2 = [0, \infty)$, a wypłatami w grze są zyski:

- dla piaskowni 1: $\pi_1(q_1, q_2) = \left(25 - 1\frac{1}{5}(q_1 + q_2)\right) \cdot q_1 - 10q_1$,
- dla piaskowni 2: $\pi_2(q_1, q_2) = \left(25 - 1\frac{1}{5}(q_1 + q_2)\right) \cdot q_2 - 15q_1$.

Przy bardzo małej podaży, sprzedaż pojedynczej jednostki (1 tysiąca Mg piasku) możliwa jest po 25 zł. Przy wzroście produkcji i nasyceniu rynku, sprzedaż całkowitej produkcji możliwa jest tylko przy obniżce cen. Każdy z zakładów dąży do maksymalizacji zysku, który jest pochodną nie tylko własnej produkcji, lecz także wielkości produkcji konkurenta (zależność tę ujmuje w formułach zysku wyraz „$-1\frac{1}{5}\,q_1 \cdot q_2$”, tak więc jest to pewna gra obu kopalń).

Analizując sytuację obu producentów piasku z punktu widzenia niestrategicznego, oba zakłady produkują początkowo niewielkie ilości piasku, następnie powoli zwiększając produkcję doprowadzają do momentu, gdy koszt wyprodukowania dodatkowego 1 tys. Mg piasku równy jest cenie, którą można zań uzyskać, czyli:

— dla piaskowni 1: $10 = 25 - 1\frac{1}{5}(q_1 + q_2)$,

— dla piaskowni 2: $15 = 25 - 1\frac{1}{5}(q_1 + q_2)$.

Z równań wynika, iż: $q_1 = 12\frac{1}{2} - q_2$, $q_2 = 8\frac{1}{3} - q_1$. Dla piaskowni 2 istotne jest by łączna produkcja nie przekraczała $8\frac{1}{3}$ tys. Mg. Powyżej tej wielkości koszty produkcji przewyższać będą przychody ze sprzedaży surowca. Dla piaskowni 1 łączna wielkość produkcji, z racji niższych kosztów, powinna być nie większa niż $12\frac{1}{2}$. Trudno tu wskazać równowagę, z której zadowoleni byliby obaj gracze. Gdyby kopalnie jednakowo podnosiły tonaż eksploatacji, możliwe jest, że byłaby to równowaga dla wielkości produkcji $q_1 = q_2 = 4$, skutkująca zyskami w wysokości $\pi_1(q_1, q_2) = 21{,}6$ i $\pi_2(q_1, q_2) = 1{,}6$. Klasyczna równowaga nie uwzględnia wpływu wielkości produkcji obu producentów na cenę produktu. Przy niższej produkcji cena surowca byłaby wyższa, a tym samym wyższe byłyby generowane zyski. Stąd problem ten można przedstawić w postaci dwuosobowej, niezerowej gry producentów piasku. Stosowną macierz ewentualnych wypłat zestawiono w tabeli 1. Wypłaty podano dla skokowej zmiany poziomu wydobycia, co 1 tys. Mg.

W grze jest równowaga – punkt, w którym żaden z graczy nie może zwiększyć swojego zysku poprzez zmianę wielkości produkcji. Jest to równowaga Cournota-Nasha, której sposób znajdywania został zaprezentowany przy modelu Cournota. Równowagę tę opisują wielkości produkcji $q_1 = 5\frac{5}{9}$, $q_2 = 1\frac{7}{18}$ gwarantujące zyski $\pi_1(q_1, q_2) = 37\frac{1}{27}$, $\pi_2(q_1, q_2) = 2\frac{17}{54}$ dla ceny piasku $16\frac{2}{3}$ zł. Równowaga uwypukla dominującą rolę w duopolu piaskowni 1, która przy niższych kosztach jest w uprzywilejowanej pozycji. Równowaga ta nie jest paretooptymalna, obie piaskownie zyskałyby więcej kooperując, co obrazuje rysunek 1.

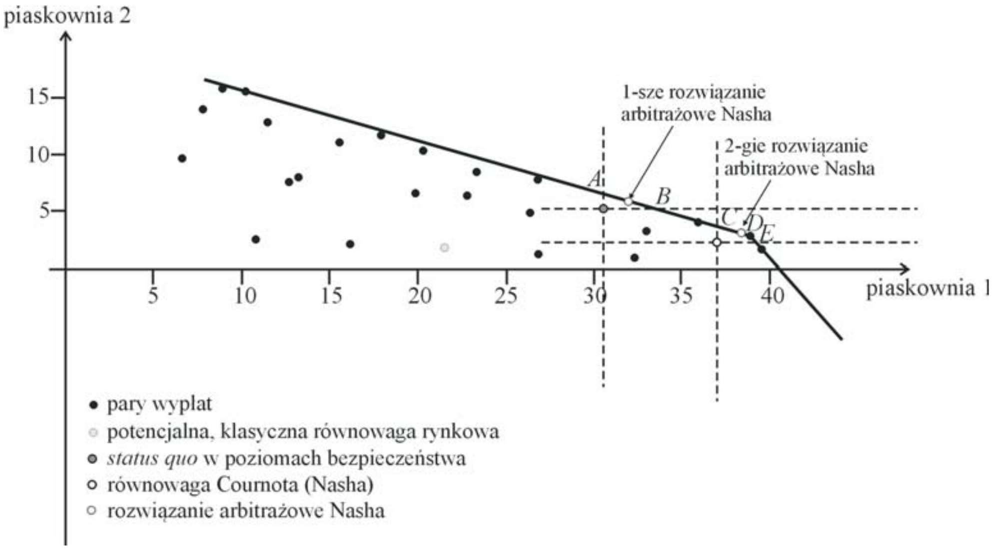
Przy prawdopodobnej kooperacji graczy możliwe jest wyznaczenie rozwiązań arbitrażowych Nasha (rys. 1). W pierwszym przypadku wypłatami *status quo* jest para wypłat wynikająca z poziomów bezpieczeństwa. Dla gry z macierzą wypłat jak w tabeli 1 jest to para o wypłatach (38,6; 5,2) odpowiadająca eksploatacji 3 tys. Mg w piaskowni 1 oraz 1 tys. Mg w piaskowni 2. Zbiór negocjacyjny wyznacza odcinek $\overline{AB}$, a rozwiązanie obejmuje wypłaty $\pi_1(q_1, q_2) = 32{,}1$, $\pi_2(q_1, q_2) = 5{,}87$, odpowiadające przybliżonej eksploatacji $q_1 \approx 3{,}65$ tys. Mg, $q_2 \approx 1{,}52$ tys. Mg. Obniżenie łącznej eksploatacji o nieco ponad 2,5 tys. Mg w stosunku do równowagi Cournota-Nasha poprawia tylko sytuację zakładu górniczego 2, a więc nie jest w stosunku do niej paretooptymalne. Cena surowca oscyluje wtedy na poziomie 18,80 zł/Mg.

Jako że pierwsze rozwiązanie arbitrażowe Nasha nie jest paretooptymalne w stosunku do równowagi Cournota-Nasha, wyliczono drugie rozwiązanie arbitrażowe Nasha ze *status quo* w równowadze Cournota-Nasha. Zbiór negocjacyjny wyznacza odcinek $\overline{CD}$, a rozwiązanie zawiera się w wypłatach $\pi_1(q_1, q_2) = 38{,}56$, $\pi_2(q_1, q_2) = 2{,}99$ (rys. 1). Z wypłatami kores-

TABELA 1. Wypłaty piaskowni przy różnej wielkości wydobycia

TABLE 1. Sand quarries payoffs at different mining output

	q_2 – wydobycie w piaskowni 2								
		0	1	2	3	4	5	6	7
q_1 – wydobycie w piaskowni 1	0	0; 0	0; 8,8	0; 15,2	0; 19,2	0; 20,8	0; 20	0; 16,8	0; 11,2
	1	13,8; 0	12,6; 7,6	11,4; 12,8	10,2; 15,6	9; 16	7,8; 14	6,6; 9,6	5,4; 2,8
	2	25,2; 0	22,8; 6,4	20,4; 10,4	18; 12	15,6; 11,2	13,2; 8	10,8; 2,4	8,4; –5,6
	3	34,2; 0	38,6; 5,2	27; 8	23,4; 8,4	19,8; 6,4	16,2; 2	12,6; –4,8	9; –14
	4	40,8; 0	36,8; 4	31,2; 5,6	26,4; 4,8	21,6; 1,6	16,8; –4	12; –12	7,2 –22,4
	5	45,0; 0	39,8; 2,8	33; 3,2	27; 1,2	21; –3,2	15,8; –10	9; –19,2	3; –30,8
	6	46,8; 0	39,6; 1,6	32,4; 0,8	25,2; –2,4	18; –8	18,8; –16	3,6; –26,4	–3,6; –39,2
	7	46,2; 0	37,8; 0,4	29,4; –1,6	21; –6	12,6; –12,8	4,2; –22	–4,2 –33,6	–12,6; –47,6



Rys. 1. Pary wypłat w grze duopolu piaskowni (zaznaczono tylko dodatnie wypłaty graczy)

Fig. 1. Pairs of payoffs in duopoly sand quarries game (positive players payoffs were marked only)

ponduje tonaż eksploatacji wynoszący w piaskowni 1 $q_1 \approx 4{,}35$ tys. Mg, w piaskowni 2 z kolei $q_2 \approx 0{,}77$ tys. Mg. Łączna produkcja w wysokości 5,12 tys. Mg przekłada się na cenę surowca na poziomie 18,86 zł/Mg.

Kooperacja w warunkach duopolu polega z reguły na zmniejszeniu produkcji i podniesieniu cen, co jest niekorzystne dla konsumentów. Taka równowaga, ustalona dla kooperacji bywa nazywana „zmową producentów" i często jest prawnie zakazana. W przypadku, gdyby w grze piaskownia 1 mogła przekazywać drugiej wypłaty uboczne, czyli przekazywać jej część własnego zysku, zakłady osiągnęłyby jeszcze lepszy rezultat. Eksploatacja 5 tys. Mg w piaskowni 1 oraz 1 tys. Mg w zakładzie 2 zapewnia łączny zysk w wysokości 41,8 (o 0,33 więcej niż dla drugiego rozwiązania arbitrażowego Nasha). Piaskownia 1 przekazując przykładowo 0,25 ze swojego zysku piaskowni 2 obniża własny zysk do 39 – 0,25 = 38,75. Zysk piaskowni 2 ulega wtedy podwyższeniu do 2,8 + 0,25 = 3,05. Oba zakłady górnicze otrzymują więcej niż w drugim rozwiązaniu arbitrażowym Nasha. Przekazywanie wypłat ubocznych jest z reguły nielegalne, choć korzystnym efektem takiej umowy dla konsumentów piasku jest obniżka ceny surowca do 17,80 zł/Mg w stosunku do arbitrażu.

Porównując rezultaty, ranking dopuszczalnych rozwiązań dla producentów piasku zestawia tabela 2. Uwzględniono w niej także przypadek czystego monopolu, gdy na rynku jest tylko jeden producent piasku.

TABELA 2. Ranking rozwiązań gry duopolu piaskowni

TABLE 2. Ranking of solutions in duopoly sand quarries game

Rozwiązanie	Wielkość produkcji [tys. Mg]		Zysk [tys. zł]		Cena surowca [zł/Mg]
	q_1	q_2	zakład 1	zakład 2	
Monopol – zakład 1	6,25	–	46,87	–	17,50
Monopol – zakład 2	–	4,16	–	20,83	20,00
Kooperacyjne z wypłatami ubocznymi	5,00	1,00	38,75	3,05	17,80
Arbitrażowe Nasha nr 2	4,35	0,77	38,52	2,99	18,86
Równowaga Cournota (Nasha)	5,55	1,39	37,04	2,31	16,67
Klasyczna równowaga rynkowa	4,00	4,00	21,60	1,60	15,40

Najkorzystniejszy układ dla producentów to oczywiście model czystego monopolu, gdzie wypłaty producentów są najwyższe. Przy wyższej funkcji kosztów obu zakładów prawidłowość ta byłaby jeszcze bardziej jednoznaczna. Uporządkowanie rozwiązań z punktu widzenia konsumenta jest zazwyczaj odwrotne. Najbardziej korzystne jest oczywiście to, gdzie ceny surowca są najniższe: równowaga klasyczna oraz równowaga Cournota-Nasha.

4. Gry z niekompletną informacją

Aplikacja teorii gier do rzeczywistych sytuacji otaczającego świata wymaga uświadomienia sobie przynajmniej dwóch, spośród wielu faktów, które różnicują model przyjęty w klasycznej teorii gier od realnej sytuacji (Aumann, Maschler 1995):

— w odróżnieniu od sytuacji w grze, która jest zazwyczaj jednorazową kwestią, konflikt w rzeczywistym świecie prowadzi często do kolejnej sytuacji konfliktowej. Oznacza to, że rozwiązanie modelu w teorii gier nie zawsze (niestety tak jest najczęściej) jest idealnym rozwiązaniem rzeczywistego problemu. Decydent musi uwzględnić nie tylko natychmiastowe wypłaty, jakie można uzyskać, lecz także efekty, w tym konfliktowe, które ta decyzja może spowodować w przyszłości,

— w przeciwieństwie do sytuacji w grze, w której przyjmowane jest zazwyczaj, że gracze znają zarówno wszystkie dostępne i możliwe strategie, jak i związane z nimi wypłaty, w realnym świecie uczestnicy gry dysponują tylko częściową wiedzą o dostępnych im oraz ich oponentom strategiach. Ponadto stosowne wypłaty przypisane podjętym strategiom są praktycznie niemożliwe do precyzyjnego ustalenia z powodu braku znajomości wszystkich stosownych i istotnych faktów.

Aby stwierdzić, że gra jest grą o kompletnej lub niekompletnej informacji należy wiedzieć coś o okolicznościach, w których jest rozgrywana. Nie wdając się w zbytnie szczegóły należy stwierdzić, że gracze dysponują zazwyczaj różnym jej zakresem. W grach z pełną informacją gracze znają wszystkie wcześniejsze decyzje innych graczy i wyniki dotychczasowych posunięć losowych. W klasie gier z niepełną informacją, w której znaczącą rolę odgrywają gry z niekompletną informacją, jeden lub obaj gracze nie znają, bądź nie są pewni funkcji wypłat i/lub zbiorów strategii. Niewiedza może też obejmować nieznajomość preferencji, tożsamości lub liczby graczy bądź kolejności decyzji. Harsanyi (1967–1968) tworząc fundamenty teorii gier z niekompletną informacją prezentował, iż wiele sytuacji z brakiem informacji może być modelowane jako klasyczne gry z kompletną informacją z włączonym rachunkiem prawdopodobieństwa. Osiągnął to poprzez wprowadzenie dodatkowego, fikcyjnego gracza – natury (w odróżnieniu od stanu natury gracz ten jest tu traktowany jako podmiot gry wykonujący posunięcie) – modelującego niepewność. Natura generując przypadkowe posunięcia przypisuje każdemu z pozostałych uczestników gry pewien losowy typ gracza z własnymi przekonaniami, którego to późniejsze zachowanie w grze przesądza o jego funkcji wypłat.

W omówionych dotychczas grach duopolu piaskowni gracze wiedzieli, jaką grę rozgrywają. Obecnie, w prezentowanej grze bayesowskiej możliwe jest uwzględnienie niepewności graczy, co do samej gry będącej przedmiotem rozgrywki. Niepewność dotycząca zasadniczych aspektów takiej gry (np. przestrzeni strategii i innych) sprowadza się w zasadzie tylko do niepewności dotyczącej wypłat (Rasmusen 2007; Leyton-Brown, Shoham 2008). Zasadniczo gry w postaci bayesowskiej rozwiązywane są na dwa sposoby (Watson 2005; Leyton-Brown, Shoham 2008). Pierwszy sposób polega na analizie warunków racjonalizowalności i wyznaczeniu równowag Bayesa-Nasha. Różnica pomiędzy równowagą Nasha a równowagą Bayesa-Nasha wynika z tego, że ta druga wyszukiwana jest dla gier bayesowskich i opiera się na pojęciu oczekiwanej użyteczności. Jeśli gra daje się przedstawić w formie macierzowej, to sposób ten jest wygodny i szybki. Druga metoda polega zaś na potraktowaniu gracza, o którym wiadomo, że na jego decyzje ma wpływ czynnik losowy, jako dwóch graczy o odmiennych typach. Oba sposoby rozwiązywania gier bayesowskich nie zawsze prowadzą do takich samych wyników, zwłaszcza w sytuacji, gdy jakiś typ gracza pojawia się z prawdopodobieństwem wynoszącym 0 (Watson 2005).

Podejście drugie wykorzystano do omawianego przykładu gry piaskowni. Przyjęto, że popyt na piasek określa równanie $d = 1 - Q$, gdzie Q to całkowita produkcja obu zakładów górniczych. Popyt ten jest odwrotną zależnością między ceną a ilością dobra (na większości rynków, w miarę spadku cen zwiększa się ilość zakupywanych dóbr). Zakład górniczy 1 wybiera produkcję w wysokości q_1, którą może zrealizować po zerowym koszcie krańcowym. Koszty produkcji zakładu drugiego, uzależnione od stanu natury (np. lokalnej zmienności jakości kopaliny) są wyłączną wiedzą tegoż zakładu. Z prawdopodobieństwem $p = \frac{1}{3}$ piaskownia 2 produkuje po zerowym koszcie krańcowym, a z prawdopodobieństwem $1 - p = \frac{2}{3}$ produkuje po stałym koszcie krańcowym wynoszącym $\frac{1}{5}$. Oznaczając typ zakładu 2 notacją N i W (niskie i wysokie koszty) może on produkować w wysokości q_2^N lub q_2^W. Piaskownia 2 ma pełną świadomość, jakiego typu koszty ponosi, dla piaskowni 1 znane są tylko prawdopodobieństwa wystąpienia *N* i *W*. Oba zakłady górnicze nadal chcą maksymalizować swoje zyski, poszukiwana jest zatem równowaga dla tej gry rynkowej.

Wypłaty dla piaskowni 2 przy niskich kosztach (*N*) to zysk równy przychodowi pomniejszonemu o koszty:

— $\pi_2^N = (1 - q_1 - q_2^N) \cdot q_2^N$.

W sytuacji, gdy koszty będą na poziomie W, to wypłata wyniesie:

— $\pi_2^W = (1 - q_1 - q_2^W) \cdot q_2^W - \frac{q_2^W}{5}$.

Wypłatą zakładu 1 w zależności od profilu strategii $(q_1;\ q_2^N,\ q_2^W)$ jest zysk:

— $\pi_1 = \frac{1}{3}(1 - q_1 - q_2^N) \cdot q_1 + \frac{2}{3}(1 - q_1 - q_2^W) \cdot q_1 = \left(1 - q_1 - \frac{q_2^N}{3} - \frac{2q_2^W}{3}\right) \cdot q_1$.

Poszukiwanie bayesowskiej równowagi Nasha poprzedza wyodrębnienie dwóch graczy dla zakładu górniczego 2. Jeden typ gracza to gracz 2^N, drugi natomiast to gracz 2^W. Należy wyznaczyć funkcje najlepszych odpowiedzi obu zakładów. Wiedząc, że poszukiwana jest równowaga Nasha, koniecznym jest znalezienie funkcji najlepszej odpowiedzi każdego zakładu, jako funkcji wielkości produkcji drugiego z zakładów. Wykresami funkcji wypłat zakładów są parabole, a więc funkcje zmiennej produkcji $(q_1;\ q_2^N, q_2^W)$. Poprzez różniczkowanie funkcji i późniejsze przyrównanie pochodnych cząstkowych do zera znalezione zostaną wielkości maksymalizujące jej zysk.

Stosowne warunki dla pochodnych to: $\frac{\partial u_1}{\partial q_1} = 0,\ \frac{\partial u_2^N}{\partial q_2^N} = 0,\ \frac{\partial u_2^W}{\partial q_2^W} = 0.$

Najlepszą odpowiedzią zakładu 1 na q_2^N, q_2^W gracza 2 jest:

— $BR_1(q_2^N, q_2^W) = \frac{1}{2} - \frac{q_2^N}{6} - \frac{q_2^W}{3}$.

Najlepszą odpowiedzią zakładu 2^N na q_1 gracza 1 jest:

— $BR_2^N(q_1) = \frac{1}{2} - \frac{q_1}{2}$,

zaś najlepszą odpowiedzią zakładu 2^W na q_1 gracza 1 jest:

— $BR_2^W(q_1) = \frac{2}{5} - \frac{q_1}{2}$.

Rozwiązując adekwatny układ równań:

$$— \begin{cases} q_1 = \frac{1}{2} - \frac{q_2^N}{6} - \frac{q_2^W}{3} \\ q_2^N = \frac{1}{2} - \frac{q_1}{2} \\ q_2^W = \frac{2}{5} - \frac{q_1}{2} \end{cases}$$

bayesowską równowagę Nasha definiuje profil $q_1 = \frac{17}{45}, q_2^N = \frac{14}{45}, q_2^W = \frac{19}{90}$. W równowadze piaskownia 1 produkuje $\frac{17}{45}$ ogólnej ilości piasku na rynku, zakład 2 natomiast $\frac{14}{45}$ przy niskich kosztach i $\frac{19}{90}$ przy wysokich.

5. Gry powtarzane

Gra powtarzana to gra, w której wymagane jest jej powtórzenie. Omówione wcześniej gry dotyczyły sytuacji, które nie obligowały do rozgrywania kolejnej gry. Gra powtarzana jest grą rozgrywaną w kolejnych ustalonych momentach, gdzie liczba wszystkich okresów w grze może być liczbą naturalną; może także być nieskończona, co oznacza, że gra powtarzana jest w nieskończoność. W każdym z okresów gracze rozgrywają statyczną grę etapową (subgrę, podgrę), w której jednocześnie i niezależnie od siebie podejmują jakieś decyzje. Każda z decyzji skutkuje pewnymi wypłatami w grze etapowej. W każdym z okresów rozgrywana jest dokładnie jedna i ta sama gra etapowa, a gracze w każdym okresie t pamiętają historię gry – czyli ciąg podjętych decyzji od pierwszego okresu aż do $t-1$. Symbol t oznacza tu zmieniający się numer okresu. Wynik gry powtarzanej to zdyskontowana suma wyników wszystkich gier. Fakt, że gracze dyskontują swoje przyszłe wypłaty, wymaga wprowadzenia czynnika dyskonta $\delta \in [0, 1]$, który prowadzi do wyniku gry dla gracza i w wymiarze:

$$\pi_i = \pi_i(1) + \delta \cdot \pi_i(2) + \delta^2 \cdot \pi_i(3) + \ldots + \delta^{T-1} \cdot \pi_i(T) \tag{10}$$

gdzie

$\pi_i(t)$ – wynik gracza i w powtórzeniu t.

Przy braku dyskontowania czynnik $\delta = 1$, a $\delta = 0$ oznacza, że jedyna istotna dla gry wypłata przypada tylko na pierwszą grę etapową.

Tak jak w koncepcji dyskontowania czynnik dyskonta umożliwia ocenę wypłaty z przyszłości i porównanie jej z wypłatą otrzymywaną obecnie. W grze nieskończenie powtarzanej czynnik dyskontowy nie może być równy 1 i przyjmowany jest ogólnie jako $\delta < 1$. W grach współczynnik ten nazywany bywa stopniem niecierpliwości gracza (Malawski i in. 2004). Czynnik dyskonta może być tu interpretowany dwojako. Po pierwsze, może być przyjęty do reprezentacji sytuacji, gdy graczowi bardziej zależy na dobrym samopoczuciu w perspektywie krótkookresowej niż na dłuższą metę. Przyjmuje on wtedy współczynniki dyskonta bliskie zeru, nie czekając na ewentualne przyszłe korzyści. Alternatywnie można przyjąć, że gracz troszczy się jednakowo zarówno o przyszłość, jak i teraźniejszość, ale z jakimś prawdopodobieństwem zakłada, że gra zakończy się w każdej z rund. Przyjmuje on wtedy współczynniki dyskonta bliższe jedności oczekując większych korzyści w przyszłości. Różnica $1 - \delta$ reprezentuje prawdopodobieństwo wcześniejszego zakończenia gry (Leyton-Brown, Shoham 2008).

Wykorzystując procedurę rozwiązywania gier powtarzanych opisaną przez Malawskiego i in. (2004) ponownie rozpatrzono modelu duopolu piaskowni. Obie kopalnie piasku, będąc jedynymi jego dostawcami w pewnym obszarze monopolizują lokalny rynek. Ich wzajemne relacje mogą być zgodne lub antagonistyczne. W pierwszym przypadku „dogadują się" i wspólnie ustalają wielkości produkcji i ceny oferowanego surowca, w drugim natomiast zwalczają się stosując różnorakie praktyki. Sytuacja ta jest grą, w której strategiami graczy jest albo kooperacja (K) albo przeciwstawianie się (R) drugiemu z graczy. Ogólna macierz takiej gry obejmuje wypłaty (11).

		piaskownia 2	
piaskownia 1		*K*	*R*
	K	(A, A)	(D, B)
	R	(B, D)	(C, C)

(11)

Istotne jest, by wypłaty spełniały warunki: D $\leq C < A < B$. Nawiasem mówiąc, w literaturze przedmiotu, gra powyższa prezentuje grę typu „dylemat więźnia". Gdyby gra powtarzana była tylko jeden raz, trudno byłoby przewidzieć jej rezultat, nawet w przypadku wcześniejszych ustaleń obu zakładów górniczych. Każdy z producentów może wszak nie dotrzymać umowy, co przy jednorazowej rozgrywce nie rodzi konsekwencji, co najwyżej moralne. W przypadku, gdy gra będzie rozgrywana wielokrotnie, sytuacja komplikuje się, a taką grę implikują warunki postawionego problemu dotyczącego producentów górniczych. Inwestycja geologiczno-górnicza charakteryzuje się zazwyczaj długim horyzontem czasowym, stąd uczestniczące w grze zakłady górnicze mogą zareagować na posunięcia oponenta niekiedy nawet w dość odległym horyzoncie czasowym.

Oba zakłady górnicze zważając na konieczność wielokrotnego rozegrania gry (dla przykładu 4 razy do roku podejmują decyzję o poziomie wydobycia), poczyniły ustalenia odnośnie współpracy i wyboru profilu strategii (K, K) o wypłatach (A, A). Jeżeli żadna ze stron porozumienia nie złamie warunków umowy, to kwartalne wypłaty obu zakładów górniczych wyniosą A. Łączna wypłata np. zakładu górniczego 1 wyniesie wtedy, stosownie do wzoru (10):

$$\pi_K = A + A\cdot\delta + A\cdot\delta^2 + \ldots + A\cdot\delta^T + A\cdot\delta^{T+1} + \ldots$$

Analogiczna wypłatę osiągnie zakład górniczy 2 nie decydując się na zerwanie umowy. Przyjmując, że piaskownia 1 w dowolnym z okresów (np. T) odstąpi od umowy, to jego dotychczasowe kwartalne wypłaty do kwartału T wyniosą A, w okresie T wyniosą B, a w dalszych okresach wypłaty zależeć będą od decyzji piaskowni 2. Gdy gracz 2 zdecyduje się na strategię odwetu, to wypłaty gracza 1 ulegną obniżeniu do C. Strategia odwetu oznacza kooperację, dopóki tylko zakład górniczy 1 kooperuje. Strategia odwetu jest sprzęgnięta z obniżeniem wypłat także dla gracza (tu zakładu górniczego 2) ją stosującego. Sumaryczne wypłaty piaskowni 1, przy zastosowaniu przez oponenta strategii odwetu wyniosą wtedy:

$$\pi_R = A + A\cdot\delta + A\cdot\delta^2 + \ldots + A\cdot\delta^{T-1} + B\cdot\delta^T + C\cdot\delta^{T+1} + C\cdot\delta^{T+2} + \ldots$$

Korzyść, jaką osiągnie zakład górniczy 1 nie postępując zgodnie z warunkami umowy, wyniesie:

$$\pi_R - \pi_K = \delta^T\,((B-A)+(C-A))\cdot\delta\cdot(1+\delta+\delta^2+\ldots$$

Ostatecznie uzyskiwane jest:

$$\pi_R - \pi_K = \delta^T\,[(B-A)+(C-A)\cdot\tfrac{\delta}{1-\delta}]$$

Dla zakładu górniczego 1 nie opłaca się odstąpić od umowy, gdy różnica pomiędzy łącznymi wypłatami jest ujemna ($\pi_R - \pi_K < 0$), czyli w sytuacji, gdy:

$$\delta^T\,[(B-A)+(C-A)\cdot\tfrac{\delta}{1-\delta}] < 0$$

Rozwiązując tę nierówność:

$$\delta^T\,(B-A) < \frac{\delta^T\cdot\delta(C-A)}{1-\delta} \Rightarrow \delta > \frac{B-A}{B-C}$$

Jeśli warunek ten jest spełniony, to strategie w grze powtarzanej są w równowadze Nasha i żadnemu z graczy nie opłaca się odeń odstępować. Gdy jednak jeden z konkurujących zakładów górniczych odmówi współpracy, to drugi z nich zastosuje strategię odwetu. Analiza gier nieskończenie powtarzanych dowodzi, że wytrwałość i cierpliwość graczy, zwłaszcza w sytuacji, gdy dla graczy istotne są przyszłe korzyści, wiąże się z reputacją i jej korzystnym oddziaływaniem (Watson 2005).

Powracając do gry producentów piasku należy sobie wyobrazić sytuację, gdy na rynku jest tylko jeden zakład górniczy i rynek funkcjonuje w charakterze monopolu. Całkowita ilość piasku wynosi zatem Q, a zysk jedynego dostawcy surowca osiąga:

$\pi_1(Q) = (25 - 1\frac{1}{5}(Q)) \cdot Q - 15Q.$

Funkcja realizuje maksimum dla $Q = 4\frac{1}{6}$, ogólnie dla $Q = \dfrac{a-d}{2b}$, a zysk wynosi wtedy $\pi_1(Q) = \frac{(a-d)^2}{4b}$ czyli $20\frac{5}{6}$ (jak to policzono dla modelu gry Cournota). Odwołując się do założeń gry o funkcjonowaniu dwóch zakładów górniczych optymalna ilość surowca musi być podzielona pomiędzy obu uczestników rynku. Obaj gracze porozumiewając się ze sobą działają jak monopolista i realizują zyski wynoszące $20\frac{5}{6}$. Obierają zatem dowolne poziomy produkcji, tak by suma wynosiła dokładnie $Q = q_1 + q_2$. Mogą to być wielkości równe po 50%, jak również w innych proporcjach. Wypłaty w grze przyjmują wtedy wielkości jak w macierzy (12).

piaskownia 1 \ piaskownia 2	K	R
K	$10\frac{5}{12}, 10\frac{5}{12}$	$7\frac{13}{16}, 11\frac{23}{32}$
R	$11\frac{23}{32}, 7\frac{13}{16}$	$7\frac{13}{16}, 7\frac{13}{16}$

(12)

Poszczególne wypłaty dla profili macierzy oznaczają:

— profil (K, K) – zakłady wydobywają po $2\frac{1}{12}$ tys. Mg, wielkość ta wynika z optymalnej wielkości łącznej produkcji;

— profil (K, R) – zakład 2 zrywa umowę w pewnym kwartale i decyduje się eksploatować w ilości $\frac{3}{4}$ optymalnego tonażu, czyli $3\frac{1}{8}$ tys. Mg. Wielkość ta jest najlepszą odpowiedzią na spodziewane wydobycie konkurenta. Można ją łatwo wyliczyć stosując standardowy rachunek różniczkowy i wyznaczając maksimum wyrażenia $\pi_1(q_R) = (25 - 1\frac{1}{5}(q_1 + q_R)) \cdot q_R - 15q_R$, gdzie q_R oznacza wydobycie piaskowni 2, będące przyczyną zerwania umowy. Postać ogólna umożliwiająca kalkulację wielkości najlepszej odpowiedzi to $q_R = \frac{3(a-d)}{8b}$;

— profil (R, K) – zakład 1 zrywa umowę w pewnym kwartale i wydobywa $\frac{3}{4}$ optymalnego tonażu urobku, czyli ponownie $3\frac{1}{8}$ tys. Mg (gra jest symetryczna, także tutaj ta wielkość produkcji jest najlepszą odpowiedzią na spodziewaną eksploatację oponenta w wysokości $2\frac{1}{12}$ tys. Mg),

— profil (R, R) – oba zakłady zrywają jednocześnie umowę i eksploatują po $3\frac{1}{8}$ tys. Mg.

Wyrażenie $\frac{B-A}{B-C}$ wynosi $\frac{11\frac{23}{32}-10\frac{5}{12}}{11\frac{23}{32}-7\frac{13}{16}}=\frac{1}{3}$. Przy $\delta > \frac{1}{3}$ opłacalne jest dotrzymanie umowy, przy $\delta < \frac{1}{3}$ profity przyniesie zerwanie umowy, zaś przy $\delta = \frac{1}{3}$ obojętnym jest czy umowa zostanie zerwana czy też podtrzymana. Tak wysoki wskaźnik dyskonta oznaczałby wielką chęć graczy do uzyskania wypłat natychmiast.

W rzeczywistości każdy z zakładów ma nieskończenie wiele strategii; tyle, ile jest możliwych poziomów produkcji. W macierzy dla profilu (*R*, *R*) można przykładowo podstawić zyski wynikające z wydobycia na poziomie $2\frac{7}{9}$ tys. Mg, będące równowagą Nasha gry Cournota. Macierz gry obejmuje wtedy wypłaty (13).

piaskownia 1 \ piaskownia 2	*K*	*R*
K	$10\frac{5}{12}, 10\frac{5}{12}$	$7\frac{13}{16}, 11\frac{23}{32}$
R	$11\frac{23}{32}, 7\frac{13}{16}$	$9\frac{7}{27}, 9\frac{7}{27}$

(13)

a stosowny wskaźnik $\frac{B-A}{B-C}$ wynosi $\frac{11\frac{23}{32}-10\frac{5}{12}}{11\frac{23}{32}-9\frac{7}{27}}=\frac{27}{51}$. Kooperacja przestaje być opłacalna przy $\delta < \frac{27}{51}$. Rozwiązanie wydaje się akceptowalne, choć trudno jednoznacznie uzasadnić, dlaczego strategia odwetu reprezentowana przez profil (*R*, *R*) miałaby być „karą" za zerwanie kooperacji (Malawski i in. 2004).

Podsumowanie

Przedstawiona w artykule gra rynkowa dwóch producentów piasku, pomimo znacznego uproszczenia problemu, umożliwia analizę zachowań strategicznych i obrazuje stopień komplikacji w podejmowaniu decyzji. Rozstrzygnięcie, czy formułować koalicję, czy pozostać poza jej ramami, to wątpliwości, które mogą być stawiane przez każdy z podmiotów operujących na rynku, zwłaszcza w sytuacji, gdyby rynek miał charakter oligopolu. Ponownie należy zadać pytania, która koalicja powstanie oraz w jaki sposób podzielone zostaną wypłaty? Wydaje się, że drugie z nich ma istotniejsze znaczenie. Fakt ten, jako pierwsi, podkreślali już von Neumann i Morgenstern (1944), prekursorzy teorii gier. Wypłata pojedynczego gracza jest dla niego sprawą o większym ciężarze gatunkowym niż sam fakt powstania koalicji. Dążąc do realizacji pewnych celów i zapewnienia sobie określonego poziomu wypłat samo powstanie koalicji jest tylko (i aż) środkiem ich realizacji. Ponadto kwestia podziału wypłat w koalicji odgrywa istotny wpływ na preferencje, do której koalicji gracz zechce przynależeć. Zatem analiza gier wieloosobowych rozpoczynać się winna materialistycznie – od ewentualnego zapytania o podział wypłat pomiędzy uczestników gry na jej końcu. Wypłaty graczy powinny spełniać dwa zasadnicze warunki: racjonalności indywidualnej oraz racjonalności zbiorowej (Luce, Raiffa 1989; Straffin 2004). Nieracjonalnym, z punktu widzenia pojedynczego gracza, byłoby wikłanie się w koalicję, gdyby jego wypłaty miałyby być niższe, niż te, które gwarantuje sobie bez kooperacji. Wybór metody rozwiązywania gry negocjacyjnej determinowany jest ilością par strategii o najwyższych wypłatach. Stosowane są tu następujące reguły (Kowalik 2007):

- jeśli gra posiada tylko jedną parę strategii o najwyższej wypłacie, to stosowana jest zwykła metoda kooperacji, gdzie gracze dzielą wypłaty proporcjonalnie do właściwych cen gry,
- jeśli gra posiada więcej niż jedną parę strategii o najwyższej wypłacie, to stosowana jest metoda poziomów bezpieczeństwa,
- jeśli gra posiada więcej niż jedną parę strategii o najwyższej wypłacie, a dodatkowo wprowadzany jest przez któregoś z graczy element groźby, to stosowana jest metoda strategii gróźb.

Pomimo pojawiających się niekiedy uwag, że wkład teorii gier do organizacji rynków i szerzej całej ekonomii jest postępem teoretycznym, a nie empirycznym, wydaje się, że proponowane przezeń rozwiązania są interesujące, nawet pomimo ich nie zawsze jednoznacznej wymowy.

Literatura

Aumann R.J., Maschler M., 1995 – Repeated Games with Incomplete Information. The Massachusetts Institute of Technology (MIT) Press.

Binmore K., 2007 – Game Theory. A Very Short Introduction. Oxford Univeristy Press.

Boyce G., 1997 – The Western Mining Corporation-Hanna/Homestake Joint Venture: Game Theory and Inter-organizational Cooperation. Australian Economic History Review, vol. 37, no. 3, p. 202–221.

Drabik E., 2005 – Zastosowanie teorii gier w ekonomii i zarządzaniu. Wydawnictwo SGGW, Warszawa.

Harsanyi J.C., 1967–68 – Games with Incomplete Information Played by “Bayesian” Players, Parts I, II, and III. Management Science vol. 14, p. 159–182, p. 320–334, p. 486–502.

Hendricks K., Porter R. H., – Auctions for Oil and Gas Leases with an Informed Bidder and a Random Reservation Price. Econometrica, vol. 62, no. 6, p. 1415–1444.

Jurdziak L., 2007a – Cena węgla brunatnego jako wyznacznik podziału zysku w układach kopalń i elektrowni. Część I – Propozycje podziału. Górnictwo i geologia IX. Prace Naukowe Instytutu Górnictwa Politechniki Wrocławskiej Nr 118, Seria: Studia i Materiały Nr 33, Oficyna Wydaw. Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.

Jurdziak L., 2007b – Schemat arbitrażowy Nasha, a podział zysków w bilateralnym monopolu kopalni węgla brunatnego i elektrowni. Cześć II – zastosowania w negocjacjach strategicznych i taktycznych. Górnictwo Odkrywkowe, nr 1–2.

Kowalik S., 2007 – Teoria gier z zastosowaniami górniczymi. Wyd. Politechniki Śląskiej. Gliwice.

Leyton-Brown K., Shoham Y., 2008 – Essentials of Game Theory: A Concise, Multidisciplinary Introduction. e-book, Morgan & Claypool Publisher.

Luce R.D., Raiffa H., 1989 – Games and Decisions. Introduction and Critical Survey. Dover Publications, Inc. New York. Reprint.

Malawski M., Wieczorek A., Sosnowska H., 2004 – Konkurencja i kooperacja. Teoria gier w ekonomii i naukach społecznych. Wydawnictwa Naukowe PWN.

Nash J.F., 1951 – Non-Cooperative Games. The Annals of Mathematics, Second Series, vol. 54, no. 2, p. 286–295.

von Neumann J., Morgenstern O., 1944 – The Theory of Games and Economic Behavior. Princeton University Press.

Osborne M., Rubinstein A., 1994 – A Course in Game Theory. The Massachusetts Institute of Technology (MIT) Press.

Pelto R., 1971 – The Statistical Structure of Bidding for Oil and Mineral Rights. Journal of the American Statistical Association vol. 66, no. 335, p. 456–460.

Porter R.H., 1995 – The Role of Information in U.S. Offshore Oil and Gas Lease Auction. Econometrica vol. 63, no. 1, p. 1–27.

Rasmusen E., 2007 – Games and information. An Introduction to Game Theory. 4th ed. Blackwell Publishing Ltd.
Straffin P.D., 2004 – Teoria gier. Wydawnictwo Naukowe Scholar, Warszawa.
Thomas L.C., 2003 – Games, Theory and Applications. Dover Publications, Inc. New York, Reprint.
Watson J., 2005 – Strategia. Wprowadzenie do teorii gier. Wyd. Naukowo-Techniczne, Warszawa.