Górnictwo i Geoinżynieria • Rok 34 • Zeszyt 2 • 2010

*Marian Paluch*, Michał Betlej**

# ANALIZA WPŁYWU STAŁYCH FIZYCZNYCH I GEOMETRYCZNYCH NA DEFORMACJE WALCOWYCH KONSTRUKCYJNYCH ELEMENTÓW GUMOWYCH

## 1. Wstęp

Przedmiotem pracy jest analiza stanu naprężenia, odkształcenia i przemieszczenia gumowych, walcowych łączników przeprowadzona na podstawie nieliniowej teorii sprężystości ośrodków odkształcalnych. Gumowe elementy sprężyste mają szerokie zastosowanie z uwagi na ich zalety techniczne i technologiczne. Materiał gumowy, tzw. elastomer powstaje na bazie różnych kauczuków z mieszanki gumowej zawierającej szereg dodatków wpływających na właściwości fizyczne i mechaniczne.

Zarówno charakterystyka sprężysta jak i dopuszczalne obciążenie łącznika zależy nie tylko od materiału, ale i jego ukształtowania. Guma jest materiałem nieściśliwym. W pracy przyjęto, że jest to materiał Mooneya o potencjale sprężystym [3]:

$$W = \Phi(I_1 - 3) + \Psi(I_2 - 3) + 2C_3(I_1^2 - 9); \quad I_3 = 1 \tag{1}$$

gdzie:

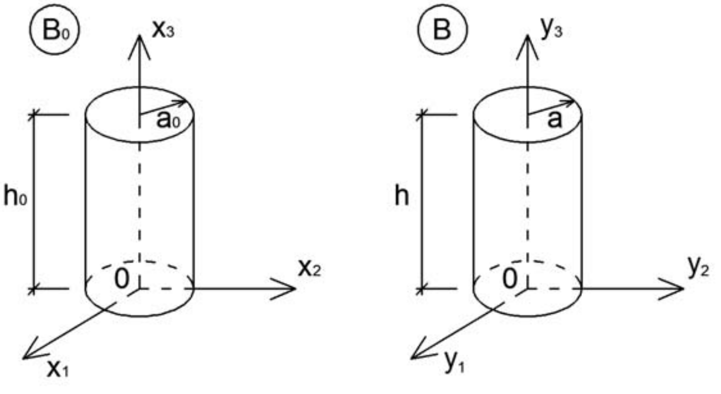
$W$ — potencjał sprężystości,
$I_1, I_2, I_3$ — niezmienniki tensora odkształcenia,
$\Phi, \Psi, C_3$ — stałe materiałowe (por. wzór 18).

## 2. Określenie składowych tensora naprężenia i odkształcenia oraz wektora przemieszczenia

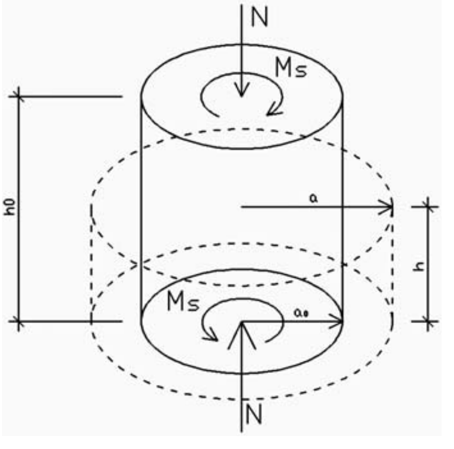
W trójwymiarowej przestrzeni Euklidesa rozważamy walec kołowy, który w naturalnym, niezdeformowanym stanie — konfiguracja początkowa $B_0$ ma wymiary: promień $a_0$

* Katedra Geomechaniki, Budownictwa i Geotechniki, Wydział Górnictwa i Geoinżynierii, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków

i wysokość $h_0$ (rys. 1, 2). W konfiguracji odkształconej $B$ czyli aktualnej jego wymiary to: promień $a$ i wysokość $h$.




**Rys. 1.** Konfiguracje ciała




**Rys. 2.** Schemat obciążenia i sposób odkształcenia walca

Zgodnie z rysunkiem 1, w $B_0$ przyjęto układ współrzędnych kartezjańskich $\{x_i\}$ związany ze współrzędnymi cylindrycznymi (konwekcyjnymi) $\{\theta^\alpha\}$ zależnością:

$$\bar{r}:\left\{\begin{aligned} x_1 &= \frac{a}{a_0} r\cos\left(\varphi + \frac{\varphi_0}{h_0}z\right) = \lambda r\cos(\varphi + kz) = r_0\cos\varphi_0 \\ x_2 &= \lambda r\sin(\varphi + kz) = r_0\sin\varphi_0 \\ x_3 &= \frac{h}{h_0}z = \chi z = z_0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

gdzie:

$a, h, \varphi$ — parametry geometryczne w konfiguracji początkowej,

$a_0$, $h_0$, $\varphi_0$ — parametry geometryczne w konfiguracji odkształconej,
$r$, $z$ — współrzędne w walcowym układzie współrzędnych.

Przyjęto tutaj współrzędne konwekcyjne $\theta^1 = r$, $\theta^2 = \varphi$, $\theta^3 = z$. Parametry opisujące deformację ciała zmieniają się według zależności:

$$\lambda = \frac{a}{a_0}; \quad k = \frac{\varphi_0}{h_0} > 0; \quad 0 < \chi = \frac{h}{h_0} < 1 \tag{3}$$

W konfiguracji aktualnej $B$ współrzędne kartezjańskie $\{y_i\}$ związane są ze współrzędnymi cylindrycznymi zależnością:

$$\overline{R}: \left\{ \begin{array}{l} y_1 = r\cos\varphi \\ y_2 = r\sin\varphi \\ y_3 = z \end{array} \right\} \tag{4}$$

Funkcje $r_0 = \lambda r$, $\varphi_0 = \varphi + kz$, $z_0 = \chi z$ opisujące deformację ciała będą wyznaczane z warunku nieściśliwości $I_3 = 1$. Tensory metryczne w konfiguracji początkowej $B_0$:

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^s}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial x^s}{\partial\theta^\beta}; \quad g^{\alpha\beta} = \frac{\partial\theta^\alpha}{\partial x^s}\frac{\partial\theta^\beta}{\partial x^s} \tag{5}$$

mają elementy:

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 r^2 & \lambda^2 k r^2 \\ 0 & \lambda^2 k r^2 & \lambda^2 k^2 r^2 + \chi^2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$g = \det g_{\alpha\beta} = \lambda^4 \chi^2 r^2 \tag{7}$$

$$(g^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \lambda^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{k}{\chi}\right)^2 + (\lambda r)^{-2} & -\frac{k}{\chi^2} \\ 0 & -\frac{k}{\chi^2} & \chi^{-2} \end{pmatrix} \tag{8}$$

Tensory metryczne w konfiguracji $B$:

$$G_{\alpha\beta} = \frac{\partial y^s}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial y^s}{\partial\theta^\beta}; \quad G^{\alpha\beta} = \frac{\partial\theta^\alpha}{\partial y^s}\frac{\partial\theta^\beta}{\partial y^s} \tag{9}$$

mają elementy:

$$(G_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (G^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$G = \det G_{\alpha\beta} = r^2 \tag{11}$$

Z warunku nieściśliwości:

$$I_3 = \frac{G}{g} = 1 \tag{12}$$

otrzymujemy równanie wiążące parametry $\lambda$, $\chi$:

$$(\lambda^2\chi - 1)(\lambda^2\chi + 1) = 0 \tag{13}$$

i stąd parametr $\chi$ wyrażamy przez $\lambda$:

$$\chi = \frac{1}{\lambda^2} = \lambda^{-2} \tag{14}$$

W dalszym toku obliczeń zależność (14) wstawiamy do (8):

$$(g^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \lambda^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^4 k^2 + \lambda^{-2} r^{-2} & -k\lambda^4 \\ 0 & -k\lambda^4 & \lambda^4 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Do wyznaczenia składowych tensora naprężenia musimy znać elementy tensora geometrii:

$$B^{\alpha\beta} = G_{\varphi\psi}\left(g^{\alpha\beta} g^{\varphi\psi} - g^{\alpha\varphi} g^{\beta\psi}\right) \tag{16}$$

$$(B^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \lambda^2 + \lambda^{-4} + \lambda^2 k^2 r^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 k^2 + (\lambda^2 \_ \lambda^{-4}) r^{-2} & -k\lambda^2 \\ 0 & -k\lambda^2 & 2\lambda^2 \end{pmatrix} \tag{17}$$

Obliczenie elementów tensora naprężenia $\tau^{\alpha\beta}$ dla ciała Mooneya:

$$\begin{cases} \tau^{\alpha\beta} = 2(C_1 \_ 2C_3 I_1) g^{\alpha\beta} + 2C_2 B^{\alpha\beta} + pG^{\alpha\beta} \\ I_1 = g^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta} = \lambda^4 + 2\lambda^{-2} + \lambda^4 k^2 r^2 \\ \Phi = \dfrac{2}{\sqrt{I_3}} \dfrac{\partial W}{\partial I_1} = 2C_1 \qquad \psi = \dfrac{2}{\sqrt{I_3}} \dfrac{\partial W}{\partial I_2} = 2C_2 \\ W = 2C_1(I_1 - 3) + 2C_2(I_2 - 3) + 2C_3(I_1^2 - 9) \end{cases} \tag{18}$$

gdzie $p$ — ciśnienie hydrostatyczne.

$$\begin{cases} \tau^{11} = \sigma_{11} = 2C_1\lambda^{-2} + 2C_2(\lambda^2 + \lambda^{-4} + \lambda^2 k^2 r^2) + 4C_3(\lambda^2 + 2\lambda^{-4} + \lambda^2 k^2 r^2) + p \\ r^2\tau^{22} = \sigma_{22} = 2C_1(\lambda^4 k^2 r^2 + \lambda^{-2}) + 2C_2(\lambda^2 k^2 r^2 + \lambda^2 + \lambda^{-4}) + \\ \qquad\qquad + 4C_3(\lambda^4 k^2 r^2 + \lambda^{-2})(\lambda^4 + 2\lambda^{-2} + \lambda^4 k^2 r^2) + p \\ r\tau^{23} = \sigma_{23} = -2C_1 k\lambda^4 r - 2C_2 k\lambda^2 r - 4C_3 k\lambda^4(\lambda^4 + 2\lambda^{-2} + \lambda^4 k^2 r^2) r \\ \tau^{12} = \tau^{13} = 0 \\ \tau^{33} = \sigma_{33} = 2C_1\lambda^4 + 4C_2\lambda^2 + 4C_3\lambda^4(\lambda^4 + 2\lambda^{-2} + \lambda^4 k^2 r^2) + p \end{cases} \tag{19}$$

W cylindrycznym układzie współrzędnych symbole Christoffela II-go rodzaju są równe:

$$\Gamma^1_{22} = -r; \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}; \quad \text{pozosta e} \quad \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 0 \tag{20}$$

Zatem równania równowagi w cylindrycznym układzie współrzędnych są następujące:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\tau^{11}}{\partial r} + \dfrac{\partial\tau^{21}}{\partial\varphi} + \dfrac{\partial\tau^{31}}{\partial z} - r\tau^{22} + \dfrac{1}{r}\tau^{11} = 0 \\ \dfrac{\partial\tau^{12}}{\partial r} + \dfrac{\partial\tau^{22}}{\partial\varphi} + \dfrac{\partial\tau^{32}}{\partial z} + \dfrac{3}{r}\tau^{12} = 0 \\ \dfrac{\partial\tau^{13}}{\partial r} + \dfrac{\partial\tau^{23}}{\partial\varphi} + \dfrac{\partial\tau^{33}}{\partial z} + \dfrac{1}{r}\tau^{13} = 0 \end{cases} \tag{21}$$

Wstawiając (19) do (21) wyznaczamy nieznane ciśnienie hydrostatyczne:

$$p(r,\varphi,z) = p(r) = C_1\lambda^4 k^2 r^2 - 2C_2\lambda^2 k^2 r^2 + C_3\lambda^8 k^2(2r^2 + k^2 r^4) + p_0 \tag{22}$$

Stałą $p_0$ obliczamy z warunku zerowania naprężeń na pobocznicy walca, która jest nieobciążona. Zachodzi zatem:

$$\sigma_{11}\big|_{r=a} = 0 \tag{23}$$

I stąd:

$$\begin{aligned} p_0 = &-C_1(\lambda^4 k^2 a^2 + 2\lambda^{-2}) - 2C_2(\lambda^2 + \lambda^{-4}) + \\ &- C_3[4\lambda^2 + 8\lambda^{-4} + (4\lambda^2 + 2\lambda^8)k^2 a^2 + \lambda^8 k^4 a^4] \end{aligned} \tag{24}$$

Wstawiając (24) do (12) i (19) otrzymujemy ostateczną postać elementów tensora naprężenia:

$$
\begin{cases}
\tau^{11} = \sigma_{11} = C_1\lambda^2 k^2 (r^2 - a^2) + C_3[4\lambda^2 k^2 (r^2 - a^2) + 2\lambda^8 k^2 (r^2 - a^2) + \lambda^8 k^4 (r^4 - a^4)] \\
r^2 \tau^{22} = \sigma_{22} = C_1 \lambda^4 k^2 (3r^2 - a^2) + \\
\qquad + C_3[4\lambda^2 k^2 (3r^2 - a^2) + 2\lambda^8 k^2 (3r^2 - a^2) + \lambda^8 k^4 (5r^2 - a^2)] \\
r\tau^{23} = \sigma_{23} = -2C_1\lambda^4 kr - 2C_2\lambda^2 kr - 4C_3\lambda^4(\lambda^4 + 2\lambda^{-2} + \lambda^4 k^2 r^2)kr \\
\tau^{33} = \sigma_{33} = C_1[2\lambda^4 - 2\lambda^{-2} + \lambda^4 k^2 (r^2 - a^2)] + C_2(2\lambda^2 - 2\lambda^{-4} - 2\lambda^2 k^2 r^2) + \\
\qquad + C_3[4\lambda^8 + 4\lambda^2 - 8\lambda^{-4} - 4\lambda^2 k^2 a^2 + 2\lambda^8 k^2 (3r^2 - a^2) + \lambda^8 k^4 (r^4 - a^4)]
\end{cases}
\tag{25}
$$

Obliczenie zredukowanej siły osiowej ściskającej denka walca:

$$
\begin{aligned}
N = 2\pi \int_0^2 r\sigma_{33}\big|_{z=0,h} dr = C_1\lambda^4 a^2\left(1 - \lambda^{-6} - \frac{1}{4}k^2a^2\right) C_2\lambda^2 a^2 \left(1 - \lambda^{-6} - \frac{1}{2}k^2 a^2\right) + \\
+ 2C_3\lambda^2 a^2\left[\lambda^6 + 1 - 2\lambda^{-6} + \frac{1}{6}(\lambda^6 - 12)k^2a^2\right]
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Obliczenie zredukowanego momentu skręcającego denka walca:

$$
M_S = 2\pi \int_0^a r^2 \sigma_{23}\big|_{z=0,h} dr = \pi\lambda^2 k a^4\left\{C_1\lambda^2 + C_2 + 2C_3\left[\lambda^2(\lambda^4 + 2\lambda^{-2}) + \frac{2}{3}\lambda^6 k^2 a^2\right]\right\}
\tag{27}
$$

Elementy tensora odkształceń [4] wyznaczamy z zależności:

$$
\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(G_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta})
\tag{28}
$$

$$
(\gamma_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 - \lambda^2 r^2 & -\lambda^2 k r^2 \\ 0 & -\lambda^2 k r^2 & 1 - \lambda^2 k^2 r^2 - \lambda^{-4} \end{pmatrix}
\tag{29}
$$

Składowe fizyczne tensora odkształcenia wynoszą:

$$
\begin{cases}
\varepsilon_{11} = \gamma_{11} = \dfrac{1-\lambda^2}{2} \\
\varepsilon_{22} = \dfrac{1}{r^2}\gamma_{22} = \dfrac{1}{2}(1-\lambda^2) \\
\varepsilon_{33} = \gamma_{33} = \dfrac{1}{2}(1 - \lambda^4 - \lambda^2 k^2 r^2) \\
\varepsilon_{23} = \dfrac{1}{r}\gamma_{23} = -\dfrac{1}{2}\lambda^2 kr
\end{cases}
\tag{30}
$$

Obliczenia wykonano dla związków deformacyjnych:

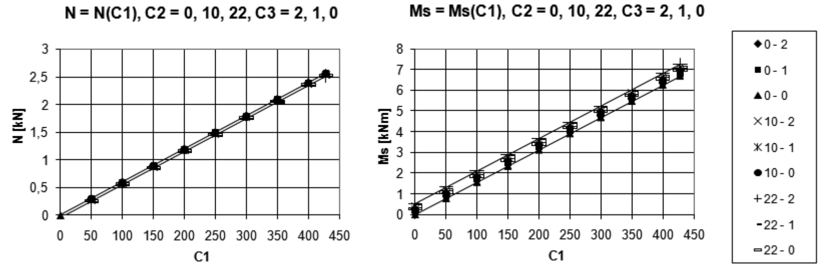
$$
\begin{cases}
x_1 = \lambda r \cos(\varphi + kz) \\
x_2 = \lambda r \sin(\varphi + kz) \\
x_3 = z
\end{cases}
\tag{31}
$$

# 3. Analiza wpływu stałych fizycznych i geometrycznych na deformację walca kołowego

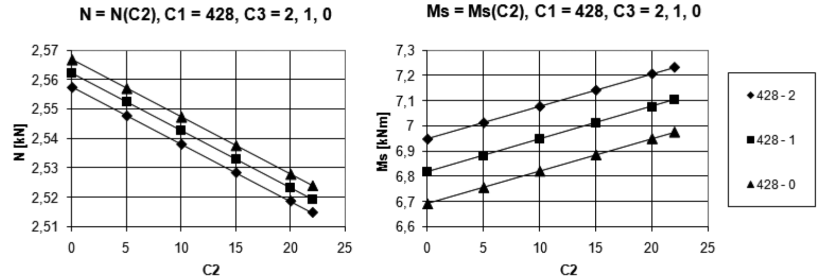
Na podstawie wyprowadzonych wzorów podających naprężenia, odkształcenia i przemieszczenia oraz zredukowane obciążenie $N$ i $M_s$ przebadano jak stałe materiałowe $C_1$, $C_2$, $C_3$ wpływają na zredukowane siły zewnętrzne przy stałych zadanych parametrach geometrycznych. Do obliczeń przyjęto wymiary walca wynoszące: wysokość 13 mm, średnica 300 mm oraz parametry $\lambda = 1{,}1$ i $k = 6{,}713$ rad/m odpowiadające pięciostopniowemu skręceniu walca. Stałe materiałowe zmieniano w następujących zakresach:

$C_1$ — od 0 do 428 kN/m$^2$,
$C_2$ — od 0 do 22 kN/m$^2$,
$C_3$ — od 0 do 2 kN/m$^2$.

Uzyskane wyniki przedstawiono na rysunkach 3, 4, 5.



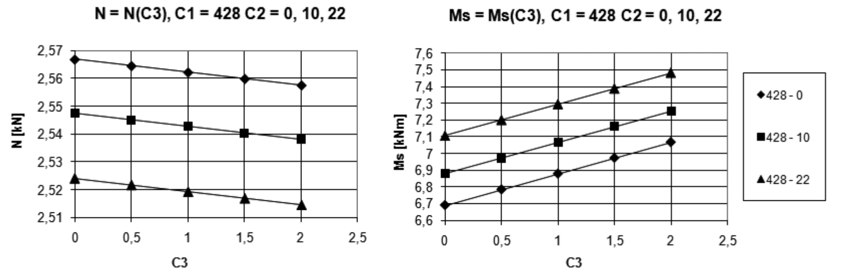

**Rys. 3.** Wartość zredukowanych sił zewnętrznych w funkcji stałej $C_1$




**Rys. 4.** Wartość zredukowanych sił zewnętrznych w funkcji stałej $C_2$

Z rysunków 3, 4, 5 wynikają następujące wnioski:

— ze wzrostem stałej $C_1$ rośnie liniowo siła $N$, przy czym na jej wartość niewielki wpływ mają stałe $C_2$ i $C_3$,
— ze wzrostem stałej $C_1$ rośnie również liniowo moment skręcający $M_s$ przy czym wpływ stałych $C_2$ i $C_3$ jest większy i dochodzi do 15%,
— ze wzrostem stałej $C_2$ przy ustalonych $C_1$ i $C_3$ wartość siły osiowej $N$ maleje zaś rośnie $M_s$,

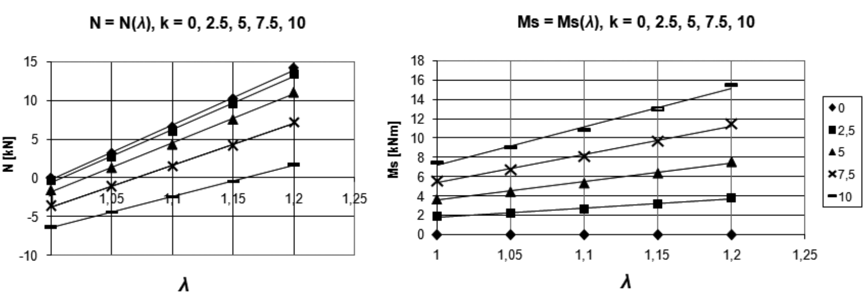



**Rys. 5.** Wartość zredukowanych sił zewnętrznych w funkcji stałej $C_3$

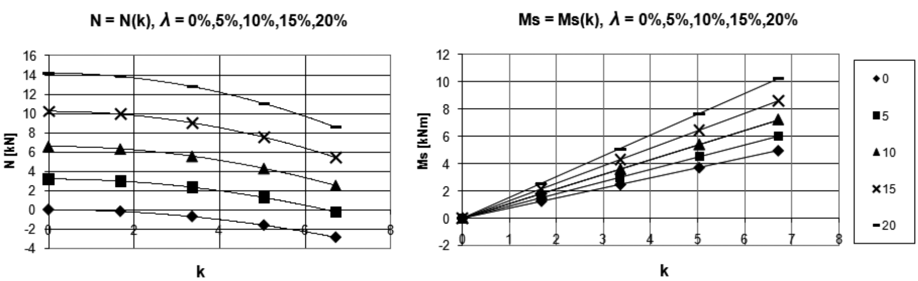
— ze wzrostem stałej $C_3$ przy ustalonych $C_1$ i $C_2$ wartość siły osiowej $N$ maleje zaś rośnie wartość momentu skręcającego,

— w praktycznych obliczeniach można przyjmować stałą $C_3$ równą zero, gdyż jej wpływ na zredukowany układ sił zewnętrznych jest niewielki, a obliczenia znacznie się upraszczają.

W dalszym ciągu przeprowadzono analizę wpływu parametrów $\lambda$ i $k$ na zredukowany układ sił $N$ i $M_s$ przy ustalonych wartościach stałych materiałowych. Do obliczeń przyjęto podobnie jak poprzednio: $h$ = 13 mm, $a$ = 150 mm oraz stałe $C_1$ = 428 kN/m², $C_2$ = 22 kN/m² i $C_3$ = 2 kN/m². Parametr $\lambda$ zmieniano w zakresie od 1 do 2 przy stałym $k$, zaś w kolejnym wariancie zmieniano $k$ w zakresie od 0 do 30 przy ustalonym parametrze $\lambda$ z przedziału [1–2]. Wyniki przedstawiają rysunki 6, 7.




**Rys. 6.** Wartość zredukowanych sił zewnętrznych w funkcji $\lambda$




**Rys. 7.** Wartość zredukowanych sił zewnętrznych w funkcji $k$

Wynikają z nich następujące wnioski:
- ze wzrostem parametru $\lambda$ siła osiowa rośnie tym szybciej im mniejsze jest $k$,
- ze wzrostem parametru $\lambda$ moment skręcający również rośnie, jednak wpływ parametru $k$ jest odwrotny, tzn. moment rośnie tym szybciej im większe jest $k$,
- ze wzrostem parametru $k$ siła osiowa maleje i to tym bardziej im większe jest $\lambda$. Funkcje są krzywoliniowe i nie można ich przybliżać prostymi, nawet dla niewielkich zakresów $\lambda$ i $k$.
- ze wzrostem parametru $k$ moment skręcający rośnie. Szybkość przyrostu jest tym większa im większe jest $\lambda$. Tym razem jednak funkcje w rozpatrywanym zakresie wartości $\lambda$ i $k$ można przybliżać prostymi.

## 4. Podsumowanie

W pracy podano rozwiązanie zamknięte pozwalające na określenie składowych stanu naprężenia, odkształcenia i wektora przemieszczenia przy założonych związkach deformacyjnych dla nieściśliwego walca kołowego. Problem rozwiązano korzystając z równań nieliniowej mechaniki ośrodków odkształcalnych. Na podstawie otrzymanych rezultatów można było przeprowadzić szeroką analizę wpływu stałych fizycznych i geometrycznych na deformację walcowych elementów wykonanych z elastomeru. Praca może znaleźć zastosowanie we wstępnych stadiach projektowania np. gumowych łożysk mostowych czy różnego rodzaju łączników, amortyzatorów itp.

LITERATURA


[1] *Fung J.C.*: Podstawy mechaniki ciała stałego, PWN, Warszawa 1969
[2] *Green A.E., Adkins J.E.*: Large Elastic Deformations and Non-Linear Continuum Mechanics, Oxford 1980
[3] *Mooney M.*: A Theory of Large Elastic Deformation, J. Appl. Phys., 11, 1940
[4] *Paluch M.*: Podstawy teorii sprężystości i plastyczności z przykładami, Wyd. Politechniki Krakowskiej, Kraków 2006
[5] *Paluch M.*: Zastosowanie rachunku tensorowego do wybranych zagadnień geomechaniki, Rozprawy-Monografie, AGH Kraków 2008
[6] *Pękalak M., Radkowski S.*: Gumowe elementy sprężyste, PWN, Warszawa 1989
[7] *Rymarz Cz.*: Mechanika ośrodków ciągłych, PWN, Warszawa 1993
[8] *Wesołowski Z., Woźniak Cz.*: Podstawy nieliniowej teorii sprężystości, PWN Warszawa 1970
[9] *Zahorski S.*: Doświadczalne badania niektórych własności mechanicznych gumy, Rozprawy Inż., 9, 1961